ANALISI MATEMATICA, Corso di laurea triennale in Matematica

29 novembre 2011

- **1)** Calcolare massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) := x - 2y + 2z$ sulla superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- **2)** Siano $a, b > 0$. Trovare eventuali massimi e minimi della funzione $f(x,y) := \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ con la condizione $g(x,y) := x^2 + y^2 = 1$, poi quelli della funzione g con la condizione $f(x,y) = 1$. Interpretare geometricamente il risultato.

- **3)** Relativamente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 4z^2 = 0\,, \\ (x^2-1)(1-x) = (1+x)(y^2+4z^2-1)\,, \end{cases}$$

dire quale dei seguenti casi è verificato:

(a)il sistema individua localmente una funzione di una variabile a valori in $\mathbb{R}^2$ con grafico passante per il punto $(0,0,0)$;

(b) non si sa se vale (a);

(c) certamente (a) è falso e il sistema individua una funzione tra sottinsiemi di spazi diversi (di quali spazi?) con grafico passante per il punto $(0,0,0)$.

Ripetere l'esercizio sostituendo la prima equazione con la seguente :$x^2-2xy+y^2+4z^2 = 0$.

RISOLUZIONE: la seconda equazione può essere riscritta nella forma $(1+x)(x^2-2x+y^2+4z^2) = 0$. Per la matrice Jacobiana in $P_0 := (0,0,0)$ si ottiene allora

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi essa non ha rango massimo, il teorema del Dini non si può applicare. Per dire se siamo nel caso a) o b) o c) devo analizzare meglio il sistema. Osservo allora che **i punti che verificano la prima equazione verificano anche la seconda, quindi il sistema è equivalente alla singola equazione** $F(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + 4z^2 = 0$, con $\nabla F(0,0,0) = (-2,0,0)$, quindi per il teorema del Dini essa individua una (unica) funzione $x = f(y,z)$ (porzione di superficie di un ellissoide) con grafico passante per il punto $(0,0,0)$ (vale quindi c)).

Se la prima equazione è sostituita da $x^2 - 2xy + y^2 + 4z^2 = 0$, si ottiene

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi essa non ha rango massimo. Analizzando in dettaglio la prima equazione, essa può essere riscritta nella forma $(x-y)^2 + 4z^2 = 0$ verificata da tutti e soli i punti della retta $x = y\,,\ z = 0$ (essa **non individua quindi una superficie, ma l'intersezione tra due superfici, pur essendo una singola equazione**). Sostituendo nella seconda equazione troviamo i punti $(-1,-1,0)\,,\ (0,0,0)\,,\ (1,1,0)$ (intersezione della retta con le superfici individuate dalla terza equazione: un ellissoide unito ad un piano). Pertanto non ci troviamo in nessuno dei casi previsti a), b), c).

- **4)** Trovare la minima distanza del punto $(1,0)$ dalla parabola $y^2 = 4x$.
- **5)** Calcolare estremo inferiore ed estremo superiore della funzione $f(x,y) := \frac{1}{y+1}$ nell'insieme $Z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y-x^2)(x^2+y^2-2y) = 0\}$.
- **6)** Sia S l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, \\ \qquad\qquad\; x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Trovare i punti di S che hanno distanza minima o massima dall'origine.

RISOLUZIONE: Dobbiamo studiare massimi e minimi della funzione $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (distanza dall'origine). Essi saranno assunti nei punti di massimo e minimo della funzione $x^2+y^2+z^2 = 1+z^2$ sul vincolo. Limitiamoci quindi allo studio di $f(x,y,z) \equiv 1 + z^2$. Inoltre, tenendo conto della seconda equazione del sistema, la prima può essere semplificata, ottenendo così il sistema più semplice

$$\begin{cases} z^2 = -xy, \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

Poniamo $\phi(x,y,z) \equiv z^2 + xy = 0$ e $\psi(x,y,z) \equiv x^2+y^2-1 = 0$. Osserviamo che quando il vincolo è dato da un **sistema**, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange può essere applicato nei **punti regolari** cioè, per definizione, nei punti **in cui il rango della matrice Jacobiana è uguale al numero di equazioni del sistema**, quindi in quelli in cui sono verificate le condizioni del Teorema del Dini, come nel caso della singola equazione.

In questo caso, per la matrice Jacobiana associata alla coppia di funzioni ϕ e ψ si ha

$$\begin{pmatrix} y & x & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \text{ non ha rango 2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2y^2 - 2x^2 = 0 \\ 4xz = 0 \\ 4yz = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \text{ e } y = \pm x \\ \text{o} \\ x = 0 \text{ e } y = 0\,,\ \forall z \end{cases},$$

ma nessuno di tali punti appartiene al vincolo, quindi il vincolo è regolare. Il vincolo è un insieme chiuso e limitato (la limitatezza di x e y dovuta alla seconda equazione, implica quella di z). Allora devono esistere massimo e minimo assoluto assunti in punti (x,y,z) che devono verificare il sistema seguente per qualche $\lambda\,,\ \mu \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{c} \nabla f + \lambda \nabla \phi + \mu \nabla \psi = \vec{0} \\ \phi = 0 \\ \psi = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \lambda y + 2\mu x = 0 \\ \lambda x + 2\mu y = 0 \\ 2z + 2\lambda z = 0 \\ z^2 + xy = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right. .$$

Si osservi che la terza equazione è verificata se $z = 0$ o $\lambda = -1$. Nel primo caso si ottiene

$$\left\{\begin{array}{c} z = 0 \\ xy = 0 \\ \lambda y = -2\mu x \\ \lambda x = -2\mu y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right. .$$

Tenendo conto della seconda equazione, dell'ultima e poi delle rimanenti, otteniamo

$$\left\{\begin{array}{c} z = 0\,, \quad x = 0 \\ y = \pm 1 \\ \lambda = 0\,, \quad \mu = 0 \end{array}\right. \quad \text{oppure} \quad \left\{\begin{array}{c} z = 0\,, \quad y = 0 \\ x = \pm 1 \\ \lambda = 0\,, \quad \mu = 0 \end{array}\right. ,$$

e quindi i punti $(0, \pm 1, 0)$ e $(\pm 1, 0, 0)$ in cui $f = 1$. Si tratta quindi di punti di minimo essendo $f \geq 1$. Nel caso $\lambda = -1$ otteniamo

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda = -1 \\ y = 2\mu x \\ x = 2\mu y = 4\mu^2 x \\ z^2 = -xy \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right. .$$

Se $x = 0$ ne segue anche $y = 0$ ma in questo caso l'ultima equazione non è verificata. Supponendo quindi $x \neq 0$ si ottiene

$$\left\{\begin{array}{c} x \neq 0\,, \quad \lambda = -1\,, \quad \mu = \pm\frac{1}{2} \\ y = \pm x \\ z^2 = \mp x^2 \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. .$$

La penultima equazione non può essere verificata con il segno $-$, quindi le due precedenti non possono essere verificate con il segno $+$. Pertanto otteniamo i punti $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ nei quali si ha $f = 1 + \frac{1}{2}$. Si tratta dei punti di massima distanza, come prima osservato. Poichè siamo interessati alla radice quadrata della funzione f, il valore minimo e massimo della distanza sono rispettivamente 1 e $\sqrt{\frac{3}{2}}$.