Esame scritto di prova. Soluzione dell'esercizio 5

Esercizio 5. Sia $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da A.

1. Scrivere l'espressione esplicita di L_A:

$$L_A \left(\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$$

2. Determinare una base di $\mathrm{Im}(L_A)$ e una base di $\mathrm{Ker}(L_A)$.

3. Determinare equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}(L_A)$.

Soluzione (sketch) [1]**.** Per definizione

$$L_A \left(\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 2x_1 + 5x_2 + x_4 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \\ -3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 \end{vmatrix}$$

Sappiamo che $\mathrm{Im}\, L_A$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dalle colonne di A e che una base di $\mathrm{Im}\, L_A$ è data dalle colonne di A corrispondenti ai pivots di una riduzione a scala di A. Sappiamo poi che $\mathrm{Ker} L_A$ è costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$. Riducendo a scala A otteniamo una base di $\mathrm{Im}(L_A)$

$$\{(2, 1, 0, -1), (5, 4, -3, -7)\}$$

Utilizzando la matrice ridotta e risolvendo tramite essa il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ otteniamo anche una base di $\mathrm{Ker}(L_A)$:

$$\{(-4, 1, 0, 3), (-5, 2, 3, 0)\}.$$

Per le equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}(L_A)$ consideriamo la matrice 4×3

$$\left| \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & x_1 \\ 1 & 4 & x_2 \\ 0 & -3 & x_3 \\ -1 & -7 & x_4 \end{array} \right.$$

riduciamo a scala ed imponiamo la compatibilità ed imponiamo compatibilità (vedere le soluzioni del compito del 7/12).

[1] Voi dovete scrivere più dettagli...