

Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Esercizi 8 — 2 Dicembre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

1) Calcolare i seguenti integrali utilizzando le coordinate polari (dove a è una costante positiva):

$$(i) \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy;$$

$$(ii) \int \int_D x dx dy, \text{ dove } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \leq -|y|\};$$

$$(iii) \int \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

dove D è la metà superiore (cioè con $y \geq 0$) del cerchio di centro l'origine e raggio a .

2) Calcolare il seguente integrale utilizzando le coordinate polari:

$$\int \int_C y dx dy,$$

dove C è la metà superiore (cioè con $y \geq 0$) del cerchio di centro $(a/2, 0)$ passante per l'origine.

3) Calcolare il seguente integrale utilizzando le coordinate polari:

$$\int \int_D \frac{x dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dove } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - 4(y-1)^2}\}.$$

4) Siano

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right) \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq y, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(i) Si dimostri che l'applicazione

$$g : \{(x, y) : x > 0, y > 0\} \rightarrow \{(u, v) : u > 0, v > 0\}$$

definita da $u(x, y) = \frac{y}{x}$ ed $v(x, y) = x^2 + y^2$ è un diffeomorfismo da D a $g(D)$.

(ii) Calcolare

$$\int \int_D f(x, y) dx dy.$$

5) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \int \int_T e^{x+y+z} dx dy dz$$

dove T è la piramide di vertice nell'origine $(0, 0, 0)$ e base con vertici nei punti $A = (0, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 1, 0)$ e $D = (1, 1, 2)$.

6) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \int \int_D z dx dy dz, \text{ dove } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \frac{x^2 + y^2}{3}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

7) Calcolare il volume di D , dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ utilizzando prima le coordinate cilindriche e poi quelle sferiche.

8) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \int_D e^x |xy - 1 - y| \frac{e^{2x} y^2}{x^2 (1 + y)^2} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq ye^x \leq 2, 2 \leq xy + x \leq 3\}$.