Scritto di Analisi Matematica 2, 17/02/2012
aa 2011-2012

COGNOME: ____________________ **NOME**: ____________________ **MATRICOLA**: ______________

Mettere tra parentesi il proprio nome e cognome se non si vuole che il voto e il proprio nominativo compaiano sulla pagina dei risultati dello scritto.

Nei seguenti quesiti a risposta multipla si indichi se le affermazioni fatte sono vere o false (indicando in modo chiaro con **V** le affermazioni vere, e con **F** quelle false)

Quesito A1 Sia $\|\cdot\|$ la norma euclidea in $\mathbb{R}^2$, $X := B_1(\vec{0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| < 1\}$ e consideriamo la funzione $d : X \times X \to [0, +\infty)$ data da $d(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Allora

1) (X, d) è uno spazio metrico. ...

2) (X, d) è uno spazio metrico completo. ...

3) Per ogni x, $y \in B_1(\vec{0})$ si ha $d(x, y) < 2$. ...

Quesito A2 Siano $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e assumiamo che $g(0) = 2$, $\lim_{|(x,y)| \to \infty} g(x, y) = +\infty$. Sia infine $Z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 3\}$. Allora

1) Z è chiuso e limitato ....

2) f ristretta a Z ha minimo assoluto. Inoltre se $\vec{x} \in Z$ è un punto di minimo assoluto, e $\nabla g(\vec{x}) \neq 0$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(\vec{x}) = \lambda \nabla g(\vec{x})$. ....

3) f ristretta a Z ha massimo e minimo assoluti. ...

Quesito A3 Sia $f(x, y) = \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$. Allora

1) f è sommabile su $B_1(0, 0) \setminus \{(0, 0)\}$. ...

2) f è sommabile su $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0, 0)$. ...

3) f è sommabile su $B_2(0, 0) \setminus B_1(0, 0)$. ...

RISPOSTE: Quesito A1: V F V
Quesito A2: V V V
Quesito A3: F V V

COGNOME: __________________**NOME**: __________________**MATRICOLA**:______________

Esercizio B1 Consideriamo il campo di forze definito da

$$F(x,y) := \left(\frac{x}{x^2 - y^2 + 4}, \frac{-y}{x^2 - y^2 + 4} \right).$$

i) Determinare il dominio di F e stabilire se la forma differenziale associata a F è chiusa;

ii) Dire qual è l'insieme connesso piú ampio contenente il punto $(0,3)$ in cui F è dotata di primitiva.

iii) Calcolare il lavoro compiuto da F lungo la circonferenza $\partial B_2((3,0))$ percorsa in senso antiorario.

iv) Determinare se il flusso di F uscente dalla circonferenza $\partial B_2((3,0))$ è negativo, positivo, o nullo.

(Si suggerisce di usare, dove opportuno, i teoremi della divergenza e di Stokes, al fine di evitare conti di integrali particolarmente laboriosi.)

RISOLUZIONE: i): F è definita in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \neq \pm\sqrt{x^2+4}\}$ quindi nel piano eccettuati i punti di una iperbole. Inoltre F è chiusa poiché $\partial_y F_1 = \frac{2xy}{(x^2-y^2+4)^2} = \partial_x F_2$.

ii) Essendo F chiusa, essa è dotata di primitiva nell'insieme connesso $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > \sqrt{x^2+4}\}$ essendo questo anche semplicemente connesso (quindi in questo insieme valgono le ipotesi del Teorema che assicura l'esattezza della forma differenziale).

iii) anche l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\sqrt{x^2+4} < y < \sqrt{x^2+4}\} \supset \overline{B_2((3,0))}$ è semplicemente connesso, quindi il campo è dotato di primitiva, quindi conservativo. Allora il lavoro è nullo poiché coincide con l'incremento della funzione primitiva tra i punti iniziale e finale della curva, punti che coincidono essendo la curva una circonferenza, quindi chiusa.

iv) il flusso di F uscente dalla circonferenza $\partial B_2((3,0))$, per il teorema della divergenza, risulta dato da (sia Γ una curva che parametrizza la circonferenza percorsa una volta sola in verso antiorario, $\vec{n}$, in ogni punto, il versore della normale esterna alla circonferenza in quel punto):

$$\int_\Gamma < F, \vec{n} > ds = \iint_{B_2((3,0))} div(F)\, dx\, dy = \iint_{B_2((3,0))} \frac{-2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2+4)^2}\, dx\, dy < 0$$

(infatti la divergenza calcolata risulta negativa in tutto l'insieme di definizione di F, quindi in particolare in $B_2((3,0))$).

