Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Esercizi 2 — 14 Ottobre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

1) Definita la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{per } y \neq 0 \\ 0 & \text{per } y = 0 \end{cases}$$

verificare che per $(x,y) \neq (x,0)$ si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ mentre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

2) (i) Definita la funzione $f(x,y) = \frac{x^2 y}{2} - x^2 + xy - 2x - y^2$ determinare l'equazione del piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(1,0)$.
(ii) Calcolare inoltre la derivata direzionale di f nel punto $(0,1)$ secondo la direzione $\lambda = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

3) (i) Calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, dove $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$, per $(x,y) \neq (0,0)$.
(ii) Nel caso in cui il limite l, di cui sopra, esista finito, prolungare con continuitá la funzione $f(x,y)$ nell'origine, ponendo $f(0,0) = l$ e calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$.
(iii) Stabilire se f cosí definita é differenziabile nell'origine.

4) Ripetere l'esercizio **3)** per la funzione $f(x,y) = y \log\left(2 + \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$, per $(x,y) \neq (0,0)$.

5) Verificare che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

é derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata discontinua in $x = 0$. Definita la funzione $f(x,y) = g(x) + g(y)$ dimostrare che f é differenziabile in $(0,0)$ pur avendo entrambe le derivate parziali discontinue in $(0,0)$.

6) Dimostrare che sono definite e differenziabili su $\mathbb{R}^2$ le funzioni

$$f(x,y) = \int_x^y \frac{\sin(t)}{t}\, dt\,, \qquad g(x,y) = \int_{x^2}^{y^2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\, dt\,.$$

7) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 + \alpha x + \beta y - e^{x+y}}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono parametri reali. Determinare per quali valori di α, β la funzione é continua, per quali valori é derivabile, per quali valori é differenziabile.

8) Studiare continuitá, derivabilitá e differenziabilitá in $\mathbb{R}^3$, al variare dei parametri $\alpha, \beta, \gamma > 0$, della funzione

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha\, |y|^\beta\, |z|^\gamma}{x^2+y^2+z^2} & \text{per } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$