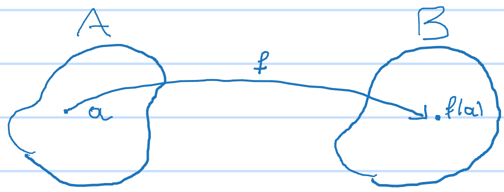
FUNZIONI

Definizione: Siano A e B due insiemi, e sia f una legge che ad ogni elemento di a associa un elemento di B. Allora f si chiama funzione. Più precisamente, la terna (A,B,f) si dice funzione



Diciamo che f manda a in $f(a)$, e scriviamo

$$f : a \to f(a)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'insieme A viene chiamato Dominio di } f \ (\mathrm{Dom}(f));\\ \text{l'insieme B viene chiamato Codominio di } f \ (\mathrm{Cod}(f)).\end{array}}$$

Nel linguaggio comune si dice "Sia f una funzione da A a B", e si scrive $f: A \to B$

Dubbio: chi è la funzione: f o la terna (A,B,f) ? $\begin{cases}\text{Nella def. formale è una terna } (A,B,f)\\ \text{Nel linguaggio comune è la legge } f.\end{cases}$

Risposta: dire "f è una funzione" è conveniente e intuitivo, ma la definizione formale ci impone che dobbiamo sempre specificare il dominio e il codominio.

Scriviamo che f è una funzione da A a B con una formula:

$$\forall a \in A, \quad \exists ! \ b \in B : b = f(a)$$

"per ogni" "appartiene" "esiste" "unico" "tale che"

ESEMPIO: Sia A l'insieme degli studenti iscritti al 1° anno, e sia $B = \{M, F\}$ l'insieme costituito da 2 elementi; le lettere M e F. Sia $f: A \to B$ la legge (la funzione) definita da $f(a) = M$ se a è un maschio, $f(a) = F$ se a è femmina.

ESEMPIO: Sia A come prima, sia $B := \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e sia f la funzione che ad ogni studente $a \in A$ associa il suo anno di nascita: $f(a) :=$ anno di nascita di a.

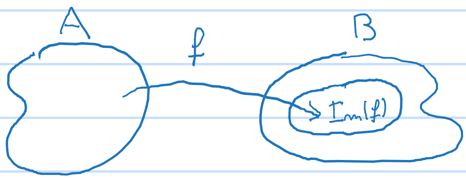
OSSERVAZIONE: L'ultimo esempio mostra che l'insieme B può contenere elementi $b \in B$ che non corrispondono ad alcuna $a \in A$: Sicuramente non esistono studenti nati nel 2026 o nati nel 1807!

$$\exists \ b \in B : \ \forall a \in A \ \ f(a) \neq b$$

Funzioni Iniettive, Suriettive e Invertibili

DEFINIZIONE: L'*immagine* di f è il sottoinsieme di B costituito da tutti gli elementi del tipo $f(a)$, con $a \in A$. In formule

$$\mathrm{Im}(f) := \{b \in B : b = f(a) \text{ per qualche } a \in A\} = \bigcup_{a \in A} \{f(a)\}.$$



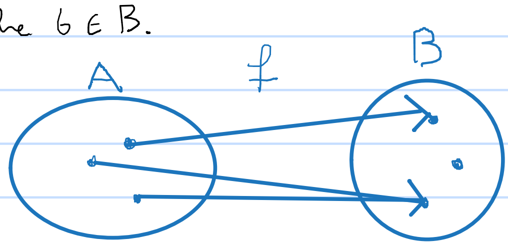
NOTAZIONE: Dato un insieme $E \subseteq A$, poniamo $f(E) := \bigcup_{a \in E} \{f(a)\}$ e diciamo che $f(E)$ è l'immagine di E tramite f. In particolare, risulta $f(A) = \mathrm{Im}(f)$.

ESEMPIO Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n) = 2n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora $\mathrm{Im}(f) = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\}$.

DEFINIZIONE: $f : A \to B$ si dice *suriettiva* se $B = \mathrm{Im}(f)$

ESEMPIO: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. da $f(x) = 2x$ è suriettiva, mentre $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n) = 2n$ non è suriettiva.

