# Scritto di Analisi Matematica 2, 23/04/2012
## aa 2011-2012

**COGNOME**: ____________________ **NOME**: ____________________ **MATRICOLA**: ______________

*Mettere tra parentesi il proprio nome e cognome se non si vuole che il voto e il proprio nominativo compaiano sulla pagina dei risultati dello scritto.*

Nei seguenti quesiti a risposta multipla si indichi se le affermazioni fatte sono vere o false (indicando in modo chiaro con **V** le affermazioni vere, e con **F** quelle false)

**Quesito A1** Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora

1) $f(3,4) \leq f(5,4)$. ...

2) Per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x,y) = +\infty$. ...

3) Se $f \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$ allora esiste finito $\lim_{n\to+\infty} f(-n,y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. ...

**Quesito A2** Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ tale che $|f(x,y)| \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e poniamo $g(x,y) := f(x,y) - x^2 - y^4$. Allora

1) Esiste almeno un punto di massimo assoluto per $g$ su $\mathbb{R}^2$. ...

2) $g$ ammette massimo e minimo relativo in $\mathbb{R}^2$. ...

3) $g$ ammette massimo in $(0,0)$. ...

**Quesito A3** Siano $f_n \in C^0(\mathbb{R}^2)$ e siano $E_n \subset B_1$ insiemi misurabili contenuti nella palla unitaria e tali che $\lim_{n\to\infty} |E_n| = 0$.

1) $f_n$ è integrabile su $E_n$ e $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f_n(x,y)\,dx\,dy = 0$. ...

2) $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \sin(f_n(x,y))\,dx\,dy = 0$. ...

3) $\inf_n \left\{ \int_{E_n} f_n^2(x,y)\,dx\,dy \right\} \geq 0$. ...

**COGNOME**: ___________________ **NOME**: ___________________ **MATRICOLA**: ______________

**Esercizio B1** Consideriamo il campo di forze definito da

$$F(x,y,z) := (|\cos z|, xy, x+y+z)\,.$$

Poniamo $f(r)$ il flusso di $F$ uscente dalla sfera $\partial B_r(0,0,0)$;

i) Calcolare la divergenza di $F(x,y,z)$;

ii) Calcolare $f(1)$;

iii) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{r^4}.$$

**COGNOME**: ____________________**NOME**: ____________________**MATRICOLA**:_______________

**Esercizio B2** Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{se } xy \geq 0; \\ -1 & \text{se } xy < 0. \end{cases}$$

Sia inoltre $g(x,y) := (x^2 + y^2)f(x,y)$.

i) Determinare i punti di $\mathbb{R}^2$ dove $f$ è continua.

ii) Determinare i punti di $\mathbb{R}^2$ dove $f$ è derivabile.

iii) Stabilire se $f$ è differenziabile nell'origine.

**COGNOME**: ____________________**NOME**: ____________________**MATRICOLA**:______________

**Esercizio B3** Sia $f(x, y) := \cos x + y^2$ per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1) Determinare tutti i punti stazionari di $f$ (ossia tali che $\nabla f = 0$).
2) Determinare tutti gli eventuali punti di massimo e minimo relativi di $f$ in $\mathbb{R}^2$, specificando se si tratta di massimi o minimi relativi o assoluti.

**Esercizio Facoltativo** Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $B$ la palla unitaria in $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che

$$\int_B x_1 + x_2 + \ldots + x_n \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n = 0.$$