

Scritto di Analisi Matematica 2, 17/02/2012
aa 2011-2012

COGNOME: _____ **NOME:** _____ **MATRICOLA:** _____

Mettere tra parentesi il proprio nome e cognome se non si vuole che il voto e il proprio nominativo compaiano sulla pagina dei risultati dello scritto.

Nei seguenti quesiti a risposta multipla si indichi se le affermazioni fatte sono vere o false (indicando in modo chiaro con **V** le affermazioni vere, e con **F** quelle false)

Quesito A1 Sia $\|\cdot\|$ la norma euclidea in $\mathbb{R}^2$, $X := B_1(\vec{0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| < 1\}$ e consideriamo la funzione $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ data da $d(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Allora

- 1) (X, d) è uno spazio metrico. ...
- 2) (X, d) è uno spazio metrico completo. ...
- 3) Per ogni $x, y \in B_1(\vec{0})$ si ha $d(x, y) < 2$

Quesito A2 Siano $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e assumiamo che $g(0) = 2$, $\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} g(x, y) = +\infty$. Sia infine $Z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 3\}$. Allora

- 1) Z è chiuso e limitato ...
- 2) f ristretta a Z ha minimo assoluto. Inoltre se $\vec{x} \in Z$ è un punto di minimo assoluto, e $\nabla g(\vec{x}) \neq 0$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(\vec{x}) = \lambda \nabla g(\vec{x})$
- 3) f ristretta a Z ha massimo e minimo assoluti. ...

Quesito A3 Sia $f(x, y) = \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$). Allora

- 1) f è sommabile su $B_1(0, 0) \setminus \{(0, 0)\}$
- 2) f è sommabile su $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0, 0)$
- 3) f è sommabile su $B_2(0, 0) \setminus B_1(0, 0)$

COGNOME: _____ NOME: _____ MATRICOLA: _____

Esercizio B1 Consideriamo il campo di forze definito da

$$F(x, y) := \left(\frac{x}{x^2 - y^2 + 4}, \frac{-y}{x^2 - y^2 + 4} \right).$$

- i) Determinare il dominio di F e stabilire se la forma differenziale associata a F è chiusa;
- ii) Dire qual è l'insieme connesso più ampio contenente il punto $(0, 3)$ in cui F è dotata di primitiva.
- iii) Calcolare il lavoro compiuto da F lungo la circonferenza $\partial B_2((3, 0))$ percorsa in senso antiorario.
- iv) Determinare se il flusso di F uscente dalla circonferenza $\partial B_2((3, 0))$ è negativo, positivo, o nullo.

(Si suggerisce di usare, dove opportuno, i teoremi della divergenza e di Stokes, al fine di evitare conti di integrali particolarmente laboriosi.)

COGNOME: _____ NOME: _____ MATRICOLA: _____

Esercizio B2 Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0); \mathbb{R})$ definita da

$$f(x, y) := \frac{x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)}$$

- i) Stabilire se f può essere estesa ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$.
- ii) Nel caso di risposta affermativa al punto (i) stabilire se la funzione così ottenuta è derivabile su tutto $\mathbb{R}^2$.
- iii) Nel caso di risposta affermativa al punto (i) stabilire se la funzione così ottenuta è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

COGNOME: _____ NOME: _____ MATRICOLA: _____

Esercizio B3 Sia $f(x, y) := (x + y)^3 - 6(x + y) - x^2$ per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- i) Trovare i punti stazionari (ossia critici) di f , e per ognuno di essi stabilire se si tratti di punto di massimo relativo, di massimo assoluto, di minimo relativo, di minimo assoluto o punto di sella.
- ii) Determinare se f ristretta all'insieme $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ ammette massimo e minimo assoluti, e in caso affermativo trovare tali punti.
- ii) Determinare se f ristretta all'insieme $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 3 \leq x + y \leq 4\}$ ammette massimo e minimo assoluti, e in caso affermativo trovare tali punti.

COGNOME: _____ NOME: _____ MATRICOLA: _____

Esercizio B4 Sia D il dominio di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3, 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq z^2 + 2\}.$$

Calcolare

$$\int_{\mathbb{D}} |x| \, dx \, dy \, dz.$$

Esercizio Facoltativo Sia l^1 lo spazio delle successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $\sum_n |a_n| < \infty$ e sia

$$T : l^1 \mapsto l^1, \quad \text{definita da} \quad T(\{a_n\}) = \{1, a_1, a_2, \dots\},$$

ossia $T(\{a_n\})$ è la successione che ad ogni $n \geq 2$ associa a_{n-1} , a che ad 1 associa 1. Si stabilisca se T ammette un punto fisso, ossia se esiste $\{a_n\} \in l^1$ tale che $T\{a_n\} = \{a_n\}$.

Si ripeta l'esercizio nel caso in cui

$$T : l^1 \mapsto l^1, \quad \text{sia definita da} \quad T(\{a_n\}) = \{7, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\},$$

ossia $T(\{a_n\})$ sia la successione che ad ogni $n \geq 2$ associa a_n/n , a che ad 1 associa 7.

[Suggerimento: se il punto fisso $\{a_n\}$ esiste si ha $T^k(\{a_n\}) = \{a_n\}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$]