Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21
Prof. P. Piazza
Brevi note sul prodotto scalare in $\mathcal{V}_O$

Introduzione. Il nostro punto di partenza è lo spazio ordinario e le sue proprietà elementari. In una prima approssimazione possiamo pensare allo spazio ordinario come allo spazio fisico circostante. Le sue proprietà elementari nascono dall'esperienza: i concetti geometrici di punto, retta, piano, la loro mutua posizione, la nozione di distanza, angolo etc... nascono da nozioni concrete tratte dalla considerazione dello spazio fisico. Da un punto di vista matematico queste definizioni e queste proprietà elementari (ad esempio *per due punti passa una ed una sola retta*) non possono essere dimostrate sulla base dell'esperienza fisica. Il primo a capire questa difficoltà fu Euclide il quale estrasse alcuni assiomi fondamentali sui quali fondare rigorosamente la geometria. Gli assiomi, insieme alle proprietà che da essi si possono dedurre, formano il complesso della Geometria Euclidea, che è quella che si studia alla scuola media e al liceo. Seguendo la trattazione data da David Hilbert nel suo celebre *Fondamenti della geometria*, gli assiomi della geometria euclidea si possono riassumere in cinque gruppi
1. Assiomi di appartenenza (del tipo *per tre punti non-allineati passa uno ed un solo piano...*).
2. Assiomi di ordine (permettono di fissare un verso su una retta)
3. Assiomi di congruenza (danno la nozione di confronto ed uguaglianza fra segmenti e fra angoli).
4. Assiomi di continuità (quelli dei numeri reali).
5. Assioma delle parellele.
Lo spazio è quindi un *insieme* i cui elementi sono detti *punti* e nel quale sono dati alcuni sottoinsiemi (rette, piani, segmenti...) verificanti questi 5 gruppi di assiomi. A priori ci possono essere varie geometrie euclidee: Hilbert dimostra che due geometrie euclidee differenti sono di fatto equivalenti e possono essere assimilate. Esiste quindi una sola geometria euclidea che è proprio quella che era nella testa di Euclide verso il 300 A.C. **Fine introduzione.**

Supponiamo di avere uno spazio euclideo. Esiste, grazie agli assiomi, un'unità di misura ed ha quindi senso parlare di segmenti di lunghezza 1. Ovviamente se pensiamo allo spazio euclideo come allo spazio fisico circostante, esiste un'unità di misura (il metro depositato a Parigi oppure le sue declinazioni più avanzate che si adottano recentemente).

Sia $\mathcal{V}_O$ lo spazio vettoriale tridimensionale dei segmenti orientati centrati in O. Se $\underline{v}$ è un vettore di $\mathcal{V}_O$, e cioè un segmento orientato, denotiamo con $||\underline{v}||$ la sua lunghezza in quanto segmento.

Prodotto scalare.
Il prodotto scalare di due vettori $\underline{v}$, $\underline{w} \in \mathcal{V}_0$ è per definizione il numero reale:

$$< \underline{v}, \underline{w} >= ||\underline{v}||\, ||\underline{w}|| \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}}\,,$$

dove prendiamo l'angolo convesso fra i due vettori (quindi $\widehat{\underline{v}\underline{w}} \in [0, \pi]$). Si noti che allora

$$||\underline{v}|| = \sqrt{< \underline{v}, \underline{v} >}$$

e che
$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{<\underline{v},\underline{w}>}{\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|}$$
se $\underline{v} \neq \underline{0}, \underline{w} \neq \underline{0}$.
In particolare
$$\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow <\underline{v},\underline{w}>= 0\,.$$
Il prodotto scalare deve essere pensato come ad un'applicazione
$$\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \to \mathbb{R}$$
e come tale gode delle seguenti proprietà:
(i) è simmetrico: $<\underline{v},\underline{w}>=<\underline{w},\underline{v}>\ \forall \underline{v},\underline{w} \in \mathcal{V}_O$;
(ii) è lineare in entrambi gli argomenti (*bilineare*):
$$<\lambda\underline{v} + \lambda'\underline{v}',\underline{w}>= \lambda <\underline{v},\underline{w}> +\lambda' <\underline{v}',\underline{w}>$$
$$<\underline{v},\lambda\underline{w} + \lambda'\underline{w}'>= \lambda <\underline{v},\underline{w}> +\lambda' <\underline{v},\underline{w}'>$$
per ogni $\underline{v},\underline{v}',\underline{w},\underline{w}' \in \mathcal{V}_O$ e per ogni $\lambda,\lambda' \in \mathbb{R}$
(iii) $<\underline{v},\underline{v}>\geq 0\ \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_O$ ed è $= 0$ se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$
La dimostrazione di (i) e (iii) è ovvia. Omettiamo la dimostrazione di (ii).

