Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2020-21.
Prof. P. Piazza
Note sul teorema spettrale.

Sia V uno spazio vettoriale reale e supponiamo che sia definito in V un prodotto scalare definito positivo $<\,,\,>$. La coppia $(V, <\,,\,>)$ è, per definizone, uno spazio vettoriale metrico.

Definizione. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Diremo che T è simmetrico se

$$< T\underline{v}, \underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} > \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

Esempio 1. Sia $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico che denotiamo qui $\bullet$. Quindi, per definizione,

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = \underline{y}^T \cdot \underline{x}$$

dove a destra dell'uguaglianza c'è il prodotto righe per colonne. Osserviamo che

$$\underline{x} \bullet \underline{y} := \underline{y}^T \cdot \underline{x} = \underline{x}^T \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n .$$

Sia A una matrice simmetrica. Allora $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un operatore simmetrico. Infatti

$$L_A \underline{x} \bullet \underline{y} = \underline{y}^T \cdot (L_A \underline{x}) = \underline{y}^T \cdot (A \cdot \underline{x}) = (\underline{y}^T \cdot A) \cdot \underline{x} = (A \cdot \underline{y})^T \cdot \underline{x} = \underline{x} \bullet L_A \underline{y}$$

dove nella terza uguaglianza abbiamo applicato l'associatività e nella quarta uguaglianza abbiamo applicato la nota formula $(C \cdot D)^T = D^T \cdot C^T$ e l'ipotesi $A = A^T$.

Torniamo al caso generale di uno spazio vettoriale metrico $(V, <\,,\,>)$ di dimensione finita uguale ad n.

Proposizione. *T è simmetrico se e solo se la matrice associata a T in una base ortonormale, A, è simmetrica.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ la nostra base ortonormale. Stiamo scegliendo questa base come base di partenza e base di arrivo. Quindi

$$A := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) .$$

T simmetrico vuol dire che $< T\underline{v}, \underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} > \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, che è equivalente a richiedere che

$$A\underline{x} \bullet \underline{y} = \underline{x} \bullet A\underline{y} \;\; \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n . \tag{1}$$

Infatti la base $\mathcal{B}$ è ortonormale e quindi, in generale, $< \underline{u}, \underline{u}' >= \underline{x}' \bullet \underline{x}$ se $\underline{u}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{u}'$ ha coordinate $\underline{x}'$, come si evince facilmente scrivendo

$$< \underline{u}, \underline{u}' >=< x_1 \underline{v}_1 + \cdots + x_n \underline{v}_n, x'_1 \underline{v}_1 + \cdots + x'_n \underline{v}_n >= x_1 x'_1 + \cdots + x_n x'_n .$$

Ma a sinistra di (1) c' è $(A\underline{x})^T \underline{y}$ che è anche uguale a $\underline{x}^T A^T \underline{y}$, e a destra c'è $\underline{x}^T A \underline{y}$. Quindi T è simmetrico se e solo

$$\underline{x}^T A^T \underline{y} = \underline{x}^T A \underline{y} \;\; \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

e questo è vero se e solo se $A = A^T$. Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la seguente

Osservazione. Se A e B sono due matrici in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, allora

$$\underline{y}^T A \underline{x} = \underline{y}^T B \underline{x} \;\; \forall \underline{x}, \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad A = B .$$

In una direzione ($\Leftarrow$) è ovvio; per l'altra basta scegliere $\underline{y} = \underline{e}_j$ e $\underline{x} = \underline{e}_k$, con $\underline{e}_i$ l' i-mo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Con questa particolare scelta è facile verificare che $\underline{y}^T A\underline{x}$ dà il coefficiente al posto (jk) della matrice A; dall'uguaglianza $\underline{x}^T A\underline{y} = \underline{x}^T B\underline{y}$ possiamo concludere che A e B hanno i coefficienti al posto (jk) uguali; dato che k e j erano arbitrari, possiamo concludere che le matrici sono uguali, $A = B$. **Fine osservazione.**

Sappiano che per un operatore lineare $T : V \to V$ autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Per gli operatori simmetrici si ha una proprietà più forte:

Proposizione 2. *Sia T simmetrico. Allora autovettori associati ad autovalori distinti sono* **ortogonali**.

