ANALISI MATEMATICA, Corso di laurea triennale in Matematica
6 ottobre 2011

Es. 1. Determinare la successione $x^* := \{x_i^*\}_{i\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ (insieme delle successioni reali limitate) dove risulta

$$x_i^* = \lim_{k\to+\infty} \arctan\left((\frac{5}{i+1})^k\right), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sia $x^k := \{x_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$, dove $x_i^k = \arctan\left((\frac{5}{i+1})^k\right)(\forall k \in \mathbb{N})$. Dire se x^*, $x^k \in l^\infty$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ e, in caso affermativo, calcolare $\|x^k - x^*\|_\infty$ al variare di $k \in \mathbb{N}$. Dedurre se la successione x^k converge a x^* per $k \to +\infty$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$.

Es. 2.[In $l^p := \{\{x_i^*\}_{i\in\mathbb{N}} : \sum_{i=0}^\infty |x_i|^p < +\infty\}$, per $p \geq 1$, consideriamo la norma
$\|\{x_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}\|_p := \left(\sum_{i=0}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p}$]
Dire per quali α la successione $\{\frac{1}{(i+1)^\alpha}\}$:
i) appartiene allo spazio l^2 ;
ii) appartiene allo spazio l^p $(p \geq 1)$;
iii) appartiene allo spazio l^p ma non allo spazio l^q, dove p, $q \in [1, +\infty]$ sono in un'opportuna relazione d'ordine (quale?).

Ripetere l'esercizio per la successione $\{\frac{1}{(i+1)^\alpha(\ln(i+1))^2}\}$.

Es. 3. Per ciascuno dei seguenti spazi metrici (X, d) dire se è completo, motivando la risposta:
i) $X = (-1, 1)$, $d(x, y) = |x - y|$ $(\forall x, y \in X)$;
ii) $X = \{p \in C([a, b], \mathbb{R}),\ \text{t.c. } p \text{ è un polinomio}\}$, $d(p, q) = \|p - q\|_\infty$ $(\forall x, y \in X)$;
iii) $X = \{x = \{x_i^*\}_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty,\ \text{t.c. } \{x_i^*\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}\}$, $d(x, y) = \|x - y\|_\infty$ $(\forall x, y \in X)$.
Per gli spazi non completi, determinare, possibilmente, quale sia il loro completamento.