Algebra. Laurea in Informatica a.a. 2023-2024

Canale 1.

Esame scritto di prova.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

30 Dicembre 2023

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	6	
4	6	
5	7	
Totale	33	

ATTENZIONE:

- I compiti disordinati o poco leggibili non saranno neanche corretti.
- Spiegare il procedimento ed i calcoli eseguiti, e **giustificare ogni risposta**. La valutazione terrà conto della presentazione: leggibilità, grammatica, sintassi, ordine, chiarezza, capacità di sintesi.
- Una risposta giusta con giustificazione sbagliata viene valutata ≤ 0.
- Scrivete le risposte negli appositi riquadri.
- I fogli di brutta non saranno accettati; consegnare esclusivamente questi fogli.
- Tutti i dispositivi elettronici (smartphones, tablets, PC, etc, etc) devono essere spenti ed in borsa.
- Non sono ammessi libri o appunti ad eccezione di un formulario di una pagina A4.

Esercizio 1 (di teoria). 4 o 5 domande di teoria; 1 o 2 dimostrazioni. Ad esempio:

(1) Definire la funzione φ di Eulero ed enunciare il teorema di Eulero.
(2) ....
(3) ....
(4) ....
(5) ....

Svolgimento.

Esercizio 2.
Determinare le soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} 12387^{8525}x \equiv 1(10) \\ 13x + 7 \equiv 0(12) \end{cases}$$

Soluzione.

Risposta:

Esercizio 3.
Siano H e K due sottogruppi di un gruppo G. Denotiamo con 1_G l'elemento neutro in G. Consideriamo il prodotto diretto $H \times G$ con la sua naturale struttura di gruppo e l'applicazione

$$f : H \times K \ni (h, k) \to hk \in G$$

(1) verificare che f è iniettiva se e solo se $H \cap K = \{1_G\}$ (equivalentemente, f è non-iniettiva se e solo se $H \cap K \neq \{1_G\}$).
(2) verificare che f è un omomorfismo di gruppi se e solo se $\forall h \in H$, $\forall k \in K$ si ha $hk = kh$.

Soluzione.

Esercizio 4.
Si considerino le permutazioni di S_8

$$\alpha := (46) \circ (173) \circ (125), \quad \beta := (87543) \circ (12), \quad \gamma := (123) \circ (864) \circ (87).$$

1. Determinare la decomposizione in cicli *disgiunti* di queste 3 permutazioni.
2. Determinare il segno [1] di ognuna di esse.
3. Stabilire se tra esse ce ne sono due coniugate e, in caso affermativo, trovare una permutazione τ che le coniuga.

Soluzione.

Risposta:

[1] ovvero la parità

Esercizio 5. Sia $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da A.

1. Scrivere l'espressione esplicita di L_A:

$$L_A \left(\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$$

2. Determinare una base di $\mathrm{Im}(L_A)$ e una base di $\mathrm{Ker}(L_A)$.

3. Determinare equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}(L_A)$.

Soluzione.

Risposta:
