Algebra. Corso di Laurea in Informatica. Prof. P. Piazza. a.a. 2023-24.

Matrice associata ad un'applicazione lineare.

Siano V e W due spazi vettoriali e sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$.
Fissiamo una base $\mathcal{B}$ per V ed una base $\mathcal{E}$ per W. Scriviamo per esteso $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ e $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m\}$ [1]

Definizione. La matrice associata a T con scelta di basi

$$\mathcal{B} = \text{base di partenza}; \quad \mathcal{E} = \text{base di arrivo}$$

è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T(\underline{b}_j)$ nella base $\mathcal{E}$. È una matrice di m righe e n colonne e dipende, ovviamente, dalla scelta delle 2 basi.

Denotiamo la matrice associata a T con questa scelta di basi

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)\,.$$

Memorizzate a questo punto la posizione delle due basi: la base a *sinistra* in $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$ è la base di *arrivo* e cioè la base dello spazio vettoriale che si trova a destra della notazione $T : V \to W$; la base a *destra* è la base di *partenza* e cioè la base dello spazio vettoriale che si trova a sinistra della notazione $T : V \to W$. Detto diversamente, la posizione delle due basi nella notazione $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$ è *opposta* a quella che compare in $T : V \to W$. Vedremo fra poco il perché di questa scelta.

Una volta che le basi $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{E}$ sono fissate, possiamo riguardare $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\quad)$ come un'applicazione dall'insieme delle applicazioni lineari tra V e W e l'insieme delle matrici $m \times n$:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\ )\colon \mathcal{L}(V,W) \to M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{K})$$
$$T \longrightarrow M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$$

Sappiamo che questi due insiemi hanno ognuno un'ulteriore struttura: sono spazi vettoriali.

Teorema. *L'applicazione*

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\ ) : \mathcal{L}(V,W) \to M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{K})$$

è **lineare** *ed è un* **isomorfismo di spazi vettoriali.**
Omettiamo la dimostrazione.

Se $\underline{x}$ sono le coordinate di $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$ e se $\underline{y}$ sono le coordinate di $T(\underline{v})$ nella base $\mathcal{E}$ allora si ha

$$T(\underline{v}) = T(x_1\underline{b}_1 + \cdots + x_n\underline{b}_n) = x_1T(\underline{b}_1) + \cdots x_nT(\underline{b}_n)$$

A sinistra, per definizione, c'è il vettore

$$y_1\underline{e}_1 + \cdots y_m\underline{e}_m\,.$$

Poniamo per semplicità di notazione $A := M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$; allora a destra, per definizione di matrice associata a T nelle basi scelte, c'è il vettore

$$x_1(a_{11}\underline{e}_1 + \cdots + a_{m1}\underline{e}_m) + \cdots + \cdots + x_n(a_{1n}\underline{e}_1 + \cdots + a_{mn}\underline{e}_m)$$

[1] stessa notazione della base canonica di $\mathbb{K}^m$ ma questa invece è un'arbitraria base di W...

e facendo qualche semplice conto otteniamo, a destra,

$$(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\underline{e}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)\underline{e}_m$$

Ma le coordinate sono univocamente determinate, e quindi

$$y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \ , \quad \cdots \quad y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$$

Quindi, scritto diversamente,

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{vmatrix}$$

Ma

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

Concludiamo che si ha $\underline{y} = A \cdot \underline{x}$ dove a destra c'è il prodotto righe per colonne di A con la colonna $n \times 1$ data da $\underline{x}$. Quindi, riassumendo,

Proposizione. *Se $\underline{x}$ sono le coordinate di $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$ e se $\underline{y}$ sono le coordinate di $T(\underline{v})$ nella base $\mathcal{E}$ allora*

$$\underline{y} = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \cdot \underline{x}. \tag{1}$$

Nel caso particolare in cui $V = W$, possiamo considerare l'applicazione lineare identità $\mathrm{Id}_V : V \to V$: $\mathrm{Id}_V(\underline{v}) = \underline{v}$.
Date due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V, avremo una matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ che rappresenta l'identità di V rispetto a queste due basi. Osserviamo che, per definizione, la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\mathrm{Id}_V(\underline{b}'_j)$, e cioè di $\underline{b}'_j$, nella base $\mathcal{B}$. La matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ è per definizione la *matrice del cambiamento di <u>base</u>, dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$.*
Siano $\underline{x}$ le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e siano $\underline{x}'$ le coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$.
Da (1) abbiamo

$$\underline{x} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)\underline{x}' \tag{2}$$

e quindi $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ trasforma le coordinate nella base $\mathcal{B}'$ nelle coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Alcuni testi [2], sulla base di (2), chiamano $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ la *matrice del cambiamento di <u>coordinate</u>, dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$.*
Analogamente,

$$\underline{x}' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)\underline{x}\,. \tag{3}$$

e quindi $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$ trasforma le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ nelle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$.

---

[2]ad esempio, l'ottimo *Geometria 1* di Edoardo Sernesi

Composizione di applicazioni.
Gli isomorfismi $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ godono di un'importante proprietà rispetto alla composizione:
Proposizione. Se V, W ed U sono tre spazi vettoriali dotati di basi $\mathcal{B}, \mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ rispettivamente, e $T\colon V \to W$ e $S\colon W \to U$ sono applicazioni lineari allora

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(S \circ T) = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \tag{4}$$

dove a destra compare il prodotto righe per colonne.
N.B.: le due basi al centro si "elidono" [3].