Notiamo anche che vale in maniera ovvia [1]
$$| <\underline{v},\underline{w}> | \leq \|\underline{v}\|\|\underline{w}\|$$
e l'uguaglianza vale se e solo se i vettori sono proporzionali e cioè linearmente dipendenti.

Prodotto scalare in coordinate.
Una base è detta *ortonormale* se i vettori della base hanno lunghezza unitaria e sono a due a due ortogonali. Fissiamo una tale base. Denotiamo tale base con $\mathcal{B} := \{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}$; siano (x, y, z) le coordinate associate.

Possiamo verificare facilmente che se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora

(1) $$<\underline{v},\underline{w}>= xx' + yy' + zz'\,.$$

Questa è l'espressione del prodotto scalare nelle coordinate associate alla base ortonormale.
Per dimostrare questa formula basterà scrivere
$$<\underline{v},\underline{w}>=< x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}, x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}>,$$
applicare ripetutamente la bilinearità ed utilizzare la traduzione in formule della condizione di ortonormalità per la base $\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}$, e cioè :

(2) $$\begin{array}{lll} <\underline{i},\underline{j}>= 0\,, & <\underline{i},\underline{k}>= 0\,, & <\underline{j},\underline{k}>= 0 \\ <\underline{i},\underline{i}>= 1\,, & <\underline{j},\underline{j}>= 1\,, & <\underline{k},\underline{k}>= 1 \end{array}$$

In particolare, dalla (1) segue che
$$||\underline{v}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
e
$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{(xx' + yy' + zz')}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}$$

[1] $|\cos\theta| \leq 1\,,\quad \forall\theta$

Quindi, se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora

(3) $$\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0\,.$$

Osserviamo che se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ allora

$$x =< \underline{v}, \underline{i} >, \quad y =< \underline{v}, \underline{j} >, \quad z =< \underline{v}, \underline{k} > \ .$$

Questa formula si ottiene prendendo il prodotto scalare di $\underline{v}$, e cioè di $x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$, con i tre vettori della base ortonormale ed utilizzando (2); per ogni vettore $\underline{v}$ vale quindi l'identità

(4) $$\underline{v} =< \underline{v}, \underline{i} > \underline{i}+ < \underline{v}, \underline{j} > \underline{j}+ < \underline{v}, \underline{k} > \underline{k}$$

Un vettore di lunghezza unitaria è detto un *versore*: se $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora $\underline{v}/\|\underline{v}\|$ è un versore. In particolare se $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$ allora r è generata da due versori

$$\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}, \quad \text{e} \quad -\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}$$

Notiamo che se $\underline{r}$ è un *versore* allora

$$\begin{aligned} \underline{r} &=< \underline{r}, \underline{i} > \underline{i}+ < \underline{r}, \underline{j} > \underline{j}+ < \underline{r}, \underline{k} > \underline{k} \\ &= (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{i}})\underline{i} + (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{j}})\underline{j} + (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{k}})\underline{k} \end{aligned}$$

e scopriamo quindi che le coordinate di un *versore* non sono altro che i coseni degli angoli che tale versore forma con i vettori della base. Per questa ragione si dà il nome di *coseni direttori* alle coordinate di un versore.