COGNOME: ____________________**NOME**: ____________________**MATRICOLA**:______________

Esercizio B2 Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0); \mathbb{R})$ definita da

$$f(x,y) := \frac{x^2y^2 + x^2 + y^2 - 2x^3}{(x^2+y^2)}$$

i) Stabilire se f può essere estesa ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) Nel caso di risposta affermativa al punto (i) stabilire se la funzione cosí ottenuta è derivabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

iii) Nel caso di risposta affermativa al punto (i) stabilire se la funzione cosí ottenuta è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

RISOLUZIONE: i): $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} := \frac{x^2-2x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} := 1-2x = 1$, $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 1$ inoltre per $(x,y) \neq (0,0)$:

$$|f(x,y)-1| = |\frac{x^2(y^2-2x)}{(x^2+y^2)}| \leq |y^2 - 2x| \to 0, \text{ per}(x,y) \to (0,0),$$

(la funzione $|y^2-2x|$ è continua in $(0,0)$). Quindi f puó essere estesa come funzione continua in tutto $\mathbb{R}^2$, ponendo $f(0,0) = 1$.

ii) f è rapporto di due polinomi, il secondo dei quali si annulla solo nel punto $(0,0)$. Quindi essa è dotata di derivate di qualunque ordine continue in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, quindi é derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$ se lo è in $(0,0)$. Inoltre

$\lim_{x\to 0} \frac{d}{dx} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{d}{dx}(1-2x) = -2 = f_x(0,0)$ (l'ultima uguaglianza é giustificata poiché f è continua in $(0,0)$),

$\lim_{y\to 0} \frac{d}{dy} f(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{d}{dx} 1 = 0 = f_y(0,0)$.

Quindi f é derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

iii) Essendo f dotata di derivate di qualunque ordine continue in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, il Teorema del Differneziale ci assicura che essa è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Ricordando il valore delle derivate parziali in $(0,0)$, essa è differenziabile anche in $(0,0)$ se e solo se si annulla il seguente limite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2k^2+h^2+k^2-2h^3}{(h^2+k^2)} - 1 + 2h}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2 + 2hk^2}{\sqrt{h^2+k^2}(h^2+k^2)}$$

nell'ultima espressione, ponendo $h = k$, si ottiene $\lim_{h\to 0^\pm} \frac{h^4+2h^3}{|h|^3} = \pm 2 \neq 0$, quindi f non è differenziabile in $(0,0)$.

COGNOME: ____________________**NOME:** ____________________**MATRICOLA:**_______________

Esercizio B3 Sia $f(x,y) := (x+y)^3 - 6(x+y) - x^2$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

i) Trovare i punti stazionari (ossia critici) di f, e per ognuno di essi stabilire se si tratti di punto di massimo relativo, di massimo assoluto, di minimo relativo, di minimo assoluto o punto di sella.

ii) Determinare se f ristretta all'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y\}$ ammette massimo e minimo assoluti, e in caso affermativo trovare tali punti.

iii) Determinare se f ristretta all'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3 \leq x+y \leq 4\}$ ammette massimo e minimo assoluti, e in caso affermativo trovare tali punti.

RISOLUZIONE: i) $\nabla f = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} 3(x+y)^2 - 6 - 2x = 0 \\ 3(x+y)^2 - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

La matrice Hessiana è:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6(x+y)-2 & 6(x+y) \\ 6(x+y) & 6(x+y) \end{pmatrix} \iff H(0,\pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \pm 6\sqrt{2}-2 & \pm 6\sqrt{2} \\ \pm 6\sqrt{2} & \pm 6\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

quindi $det\, H(0,\pm\sqrt{2}) = \mp 12\sqrt{2}$. Allora $(0,\sqrt{2})$ è un punto di sella (il determinante è negativo) e $(0,-\sqrt{2})$ è un punto di massimo relativo in quanto il determinante è positivo e il primo elemento di riga e colonna è negativo. Non si tratta di un punto di massimo assoluto perche' la funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente (polinomio di terzo grado in x per ogni y fissato).

ii) f ristretta all'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y\}$ diventa una funzione di una variabile $g(x) = f(x,x) = 8x^3 - 12x - x^2$ che non ammette massimo e minimo assoluti essendo illimitata sia superiormente che inferiormente (polinomio di terzo grado).

iii) f ristretta all'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, y \geq 0,\ 3 \leq x+y \leq 4\}$ ammette massimo e minimo assoluti poiché l'insieme D è chiuso e limitato. Infatti per $x \in [0,3]$ si ha $3 - x \leq y \leq 4 - x$ e per $x \in (3,4]$ si ha $0 \leq y \leq 4 - x$. I punti dove si annulla il gradiente di f non appartengono a D, quindi massimo e minimo assoluti sono assunti sulla frontiera di D. Calcoliamoli determinando la restrizione di f ai vari segmenti che costituiscono la frontiera (aiutarsi con un disegno):

- per $x \in [0,3]$, $y = 3 - x$ si ha $h(x) = 3^3 - 18 - x^2 = 9 - x^2$ quindi la funzione è decrescente in questo intervallo e avremo massimo e minimo agli estremi: $h(0) = f(0,3) = 9$, $h(3) = f(3,0) = 0$.

