

Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Esercizi 1 — 7 Ottobre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

1) Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

$$f(x, y) = \log(xy) + \frac{1}{x} + \frac{2}{y^2} \quad ; \quad g(x, y) = \frac{\arcsin(x+y)}{3\sqrt{4-x^2-\frac{y^2}{4}}}$$

2) Dimostrare che i seguenti limiti non esistono

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y^2}{x^2+y^2} \quad ; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

3) Dire a cosa corrispondono le curve di livello delle seguenti funzioni

$$f(x, y) = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad g(x, y) = \tan(x^2 - y + 3)$$

4)

(i) Data la funzione $f(x, y) = y^2 - y^x + \cos\left(\frac{\log(x^2-3x)}{x^2+3x}\right)$ calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}$

(ii) Data la funzione $f(x, y) = y^2 \sin x$ calcolare $D f(\pi, -1)$

5) Calcolare, se esistono, le derivate direzionali delle seguenti funzioni

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad ; \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6) Determinare, se esiste, a in $\mathbb{R}$ tale che sia continua su $\mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y-\sin(x))}{e^{y-\sin(x)}-1} & \text{se } y > \sin(x) \\ a & \text{se } y \leq \sin(x) \end{cases}$$

7) Per quali valori del parametro reale α la funzione $f(x, y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \log(1+y)}{(x^2+\arctan^2 y)^\alpha} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

8) Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y < x^3 \\ y & \text{se } y \geq x^3 \end{cases}$$

9) Studiare la continuità e la differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ di:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+|y|} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

10) Sia f la funzione di due variabili definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{(\sin x)^2 + 2(\sin y)^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

dove $\alpha \geq 0$ è un parametro reale fissato. Determinare l'insieme di definizione di f . Inoltre determinare per quali valori di α la funzione è continua in 0, per quali valori è derivabile in 0, per quali valori è differenziabile in 0.