Algebra. Corso di Laurea in Informatica. Prof. P. Piazza. a.a. 2023-24.

Matrice associata ad un'applicazione lineare.

Siano V e W due spazi vettoriali e sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$.
Fissiamo una base $\mathcal{B}$ per V ed una base $\mathcal{E}$ per W. Scriviamo per esteso $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ e $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m\}$ [1]

Definizione. La matrice associata a T con scelta di basi

$$\mathcal{B} = \text{base di partenza}; \quad \mathcal{E} = \text{base di arrivo}$$

è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T(\underline{b}_j)$ nella base $\mathcal{E}$. È una matrice di m righe e n colonne e dipende, ovviamente, dalla scelta delle 2 basi.

Denotiamo la matrice associata a T con questa scelta di basi

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)\,.$$

Memorizzate a questo punto la posizione delle due basi: la base a *sinistra* in $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$ è la base di *arrivo* e cioè la base dello spazio vettoriale che si trova a destra della notazione $T : V \to W$; la base a *destra* è la base di *partenza* e cioè la base dello spazio vettoriale che si trova a sinistra della notazione $T : V \to W$. Detto diversamente, la posizione delle due basi nella notazione $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$ è *opposta* a quella che compare in $T : V \to W$. Vedremo fra poco il perché di questa scelta.

Una volta che le basi $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{E}$ sono fissate, possiamo riguardare $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\quad)$ come un'applicazione dall'insieme delle applicazioni lineari tra V e W e l'insieme delle matrici $m \times n$:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\ )\colon \mathcal{L}(V,W) \to M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{K})$$
$$T \longrightarrow M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$$

Sappiamo che questi due insiemi hanno ognuno un'ulteriore struttura: sono spazi vettoriali.

Teorema. *L'applicazione*

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\ ) : \mathcal{L}(V,W) \to M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{K})$$

è **lineare** *ed è un* **isomorfismo di spazi vettoriali.**
Omettiamo la dimostrazione.

Se $\underline{x}$ sono le coordinate di $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$ e se $\underline{y}$ sono le coordinate di $T(\underline{v})$ nella base $\mathcal{E}$ allora si ha

$$T(\underline{v}) = T(x_1\underline{b}_1 + \cdots + x_n\underline{b}_n) = x_1T(\underline{b}_1) + \cdots x_nT(\underline{b}_n)$$

A sinistra, per definizione, c'è il vettore

$$y_1\underline{e}_1 + \cdots y_m\underline{e}_m\,.$$

Poniamo per semplicità di notazione $A := M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$; allora a destra, per definizione di matrice associata a T nelle basi scelte, c'è il vettore

$$x_1(a_{11}\underline{e}_1 + \cdots + a_{m1}\underline{e}_m) + \cdots + \cdots + x_n(a_{1n}\underline{e}_1 + \cdots + a_{mn}\underline{e}_m)$$

[1] stessa notazione della base canonica di $\mathbb{K}^m$ ma questa invece è un'arbitraria base di W...

e facendo qualche semplice conto otteniamo, a destra,

$$(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\underline{e}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)\underline{e}_m$$

Ma le coordinate sono univocamente determinate, e quindi

$$y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \ , \quad \cdots \quad y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$$

Quindi, scritto diversamente,

$$\left|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right|$$

Ma

$$\left|\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right|$$

Concludiamo che si ha $\underline{y} = A \cdot \underline{x}$ dove a destra c'è il prodotto righe per colonne di A con la colonna $n \times 1$ data da $\underline{x}$. Quindi, riassumendo,

Proposizione. *Se $\underline{x}$ sono le coordinate di $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$ e se $\underline{y}$ sono le coordinate di $T(\underline{v})$ nella base $\mathcal{E}$ allora*

$$\underline{y} = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \cdot \underline{x}. \tag{1}$$

Nel caso particolare in cui $V = W$, possiamo considerare l'applicazione lineare identità $\mathrm{Id}_V : V \to V$: $\mathrm{Id}_V(\underline{v}) = \underline{v}$.
Date due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V, avremo una matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ che rappresenta l'identità di V rispetto a queste due basi. Osserviamo che, per definizione, la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\mathrm{Id}_V(\underline{b}'_j)$, e cioè di $\underline{b}'_j$, nella base $\mathcal{B}$. La matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ è per definizione la *matrice del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$.*
Siano $\underline{x}$ le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e siano $\underline{x}'$ le coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$.
Da (1) abbiamo

$$\underline{x} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)\underline{x}' \tag{2}$$

e quindi $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ trasforma le coordinate nella base $\mathcal{B}'$ nelle coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Alcuni testi [2], sulla base di (2), chiamano $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ la *matrice del cambiamento di coordinate, dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$.*
Analogamente,

$$\underline{x}' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)\underline{x}\,. \tag{3}$$

e quindi $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$ trasforma le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ nelle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$.

[2]ad esempio, l'ottimo *Geometria 1* di Edoardo Sernesi