È chiaro che se fissiamo una qualsiasi base, non necessariamente ortonormale, allora possiamo ancora scrivere l'espressione in coordinate del prodotto scalare, ma l'espressione sarà più complicata di quella trovata in (1). Più precisamente: sia $\mathcal{C} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ una qualsiasi base con coordinate (x_1, x_2, x_3); consideriamo $\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + x_3\underline{v}_3$ e $\underline{w} = y_1\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2 + y_3\underline{v}_3$; se definiamo

$$A_{\mathcal{C}} := (a_{i\,j})$$

con

$$a_{i\,j} =< \underline{v}_j, \underline{v}_i >$$

allora non è difficile dimostrare che

$$< \underline{v}, \underline{w} >= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \equiv \underline{y}^T \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot \underline{x}$$

Se $\mathcal{C}$ è ortonormale allora, dalla definizione, segue che $A_{\mathcal{C}} = I_3$, la matrice identità 3×3, e troviamo

$$< \underline{v}, \underline{w} >= \underline{y}^T \cdot \underline{x}$$

che è precisamente (1).

Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Se $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ è una qualsiasi base di $\mathcal{V}_O$ allora la sua base *ortogonalizzata* secondo il procedimento di Gram-Schmidt è la base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ con

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \underline{w}_1 \\ \underline{u}_2 &= \underline{w}_2 - \frac{< \underline{w}_2, \underline{u}_1 >}{< \underline{u}_1, \underline{u}_1 >}\underline{u}_1 \\ \underline{u}_3 &= \underline{w}_3 - \frac{< \underline{w}_3, \underline{u}_1 >}{< \underline{u}_1, \underline{u}_1 >}\underline{u}_1 - \frac{< \underline{w}_3, \underline{u}_2 >}{< \underline{u}_2, \underline{u}_2 >}\underline{u}_2 \end{aligned}$$

Si dimostra in maniera diretta che i tre vettori $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ sono una base *ortogonale* ed hanno l'ulteriore proprietà che $\mathrm{Span}(\underline{w}_1) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3) = \mathcal{V}_O = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$. Una base *ortonormalizzata* è

$$\{\frac{1}{||\underline{u}_1||}\underline{u}_1, \frac{1}{||\underline{u}_2||}\underline{u}_2, \frac{1}{||\underline{u}_3||}\underline{u}_3\}\,.$$

Condizione di ortogonalità fra retta e piano.
Sia π un piano di $\mathcal{V}_O$ di equazione cartesiana $ax+by+cz = 0$ nelle coordinate (x, y, z) associate alla base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$. Un generatore per la retta ortogonale a π è dato da $\underline{n} := (a, b, c)$. Infatti: $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \pi \Leftrightarrow av_x + bv_y + cv_z = 0 \Leftrightarrow\ < \underline{n}, \underline{v} >= 0 \Leftrightarrow \underline{v} \perp \underline{n}$. Quindi (l, m, n) è ortogonale a $ax + by + cz = 0$ se e solo se (l, m, n) è proporzionale a (a, b, c).

Equazioni cartesiane. Il ragionamento fatto dell'ultimo paragrafo dimostra che l'equazione cartesiana del piano ortogonale alla retta $\mathbb{R}(\ell, m, n)$ è $\ell x+my+nz = 0$. Le equazioni cartesiane della retta ortogonale ad un piano π dato tramite una sua base, $\pi = \mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$, con $\underline{v}$ di coordinate (v_1, v_2, v_3) e $\underline{w}$ di coordinate (w_1, w_2, w_3), si ottengono immediatamente dal seguente ragionamento:
un vettore di coordinate (x, y, z) è ortogonale al piano se e solo se, per definizione, è ortogonale ad ogni vettore del piano; ma ciò accade se e solo se (per linearità) esso è ortogonale ai vettori di una base del piano e quindi se e solo se

$$\begin{cases} xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0 \\ xw_1 + yw_2 + zw_3 = 0 \end{cases}$$

Queste sono equazioni cartesiane della retta ortogonale al piano $\pi = \mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$.

