Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.
Esercizi proposti il 22/12/2023. Soluzioni.

Esercizio 1. *Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice:*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.1. *Determinare gli autovalori di L_A.*

Soluzione 1.1. Abbiamo visto che gli autovalori di L_A sono le radici del polinomio caratteristico $P_{L_A}(\lambda)$. La matrice associata a L_A nella base canonica è proprio A e quindi $P_{L_A}(\lambda) = P_A(\lambda)$ con

$$P_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Calcolando il determinante otteniamo: $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda)$. Ne segue che L_A ha autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2\,,\lambda_3 = 4$.

1.2. *Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.*

Soluzione 1.2. Vi ricordo che l'autospazio V_λ associato ad un autovalore λ è dato da

$$V_\lambda = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, L_A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} \equiv \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;(A - \lambda \mathrm{I}_3)\underline{x} = \underline{0}\}\,.$$

Quindi $V_0 = \{\underline{x}\,;\, A\underline{x} = \underline{0}\} = \mathrm{Ker}L_A$; questo sottospazio sappiamo calcolarlo ed otteniamo

$$V_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \}$$

Passiamo a V_2; la matrice $A - 2\mathrm{I}_3$ è data da

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$V_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\,; \begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \}$$

Procedendo analogamente si trova:

$$V_4 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \}$$

1.3. *Per ogni autospazio determinare una base.*

Soluzione 1.3. In questo caso ogni autospazio è una retta (ognuno dei 3 sistemi è un sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 3 incognite e di rango 2). Risolvendo i sistemi si trova

$$V_0 = \mathbb{R}(0,-3,1)\,, \quad V_2 = \mathbb{R}(4,9,3)\,, \quad V_4 = \mathbb{R}(0,1,1)\,.$$

1.4. *Verificare che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per L_A. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?*

Soluzione 1.4. I vettori generatori dei 3 autospazi sono linearmente indipendenti perché abbiamo visto che *autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.* Nel nostro caso gli autovalori sono distinti e possiamo concludere. Quindi *una* base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di L_A è

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1)\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3)\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1)$$

Questa base **non** è ovviamente unica; possiamo scegliere 3 generatori diversi nelle 3 rette di autovettori V_0, V_2, V_4 e ottenere così una diversa base di autovettori. Ad esempio

$$\underline{w}_1 = (0, 6, -2)\,, \quad \underline{w}_2 = (4\pi, 9\pi, 3\pi)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, \sqrt{39}, \sqrt{39})\,.$$

1.5. *Scrivere la matrice associata a L_A nella base di cui in 1.4.* (Utilizzate la definizione di matrice associata ad L_A in una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $L_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.)

Soluzione 1.5. Come spiegato in dettaglio a lezione la matrice associata ad L_A in una base di autovettori è proprio la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di L_A (nell'ordine dato dall'ordine degli autovettori). In questo caso, per la base

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1) \in V_0\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3) \in V_2\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1) \in V_4$$

otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Denotiamo con $\mathcal{B}$ questa base di autovettori, quindi

$$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1 = (0, -3, 1), \underline{v}_2 = (4, 9, 3), \underline{v}_3 = (0, 1, 1)\}$$

1.6 *Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}\,A\,M$ sia diagonale.*

Soluzione 1.6. Abbiamo a questo punto due basi di $\mathbb{R}^3$; la base canonica e la base di autovettori $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1 = (0, -3, 1), \underline{v}_2 = (4, 9, 3), \underline{v}_3 = (0, 1, 1)\}$. Sia M la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{v}_j$ nella base canonica: questa è la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base di autovettori $\mathcal{B}$, denotata $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$.

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Sappiamo che la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A)$ associata a L_A nella nuova base è data da

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A) &= M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(L_A) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \\ &= (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(L_A) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \\ &= (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot A \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \end{aligned}$$

D'altra parte abbiamo già calcolato la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A)$ utilizzando l'informazione che la base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori ed abbiamo trovato

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

In definitiva, la matrice $M := M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ è tale che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

come si voleva.

1.7 *La matrice di cui in 1.6 è unica ?.*

Soluzione 1.7. No, non è unica perché dipende dalla base di autovettori scelta.

Esercizio 2. *Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$F(1,1,0) = (-1,3,0)\,, \quad F(0,1,0) = (0,1,0)\,, \quad F(0,1,1) = (2,-1,1)$$

2.1 *Verificare che la matrice associata ad F nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è*

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.2 *Stabilire se F è diagonalizzabile ed in caso affermativo trovare una base di autovettori e la matrice associata ad F in questa base. Studiare l'iniettività e la suriettività di F.*

Soluzione.

1.1 Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica. Basta verificare che la matrice A ha come j-ma colonna le coordinate, nella base canonica, di $F(\underline{e}_j)$. Utilizzando la linearità si ha

$F(1,0,0) = F((1,1,0) - (0,1,0)) = F(1,1,0) - F(0,1,0) = (-1,3,0) - (0,1,0) = (-1,2,0)$

che è proprio la prima colonna di A. Analogamente si procede per le altre colonne.