Dimostrazione. Siano λ e μ due autovalori, con $\lambda \neq \mu$. Quindi uno dei due autovalori è diverso da zero, sia esso λ. Siano $\underline{v}_\lambda$ e $\underline{v}_\mu$ due autovettori associati rispettivamente a λ e μ. Allora si ha

$$\langle \underline{v}_\lambda, \underline{v}_\mu \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \lambda\underline{v}_\lambda, \underline{v}_\mu \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle T(\underline{v}_\lambda), \underline{v}_\mu \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \underline{v}_\lambda, T(\underline{v}_\mu) \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \underline{v}_\lambda, \mu\underline{v}_\mu \rangle = \frac{\mu}{\lambda}\langle \underline{v}_\lambda, \underline{v}_\mu \rangle$$

e quindi

$$(1 - \frac{\mu}{\lambda})\langle \underline{v}_\lambda, \underline{v}_\mu \rangle = 0\,.$$

Dato che per ipotesi $(1 - \frac{\mu}{\lambda}) \neq 0$ deve essere $\langle \underline{v}_\lambda, \underline{v}_\mu \rangle = 0$.

Teorema spettrale per operatori simmetrici.
Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione finita. Sia $T : V \to V$ un operatore simmetrico. Allora esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di T.

Dimostrazione. Per induzione su $n = \dim V$. Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vero il teorema per spazi vettoriali euclidei di dimensione $n - 1$ e dimostriamolo per quelli di dimensione n.
Fissiamo una qualsiasi base ortonormale di V; abbiamo visto (Proposizione 1) che la matrice associata a T in questa base è simmetrica. Vale il seguente

Lemma. *Le radici del polinomio caratteristico associato ad una matrice reale simmetrica A sono tutte reali.*

Dimostreremo fra poco questo Lemma; per ora lo assumiamo come vero e lo applichiamo al polinomio caratteristico di T, scritto rispetto alla base ortonormale fissata. Sappiamo dal Lemma che esiste un autovalore reale, sia esso λ; sia $\underline{e}_1$ un autovettore associato a tale autovalore. Possiamo assumere che $||\underline{e}_1|| = 1$ perché se cosi' non fosse possiamo sempre normalizzare l'autovettore (ottenendo nuovamente un autovettore, perché gli autospazi sono, appunto, sottospazi). Consideriamo ora $W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. *Osservazione fondamentale:* il sottospazio W è invariante per T; questo vuol dire, per definizione, che $T(W)$ è contenuto in W. [1]. Dimostriamo questa proprietà fondamentale:
sia $\underline{w} \in W$; dobbiamo verificare che $T\underline{w} \in W$ e cioè che $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >= 0$; ma $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >=< \underline{w}, T\underline{e}_1 >$ per l'ipotesi che T è simmetrico e $T\underline{e}_1 = \lambda\underline{e}_1$ perché $\underline{e}_1$ è un autovettore associato a λ; quindi, per bilinearità, $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >= \lambda < \underline{w}, \underline{e}_1 >$

[1] Questa è una proprietà particolare del sottospazio; in generale l'immagine tramite T di un sottospazio W è un sottospazio diverso da W (pensate ad una rotazione T di $\pi/2$ in $\mathbb{R}^2$ e a W uguale a una qualsiasi retta)

che è uguale a zero dato che $\underline{w} \in W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. Quindi W è invariante. Ha senso quindi considerare la restrizione di T a questo sottospazio

$$T|_W : W \to W\,;$$

questo è quindi un endomorfismo dello spazio vettoriale W ed è bene notare che W ha dimensione $n-1$ con $n = \dim V$. Il prodotto scalare $<\,,\,>$ definisce per restrizione un'applicazione $W \times W \to \mathbb{R}$ che è ovviamente ancora bilineare, simmetrica e definita positiva. W è quindi esso stesso uno spazio vettoriale con prodotto scalare definito positivo, cioè uno spazio vettoriale metrico [2]; l'operatore $T|_W : W \to W$ è ovviamente simmetrico rispetto a questo prodotto scalare in W [3]. Ma W ha dimensione $n-1$ e quindi, per ipotesi induttiva, W ammette una base ortonormale $\underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ costituita da autovettori per $T|_W$; è ora chiaro che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ è una base ortonormale di V costituita da autovettori per T. Il teorema è dimostrato.

Dimostrazione del Lemma. Consideriamo $P_A(\lambda)$, un polinomio di grado n in λ a coefficienti reali. Per il teorema fondamentale dell'algebra $P_A(\lambda)$ ammette n radici complesse contate con la loro molteplicità. Sia λ una tale radice complessa; dobbiamo dimostrare che $\lambda \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, che λ coincide con il suo complesso coniugato, in formule $\lambda = \overline{\lambda}$. Consideriamo $L_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, l'operatore lineare che manda $\underline{z}$ in $A\underline{z}$. Il polinomio caratteristico di questo endomorfismo è ovviamente ancora $P_A(\lambda)$. Sappiamo allora che esiste un autovettore $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{\zeta} \neq \underline{0}$, associato alla radice λ (perché λ è un autovalore per $L_A^{\mathbb{C}}$). Quindi $L_A^{\mathbb{C}}\underline{\zeta} = \lambda\underline{\zeta}$ che riscriviamo esplicitamente come

$$A \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right| = \lambda \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right| \tag{2}$$