Orientazione di $\mathcal{V}_O$.
Due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{V}_O$ sono dette equiorientate se il determinante della matrice del cambiamento di base è positivo. In tal caso diremo che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ definiscono la stessa orientazione in $\mathcal{V}_O$; diremo che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ definiscono orientazioni opposte di $\mathcal{V}_O$ se il determinante della matrice del cambiamento di base è negativo. Un'orientazione di $\mathcal{V}_O$ è quindi fissata, per definizione, dalla scelta di una base e, di conseguenza, di tutte le basi equiorientate con tale base. È ovvio che $\mathcal{V}_O$ ha due orientazioni.

Prodotto vettoriale. Fissiamo un'orientazione in $\mathcal{V}_O$, ad esempio tramite la scelta di una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$: rimane allora definito un prodotto fra vettori

$$\mathcal{V}_O \times \mathcal{V}_O \ni (\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \underline{v} \wedge \underline{w} \in \mathcal{V}_O$$

che viene chiamato *prodotto vettoriale* (e viene anche denotato con $\times$). Per definizione $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è il vettore di $\mathcal{V}_O$ univocamente caratterizzato dalle tre seguenti proprietà:

(i) la lunghezza del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è uguale a $||\underline{v}||||\underline{w}|| \sin \widehat{\underline{v}\underline{w}}$ che è anche l'area del parallelogramma definito da $\underline{v}, \underline{w}$. Notiamo che $\underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{0}$ se i due vettori sono paralleli oppure se uno di essi è il vettore nullo.

(ii) se i due vettori sono non-nulli e *non* sono paralleli, allora la direzione del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è quella ortogonale al piano $\mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$.

(iii) se i due vettori sono non-nulli e *non* sono paralleli, allora il verso del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è quello per cui la base $\{\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}\}$ è equiorientata alla base che definisce l'orientazione di $\mathcal{V}_O$.

In Fisica si usa fissare un'orientazione di $\mathcal{V}_O$ tramite la mano sinistra o la mano destra facendo corrispondere $\underline{i}$ al dito medio, $\underline{j}$ all'indice ,$\underline{k}$ al pollice. Le due mani definiscono effettivamente le due orientazioni di $\mathcal{V}_O$ dato che hanno gli ultimi due vettori della base coincidenti ma il primo vettore, invece, con verso opposto. Se fissiamo ad esempio l'orientazione della mano sinistra allora il verso del prodotto vettoriale è quello del pollice se facciamo coincidere $\underline{v}$ al dito medio e $\underline{w}$ al dito indice (ovviamente della mano sinistra) .

Proposizione 5. Il prodotto vettoriale gode delle seguenti propietà:

- $\underline{v} \wedge \underline{w} = -\underline{w} \wedge \underline{v}$
- $(\lambda \underline{v}) \wedge \underline{w} = \lambda(\underline{v} \wedge \underline{w}) = \underline{v} \wedge (\lambda \underline{w})$
- $(\underline{v} + \underline{v}') \wedge \underline{w} = \underline{v} \wedge \underline{w} + \underline{v}' \wedge \underline{w}$
- $\underline{v} \wedge (\underline{w} + \underline{w}') = \underline{v} \wedge \underline{w} + \underline{v} \wedge \underline{w}$
- se $\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$ e $\underline{w} = w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k}$ allora

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & v_1 & w_1 \\ \underline{j} & v_2 & w_2 \\ \underline{k} & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

(a destra sviluppiamo formalmente con Laplace secondo la prima colonna).

Dimostrazione. Il primo punto (antisimmetria) si ottiene ragionando sulle orientazioni. La dimostrazione della bilinearità è omessa. La formula per il prodotto vettoriale segue dall'antisimmetria e dalla bilinearità: si scrive $(v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}) \wedge (w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k})$, si sviluppa utilizzando la bilinearità e si utilizzano le seguenti relazioni, conseguenza diretta della definizione:

$$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}\,, \quad \underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}\,, \quad \underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}\,.$$

È bene notare che il prodotto vettoriale *non* è associativo: ad esempio $\underline{i} \wedge (\underline{j} \wedge \underline{j})$ è uguale a $\underline{i} \wedge \underline{0}$ che è uguale a $\underline{0}$, mentre $(\underline{i} \wedge \underline{j}) \wedge \underline{j} = \underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$ come subito si verifica utilizzando l'ultima formula nella Proposizione 5.