Algebra. Laurea in Informatica a.a. 2023-2024

Canale 1. Proff. Paolo Piazza e Gabriele Viaggi

Esame scritto del 9/1/2024. Compito A.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Nome e Cognome: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	6	
3	6	
4	6	
5	8	
Totale	33	

ATTENZIONE:
- Utilizzare il retro della pagina se necessario.
- I compiti disordinati o poco leggibili non saranno neanche corretti.
- Spiegare il procedimento ed i calcoli eseguiti, e **giustificare ogni risposta**. La valutazione terrà conto della presentazione: leggibilità, grammatica, sintassi, ordine, chiarezza, rigore matematico, capacità di sintesi.
- Una risposta giusta con giustificazione sbagliata viene valutata ≤ 0.
- Scrivete le risposte negli appositi riquadri quando presenti.
- I fogli di brutta non saranno accettati; consegnare **esclusivamente** questi fogli.
- Tutti i dispositivi elettronici (smartphones, tablets, PC, etc, etc) devono essere spenti ed in borsa.
- Non sono ammessi libri o appunti ad eccezione di un formulario di una pagina A4 fronte retro (max 35 righe a facciata, no dimostrazioni).

Esercizio 1.

(1) In un anello unitario $(A, +, \cdot)$ definire l'insieme degli elementi invertibili $\mathcal{U}(A)$ e spiegare, *giustificando i passaggi*, qual è la sua struttura algebrica rispetto alla moltiplicazione.

(2) Siano $(G, \cdot)$ e $(H, \star)$ due gruppi, con elementi neutri 1_G e 1_H.
(2.1). Come si definisce il nucleo di un omomorfismo $\psi : G \to H$ e che cosa ha a che fare con l'iniettività di ψ ?
(2.2) Il nucleo di un omomorfismo ψ è un sottogruppo ? Il nucleo di un omomorfismo ψ è un sottogruppo normale ? Spiegare in dettaglio.

(3) Dare la definizione di indipendenza lineare di k vettori $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ in uno spazio vettoriale V.

(4) Sia $T : V \to V$ un'applicazione lineare. Cosa possiamo dire su autovettori associati ad autovalori distinti ? (4.1) Enunciare il risultato.
(4.2) Dimostrarlo.

Esercizio 2. Si trovino tutte le soluzioni intere del sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} x \equiv & 13^{190} & \mod 35 \\ 4x \equiv & 8 & \mod 6 \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia G un gruppo e $H \leq G$ un suo sottogruppo. Verificare che

(1) per ogni fissato $g \in G$ l'insieme $H^g := \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$ è un sottogruppo di G.

(2) H è **isomorfo** a H^g. (Suggerimento: l'applicazione $H \ni h \to g^{-1}hg \in H^g$ può risultare utile).

Esercizio 4.

4.1 Consideriamo il gruppo simmetrico S_3.

(1) Quali sono i possibili ordini dei sottogruppi di S_3 e perché ?

(2) Elencare i 4 sottogruppi non-banali di S_3. Disegnare il diagramma di Hasse (o reticolo) dei sottogruppi di S_3.

(3) Spiegare se esistono sottogruppi ciclici in S_3 ed in caso affermativo esplicitarli.

(4) Spiegare se esistono sottogruppi normali in S_3; in caso affermativo esplicitarli e spiegare perché sono normali.

4.2 Determinare la parità in S_9 di $\sigma := (2345) \circ (35) \circ (479) \circ (218)$. (Attenzione, questa *non* è una decomposizione in cicli disgiunti). Calcolare σ^{-1}.

Esercizio 5. Sia $u \in \mathbb{R}$ e sia $A(u)$ la matrice

$$A(u) := \begin{vmatrix} 1 & u/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & u & 1 \end{vmatrix}$$

Sia $T_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $A(u)$: $T_u := L_{A(u)}$.

5.1. Determinare il polinomio caratteristico di T_u e gli autovalori di T_u.

5.2 Verificare che T_0 è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori.

5.3. Studiare la diagonalizzabilità di T_u al variare di $u \in \mathbb{R}$.