- per $y = 0, x \in [3,4]$ si ha $k(x) = x^3 - 6x - x^2$, $k'(x) = 3x^2 - 6 - 2x = 0$ nei punti $x_\pm = \frac{1\pm\sqrt{19}}{3}$. Nell'intervallo $[3,4]$ non cade nessuno di questi punti, quindi dobbiamo calcolare k agli estremi dell'intervallo, ottenendo $k(3) = f(3,0) = 0$, $k(4) = f(4,0) = 24$

- per $x \in [0,4]$, $y = 4 - x$ si ha $l(x) = 4^3 - 24 - x^2 = 40 - x^2$ quindi ci interessano solo i valori: $l(0) = f(0,4) = 40$, $l(3) = f(4,0) = 24$.

- per $x = 0$ e $y \in [3,4]$, si ottiene $m(y) = y^3 - 6y$, $m'(y) = 3y^2 - 6 = 0$ nei punti $y_\pm = \pm\sqrt{2}$, punti che non appartengono all'intervallo. Allora massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo che sono punti in cui abbiamo gia' calcolato la funzione f.

Concludendo, tra i valori ottenuti come candidati ad essere valori massimi o minimi, il massimo assoluto è 40 e il minimo assoluto è 0.

COGNOME: ____________________**NOME**: ____________________**MATRICOLA**:______________

Esercizio B4 Sia D il dominio di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 3,\ 0 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le z + 2\}.$$

Calcolare

$$\int_D |x|\, dx\, dy\, dz.$$

RISOLUZIONE: In coordinate cilindriche il dominio diventa $\tilde{D} = \{(\rho, \theta, z) : \theta \in [0, 2\pi], 0 \le z \le 3, 0 \le \rho \le z + 2\}$. Quindi (il determinante Jacobiano della trasformazione è ρ):

$$\int_D |x|\, dx\, dy\, dz = \int_{\tilde{D}} |\rho \cos(\theta)| \rho\, d\rho\, d\theta\, dz\, .$$

Possiamo ora applicare le formule di riduzione ottenendo (per simmetria l'integrale è 4 volte quello ristretto a $\theta \in [0, \pi/2]$)

$$\int_D |x|\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} (\int_0^3 (\int_0^{z+2} \rho^2 |\cos(\theta)|\, d\rho) dz) d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} (\int_0^3 (\int_0^{z+2} \rho^2 \cos(\theta)\, d\rho) dz) d\theta =$$

$$= 4[\sin(\theta)]_0^{\pi/2} \int_0^3 [\frac{\rho^3}{3}]_0^{z+2} dz = 4 \int_0^3 \frac{(z+2)^3}{3} dz = 4[\frac{(z+2)^4}{12}]_0^3 = 609/3 = 203.$$

Esercizio Facoltativo Sia l^1 lo spazio delle successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $\sum_n |a_n| < \infty$ e sia

$$T : l^1 \mapsto l^1, \quad \text{definita da} \quad T(\{a_n\}) = \{1,\, a_1,\, a_2, \ldots\},$$

ossia $T(\{a_n\})$ è la successione che ad ogni $n \ge 2$ associa a_{n-1}, e che ad 1 associa 1. Si stabilisca se T ammette un punto fisso, ossia se esiste $\{a_n\} \in l^1$ tale che $T\{a_n\} = \{a_n\}$.

Si ripeta l'esercizio nel caso in cui

$$T : l^1 \mapsto l^1, \quad \text{sia definita da} \quad T(\{a_n\}) = \{7,\, \frac{a_2}{2},\, \frac{a_3}{3}, \ldots\},$$

ossia $T(\{a_n\})$ sia la successione che ad ogni $n \ge 2$ associa a_n/n, a che ad 1 associa 7.

[*Suggerimento: se il punto fisso* $\{a_n\}$ *esiste si ha* $T^k(\{a_n\}) = \{a_n\}$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$]

RISOLUZIONE: nel primo caso, poiché $T^k(\{a_n\}) = \{1, 1, \ldots, 1, a_1, a_2, \ldots\}$ dove sono uguali ad 1 almeno i primi k termini, dal suggerimento segue che l'eventuale punto unito dovrebbe avere tutti gli elementi uguali ad 1 e quindi non apparterrebbe allo spazio l^1.

Nel secondo caso si ottiene che l'unico punto unito è la successione $a_1 = 7$, $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, in quanto per $n \ge 2$ deve risultare $a_n = a_n/n$ che equivale a $a_n \frac{(n-1)}{n} = 0$ e quindi $a_n = 0$ essendo $n - 1 \ge 1$.