Dimostrazione. Siano $\underline{z}$ le coordinate associate alla base $\mathcal{F}$. Sappiamo che

$$\underline{y} = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \cdot \underline{x}\,, \quad \underline{z} = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot \underline{y}\,.$$

Quindi sostituendo la prima nella seconda, abbiamo:

$$\underline{z} = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \cdot \underline{x}\,.$$

D'altra parte, per definizione,

$$\underline{z} = M_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(S \circ T) \cdot \underline{x}\,.$$

Ne deduciamo che

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(S \circ T) \cdot \underline{x} = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \cdot \underline{x}$$

e questo vale $\forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$. Ma allora

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(S \circ T) = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$$

dove abbiamo utilizzato il fatto generale, ben noto [4], che

$$B \cdot \underline{x} = C \cdot \underline{x} \ \ \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n \text{ se e solo se } B = C\,.$$

La Proposizione è dimostrata.

Iterando la formula (4), si ottiene la formula per la composizione di un numero arbitrario di applicazioni lineari. Ad esempio se $F\colon U \to Z$ è un'ulteriore applicazione lineare, e $\mathcal{G}$ è una base di Z, allora

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}(F \circ S \circ T) &= M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}\big((F \circ (S \circ T)\big) \\ &= M_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(F) \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(S \circ T) \\ &= M_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(F) \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \end{aligned}$$

Notare che continua a valere l'elisione delle basi al centro.

Un'applicazione particolare della formula composizione/prodotto riguarda la matrice associata all'applicazione inversa di un'applicazione invertibile $\varphi\colon V \to W$. Sia $n = \dim V = \dim W$. Abbiamo

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi^{-1} \circ \varphi) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_n$$

L'ultima identità esprime il fatto che la matrice corrispondente all'applicazione identica $\mathrm{Id}_V : V \to V$, rispetto ad una stessa base $\mathcal{B}$, scelta sia come base di partenza che di arrivo, è la matrice identità di rango $\dim V$ (segue immediatamente dalla definizione). Analogamente otteniamo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\varphi \circ \varphi^{-1}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_W) = \mathrm{Id}_n$$

---

[3] È per ottenere questa elisione che si scambia la posizione delle basi nella notazione di $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$.
[4] Proposizione 5.4 in [A-dF]

Otteniamo così la formula

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) = (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi))^{-1}$$

In particolare, per l'applicazione identica $\mathrm{Id}_V : V \to V$, che ha come inversa se stessa, $\mathrm{Id}_V^{-1} = \mathrm{Id}_V$, otteniamo la relazione

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V))^{-1} \tag{5}$$

Scriveremo spesso $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)^{-1}$ per $(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V))^{-1}$. Riassumendo:

Proposizione. La matrice del cambiamento di base, da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è l'inversa della matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Un corollario immediato di quanto appena visto è la formula che lega le matrici che rappresentano un endomorfismo $T\colon V \to V$ rispetto a basi diverse $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ (scelte ogni volta sia come basi di partenza che come basi di arrivo). Si ha, ad esempio,

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V \circ T \circ \mathrm{Id}_V) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) \cdot (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V))^{-1} \end{aligned}$$

Quindi:

Proposizione. Se $T : V \to V$ è un endomorfismo e $\mathcal{B}$ è una base di V allora

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) \cdot (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V))^{-1}$$

Analogamente, con passaggi del tutto simili dimostriamo:

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V))^{-1} \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$$

Definizione. La matrice $A' \in M_{nn}(\mathbb{K})$ è **simile** alla matrice A se esiste B invertibile tale che

$$A' = B^{-1} \cdot A \cdot B\,.$$

Notiamo che se A' è simile ad A allora A è simile ad A'; infatti moltiplicando l'ultima uguaglianza a sinistra per B e a destra per B^{-1} otteniamo

$$B \cdot A' \cdot B^{-1} = A$$

che riscriviamo come

$$A = (B^{-1})^{-1} \cdot A' \cdot B^{-1} = C^{-1} \cdot A' \cdot C$$

con $C = B^{-1}$. Quindi "essere simili" è una relazione *simmetrica*.[5]

Notiamo anche che abbiamo dimostrato la seguente

Proposizione. Se $T : V \to V$ è un endomorfismo allora le matrici associate a T in due basi diverse sono simili.

Consideriamo ora un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali diversi, $T : V \to W$. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ in partenza e una base $\mathcal{E}$ in arrivo.
Fissiamo un'altra base $\mathcal{B}'$ in partenza e una base $\mathcal{E}'$ in arrivo.
Vogliamo confrontare

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{E}',\mathcal{B}'}(T)$$

[5]Non è difficile verificare che è anche una relazione riflessiva e transitiva; essa è quindi una relazione di equivalenza.

Dalla formula per la composizione abbiamo

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{E}',\mathcal{B}'}(T) &\equiv M_{\mathcal{E}',\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_W \circ T \circ \mathrm{Id}_V) \\ &= M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_W) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V) \\ &= M_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}_W)^{-1} \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V) \end{aligned}$$

[6]

[6] Questa è la formula (8.4) in Abate-deFabritiis,

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot B,$$

con

$$A' = M_{\mathcal{E}',\mathcal{B}'}(T)\,, \quad A = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)\,, \;\; C = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}_W)\,, \quad B = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)\,.$$