

Calcolo II, a.a. 2010-2011 — Esercizi 1 — 21 ottobre 2010

⊙ – 1) Calcolare le seguenti distanze e norme:

- (i) $d_\infty(x, y)$ dove $x = \{x_j\}$ e $y = \{y_j\}$ sono le successioni di ℓ^∞ definite da $x_j = (-1)^j$, $y_j = j/(j+1)$;
- (ii) $d_\infty(f, g)$ dove f, g sono le funzioni di $C^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ date da $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 4 - 3x$;
- (iii) $d_p(f, 0)$ dove f è la funzione di $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ data da $f(x) = x^\alpha$ (dove α è un numero reale positivo fissato).

⊙⊙ – 2) In quali dei seguenti casi la coppia (X, d) è uno spazio metrico?

- (i) X è l'insieme delle caselle di una scacchiera 8×8 , $d(x, y)$ è il numero minimo di salti che un cavallo (degli scacchi...) deve fare per passare dalla casella x a quella y .
- (ii) X è l'insieme degli intervalli chiusi e limitati di \mathbb{R} , e $d(I_1, I_2) = |I_1| + |I_2| - 2|I_1 \cap I_2|$, dove $|I|$ indica la lunghezza dell'intervallo. (⊙) Se è uno spazio metrico, è completo?
- (iii) X è l'insieme di tutti i polinomi di una variabile, e $d(P, Q)$ è data dalla somma dei moduli dei coefficienti di $P - Q$.

⊙ – 3) Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora per tutti i punti x, y, z vale la disuguaglianza

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

Dedurne che, per ogni $y \in X$ fissato, l'applicazione $x \mapsto d(x, y)$ è continua da X in \mathbb{R} .

⊙ – 4) Sia (X, d) uno spazio metrico, $x_0 \in X$ un punto fissato, e per ogni $x \in X$ definiamo una funzione ϕ_x da X a valori in \mathbb{R} come

$$\phi_x(y) = d(x_0, y) - d(x, y).$$

Dimostrare i fatti seguenti.

- (i) Per qualunque x , la funzione ϕ_x è continua e limitata, ossia ϕ_x è un elemento dello spazio metrico completo $Y = C_\ell(X, \mathbb{R})$. (Suggerimento: usare l'esercizio 3).
- (ii) Abbiamo dunque definito un'applicazione $i : X \rightarrow Y$ che al punto $x \in X$ associa la funzione $\phi_x \in Y$ con la metrica d_∞ . Dimostrare che i è un'isometria (conserva le distanze).
- (iii) Dedurne che ogni spazio metrico ammette un unico completamento a meno di isometrie.

⊙ – 5) Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Quali condizioni si devono mettere su φ affinché $d_1(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ e $d_2(x, y) = \varphi(|x - y|)$ siano due distanze su \mathbb{R} ?

⊙ – 6) Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che

$$\bar{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

è una distanza su X .

⊙ – 7) Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$, e sia $d(P, Q) = d_2(P, Q)$ se P e Q sono nello stesso quadrante, e $d(P, Q) = d_2(P, 0) + d_2(0, Q)$ se sono in quadranti diversi. Dimostrare che d è una distanza, e determinare $B_2((1, 0))$.

⊙ – 8) Sia $E = \ell^2$, e

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n).$$

Dimostrare che d è ben definita ma non è una distanza.

⊙ – 9) Dimostrare che è una contrazione su $(C^0([0, 1]; \mathbb{R}), d_\infty)$ la funzione

$$F : C^0([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1]; \mathbb{R})$$

$$f(x) \mapsto F(f(x)) = 1 + \int_0^x y f(y) dy, x \in [0, 1]$$

Trovare poi un punto fisso di F (suggerimento: derivando...).

⊙ – 10) Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ è una contrazione su $(C^0([0, 1]; \mathbb{R}), d_\infty)$ la funzione

$$F : C^0([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1]; \mathbb{R})$$

$$f(x) \mapsto F(f(x)) = e^{-\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy, x \in [0, 1]?$$