1.2 Il polinomio caratteristico di F si può calcolare utilizzando la matrice A: otteniamo $P_T(\lambda) = P_A(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)$. Ne segue che F ha autovalori 1 con molteplicità algebrica 2 e -1 con molteplicità algebrica 1. L'autospazio V_{-1} ha automaticamente dimensione 1; l'autospazio $V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (A - I_3)\underline{x} = \underline{0}\}$ ha dimensione $3 - 1 = 2$, come subito si verifica osservando che

$$A - I_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che ha rango 1. Per il Teorema fondamentale segue che F è diagonalizzabile (le radici del polinomio caratteristico sono reali e la molteplicità algebrica di ciascun autovalore è uguale alla molteplicità geometrica). Una base di autovettori si trova determinando due vettori linearmente indipendenti in V_1 ed un generatore della retta V_{-1}. Dal fatto che $V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (A - I_3)\underline{x} = \underline{0}\}$ segue che

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_3 = 0\}$$

ed una base di V_1 è allora

$$(1,0,1)\,, \quad (0,1,0)\,.$$

Analogamente V_{-1} ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

e queste equazioni rappresentano la retta $\mathbb{R}(1,-1,0)$. In definitiva

$$(1,0,1)\,, \quad (0,1,0)\,, \quad (1,-1,0)$$

è una base di autovettori. La matrice associata ad F in questa base è

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\,.$$

F è iniettiva e suriettiva dato che $\det \Delta = -1 \neq 0$.

Esercizio 3. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[X]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Sia data l'applicazione*

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R}_2[X] \\ p &\mapsto 2p - p(-1)(X^2 - X). \end{aligned}$$

3.1 *Verificare che T è lineare, descriverne l'immagine, e determinarne una base per il nucleo.*
3.2 *Scrivere la matrice associata a T nella base $\mathcal{F} := \{2, -X, X^2\}$, scelta come base di partenza e come base di arrivo.*
Soluzione: T è lineare, infatti per ogni $p, q \in \mathbb{R}_2[X]$, ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} T(\alpha\, p + \beta\, q) &= 2(\alpha\, p + \beta\, q) - (\alpha\, p + \beta\, q)(-1)(X^2 - X) \\ &= \alpha\big(2p - p(-1)(X^2 - X)\big) + \beta\big(2q - q(-1)(X^2 - X)\big) \\ &= \alpha\, T(p) + \beta\, T(q). \end{aligned}$$

Ogni polinomio nell'immagine di T si annulla in -1, infatti

$$2p(-1) - p(-1)\big((-1)^2 - (-1)\big) = 2p(-1) - 2p(-1) = 0.$$

Quindi, $\mathrm{Im}(T) \leq \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(-1) = 0\}$, e chiaramente (una sola condizione lineare non banale) $\dim\{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(-1) = 0\} = 2$. D'altra parte, se $p \in \ker T$, allora necessariamente

$$p = \frac{p(-1)}{2}\,(X^2 - X),$$

e dunque $\ker T = \mathrm{Span}\{X^2 - X\}$. In particolare, si ha $\dim \ker T = 1$. Il Teorema della Dimensione ci dice che quindi $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$, e dunque necessariamente $\mathrm{Im}(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(-1) = 0\}$.
Per scrivere la matrice associata a T nella base data osserviamo che

$$\begin{aligned} T(2) &= 4 - 2(X^2 - X) = -2X^2 + 2X + 4 = 2 \cdot 2 - 2(-X) - 2X^2, \\ T(-X) &= -2X - X^2 + X = (-X) - X^2, \\ T(X^2) &= 2X^2 - X^2 + X = -(-X) + X^2, \end{aligned}$$

Quindi

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Potevamo anche scrivere la matrice associata a T nella base canonica $\mathcal{E} = \{1, X, X^2\}$, che è uguale a

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

e utilizzare la formula magica

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T) = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id})$$

con

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$(M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}))^{-1} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Potevamo anche caratterizzare il nucleo e l'immagine diversamente, utilizzando $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)$ oppure $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$.
Utilizziamo ad esempio $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$ e cioè

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

È chiaro dalla struttura di questa matrice (le ultime due colonne sono uguali, mentre le prime due non sono proporzionali) che $\mathrm{Im}(T)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}_2[X]$ generato dai vettori che hanno coordinate uguali alla prima e alla seconda colonna. Quindi

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}\{2 + X - X^2, X + X^2\}.$$

Analogamente $\mathrm{Ker}(T)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}_2[X]$ costituito dai vettori con coordinate in $\mathrm{Ker}A$. Non è difficile verificare che $\mathrm{Ker}A$ è generato da $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}^t$ e quindi

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Span}\{-X + X^2\}.$$