Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.
Esercizi proposti il 22/12/2023

Esercizio 1. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare* $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definita dalla matrice:*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.1. *Determinare gli autovalori di* L_A.

1.2. *Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.*

1.3. *Per ogni autospazio determinare una base.*

1.4. *Verificare che esiste una base di* $\mathbb{R}^3$ *costituita da autovettori per* L_A*. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?*

1.5. *Scrivere la matrice associata a* L_A *nella base di cui in 1.4.* (Utilizzate la definizione di matrice associata ad L_A in una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $L_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.)

1.6 *Determinare una matrice invertibile* M *tale che* $M^{-1}\,A\,M$ *sia diagonale.*

1.7 *La matrice di cui in 1.6 è unica ?.*

Esercizio 2. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *e sia* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$F(1,1,0) = (-1,3,0)\,, \quad F(0,1,0) = (0,1,0)\,, \quad F(0,1,1) = (2,-1,1)$$

2.1 *Verificare che la matrice associata ad* F *nella base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *è*

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.2 *Stabilire se* F *è diagonalizzabile ed in caso affermativo trovare una base di autovettori e la matrice associata ad* F *in questa base. Studiare l'iniettività e la suriettività di* F.
2.3 *Calcolare* A^{1222}.

Esercizio 3. *Si consideri lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}_2[X]$ *dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Sia data l'applicazione*

$$T\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$p \mapsto 2p - p(-1)(X^2 - X).$$

3.1 *Verificare che* T *è lineare, descriverne l'immagine, e determinarne una base per il nucleo.*
3.2 *Scrivere la matrice associata a* T *nella base* $\mathcal{F} := \{2, -X, X^2\}$*, scelta come base di partenza e come base di arrivo.*