OSSERVAZIONE: Una funzione $f : A \to B$ deve essere definita su tutti gli elementi $a \in A$ (per definizione, altrimenti non è una funzione). Inoltre, dato $a \in A$, $\exists!\, b \in B : f(a) = b$. Possiamo allora pensare a $f : A \to B$ come un insieme di frecce, che "partono" da ogni $a \in A$ e arrivano a qualche $b \in B$.



Questa è una funzione non è suriettiva.

OSS: $\exists\, b \in B$ dove "arrivano" 2 frecce

DEFINIZIONE: $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se $\forall a_1, a_2 \in A$, con $a_1 \neq a_2$, si ha $f(a_1) \neq f(a_2)$.

$$f \text{ è iniettiva} \iff a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

ESEMPIO: La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n) = n^2$ è iniettiva, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(z) = z^2$ non è iniettiva.

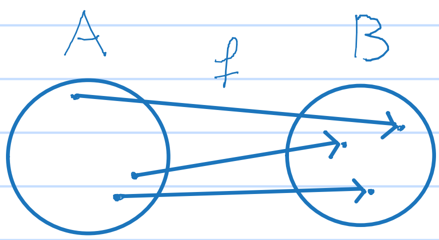
RICAPITOLIAMO (in termini di frecce). Da ogni $a \in A$ parte una e una sola freccia che arriva ad un unico elemento $b \in B$: $f(a) = b$.
Dato $b \in B$, può essere che b non sia raggiunto da nessuna freccia, o può essere raggiunto da più frecce.

f è suriettiva $\iff$ $\forall b \in B$ è punto di arrivo di almeno una freccia f è iniettiva $\iff$ $\forall b \in B$ è punto di arrivo di al massimo una freccia.

Conviene dare una definizione nel caso in cui a ogni elemento $b \in B$ arriva esattamente una freccia.

DEFINIZIONE: $f: A \to B$ si dice biettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

Osserviamo che se f è biettiva, allora tutte le frecce si potrebbero invertire, dando origine ad una nuova funzione, detta "inversa".



DEFINIZIONE: Sia $f: A \to B$ una funzione biettiva. Allora risulta ben definita la funzione inversa di f, ossia la funzione $f^{-1}: B \to A$ definita da

$$f^{-1}(b) := a \in A : f(a) = b.$$

Osserviamo che nella formula precedente a esiste (poiché f è suriettiva) ed è unica (poiché f è iniettiva): f^{-1} è ben definita $\iff$ f è biettiva.

ESEMPIO: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2 + x$. Allora f è biettiva, e

$$f^{-1}(y) = y - 2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

(Nell'esempio precedente $x \in \mathbb{R}$ denota un generico elemento nel dominio, e y un generico elemento del codominio. Non hanno nulla a che fare con coordinate cartesiane sul piano.)

NOTAZIONE: In precedenza, data $f: A \to B$, e dato $E \subseteq A$, abbiamo posto $f(E) = \bigcup_{a \in E} \{f(a)\}$
Analogamente, dato $F \subseteq B$, poniamo

$$f^{-1}(F) := \{a \in A : f(a) \in F\}.$$

Osserviamo che $f^{-1}(F)$ non è un elemento di A, ma un sottoinsieme di A.
Inoltre, tale notazione non necessita che f sia invertibile.
In effetti, si può facilmente verificare che $f: A \to B$ è invertibile $\iff \forall b \in B$, $f^{-1}(\{b\})$ contiene esattamente un elemento di A.

FUNZIONI COMPOSTE

DEFINIZIONE: Siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ due funzioni, e assumiamo che $Im(g) \subseteq A$. La funzione composta $f \circ g : C \to B$ è definita da

$$f \circ g\,(c) = f(g(c)), \quad \forall c \in C.$$

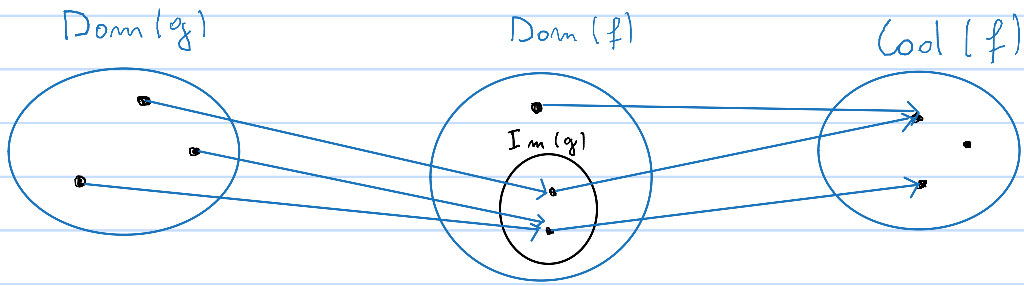
Osserviamo che tale definizione non ha senso senza assumere $Im(g) \subseteq A$.