Prendiamo ora il complesso coniugato di ambo i membri; dato che A è reale otteniamo

$$A \left| \begin{matrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{matrix} \right| = \overline{\lambda} \left| \begin{matrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{matrix} \right| \tag{3}$$

Consideriamo ora lo scalare

$$\left| \begin{matrix} \overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \ldots & \overline{\zeta_n} \end{matrix} \right| A \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right| \tag{4}$$

[2] ciò è vero per ogni sottospazio di V

[3] la formula $< T\underline{v}\,\underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} >$ è verificata *per ogni* $\underline{v}, \underline{w} \in V$, in particolare per i vettori di W !

e riscriviamolo in due modi diversi utilizzando l'associatività del prodotto righe per colonne. Primo modo: utilizziamo (2) e riscriviamo (4) come

$$
\begin{aligned}
\left| \overline{\zeta_1} \quad \overline{\zeta_2} \quad \dots \quad \overline{\zeta_n} \right| (A \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right|) &= \left| \overline{\zeta_1} \quad \overline{\zeta_2} \quad \dots \quad \overline{\zeta_n} \right| (\lambda \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right|) \\
&= \lambda(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2)
\end{aligned} \tag{5}
$$

perché se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ allora $\overline{z}z = a^2 + b^2 := |z|^2$.
Secondo modo: utilizziamo (3), l'ipotesi $A = A^t$ e riscriviamo (4) come

$$
\begin{aligned}
(\left| \overline{\zeta_1} \quad \overline{\zeta_2} \quad \dots \quad \overline{\zeta_n} \right| A) \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right| &= (A \left| \begin{matrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{matrix} \right|)^t \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right| \\
= (\overline{\lambda} \left| \begin{matrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{matrix} \right|)^t \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right| &= \overline{\lambda}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2)
\end{aligned} \tag{6}
$$

Eguagliando i membri a destra otteniamo

$$\lambda(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2) = \overline{\lambda}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2)$$

e dato che $|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2 \neq 0$ abbiamo $\lambda = \overline{\lambda}$ che è quello che dovevamo dimostrare.
Fine dimostrazione Lemma.
Fine dimostrazione Teorema.

Osservazione (facoltativa). La definizione di operatore simmetrico è molto generale e può essere data anche per spazi vettoriali metrici di dimensione infinita. Vediamo un esempio. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni reali $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente derivabili e periodiche di periodo 2π (tali cioè che $f(x) = f(x + 2\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$). Sia $<,>$ l'applicazione da $V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$< f, g > = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

Per le proprietà dell'integrale quest'applicazione è bilineare; inoltre è ovviamente simmetrica ed è definita positiva perché se

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = 0$$

allora f^2, e quindi f, è l'applicazione nulla [4] . Essa definisce quindi un prodotto scalare definito positivo in V. Consideriamo l'operatore T definito da

$$Tf = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

[4] qui si usa la continuità degli elementi di V; abbiamo visto l'argomento in classe.

In parole T associa ad ogni funzione la sua derivata seconda. Innanzitutto T è lineare (per le proprietà della derivata); inoltre è ben definito come operatore lineare da V in V (perché la derivata di una funzione periodica è a sua volta periodica, basta calcolare la derivata in x_0 e $x_0 + 2\pi$ come limite del rapporto incrementale).
Infine T **è simmetrico**; lo verifichiamo utilizzando la formula di integrazione per parti e l'ipotesi di periodicità. Per definizione

$$< Tf, g >= \int_0^{2\pi} \frac{d^2 f}{dx^2} g dx\,;$$

ora utilizziamo l'integrazione per parti ed otteniamo per il membro a destra:

$$-\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx} + \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx}(\frac{df}{dx}g)dx = -\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx + (\frac{df}{dx})(2\pi)g(2\pi) - (\frac{df}{dx})(0)g(0)$$

Ma dall'ipotesi di periodicità otteniamo

$$(\frac{df}{dx})(2\pi)g(2\pi) - (\frac{df}{dx})(0)g(0) = 0$$

e quindi, in definitiva

$$< Tf, g >= -\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx$$

Ma ora riapplichiamo l'integrazione per parti al membro a destra ottenendo infine

$$< Tf, g >= -\left(-\int_0^{2\pi} f\frac{d^2 g}{dx^2}dx\right) = \int_0^{2\pi} f\frac{d^2 g}{dx^2}dx =< f, Tg >$$

che era quello che dovevamo verificare.
L'operatore T è un operatore studiatissimo; prende il nome di Laplaciano (in dimensione 1).