In pratica, $f \circ g$ significa che si applica prima la g, e poi la f (al contrario dell'ordine in cui si scrivono; questa scelta sembra strana, ma $f \circ g = f(g(x))$ è una notazione più intuitiva di di ~~$f \circ g\,(x) = g(f(x))$~~!

ESEMPIO: Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(y) = y^2$ $\forall y \in \mathbb{R}$, e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x + 6$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Allora $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f \circ g\,(x) = (x+6)^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sia invece $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da $f(y) = \sqrt{y}$ $(\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\})$. Allora $f \circ g$ non è ben definita, poiché $Im(g) \not\subseteq Dom(f)$. Infatti $g(-7) = -1 \notin \mathbb{R}^+$.

Visualizzando le funzioni con le frecce, si può dire che $f \circ g$ è è definita se le frecce che descrivono g arrivano nel dominio di f.



OSSERVAZIONE: Se $f : A \to B$ è una funzione biettiva, allora è invertibile, ossia $\exists\, f^{-1} : B \to A$ definita da $f^{-1}(b) = a \in A : f(a) = b$. Osserviamo che sono ben definite le funzioni $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$. Inoltre

$$f^{-1} \circ f\,(a) = a \;\; \forall a \in A, \qquad f \circ f^{-1}(b) = b \;\; \forall b \in B.$$

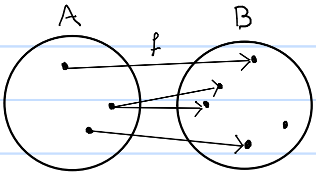
ESEMPIO: Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f(y) = \frac{1}{2} y$ $\forall y \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Allora $g = f^{-1}$ e $f = g^{-1}$. Quindi

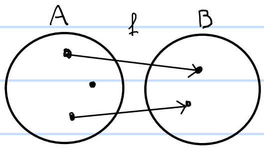
$$f \circ g\,(x) = \tfrac{1}{2}(2x) = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g \circ f\,(y) = 2\left(\tfrac{1}{2} y\right) = y \;\; \forall y \in \mathbb{R}.$$

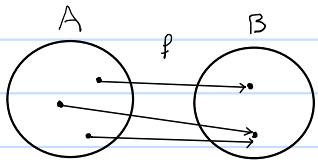
ESERCIZI

Ex 1 Stabilire se le seguenti corrispondenze definiscono delle funzioni

1.1) $A = B =$ insieme degli esseri umani; f associa ad ogni $a \in A$ i figli di a.
1.2) $A = B =$ insieme degli esseri umani; f associa ad ogni $a \in A$ la madre di a.
1.3) $A = B =$ insieme degli esseri umani; f associa ad ogni $a \in A$ i genitori di a.

1.4) 

1.5) 

1.6) 

Ex 2 Determinare $\mathrm{Im}(f)$ per le seguenti funzioni e stabilire se sono suriettive

2.1) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := n+5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2.2) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) := n+5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2.3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x+5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2.4) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := 5n+15 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2.5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2.6) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) :=$ resto della divisione $n:7$
2.7) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 3 - x$
2.8) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$
2.9) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 5$.

Ex 3 Stabilire se le seguenti funzioni sono invertibili, e in caso affermativo calcolare f^{-1}

3.1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + 3x^3$
3.2) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(z) = -z+1$
3.3) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2 + n$
3.4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+1$
3.5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$
3.6) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(z) = \begin{cases} 2z & \text{se } z \geq 0 \\ -2z-1 & \text{se } z < 0 \end{cases}$

DEFINIZIONE Sia $f: A \to B$, e sia $E \subseteq A$. La restrizione di f ad E è la funzione $f_{|E}: E \to B$ definita da $f_{|E}(a) = f(a) \quad \forall a \in E$

Ex 4) Considerare le funzioni f in Ex 3), e per ognuna di tali f, trovare qualche insieme $E \subseteq A$ tale che $f_{|E}: E \to \mathrm{Im}(f)$ è invertibile.