Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Esercizi 3 — 21 Ottobre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

1) Determinare i punti stazionari della seguente funzione $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

2) Trovare (se esistono) il massimo e il minimo assoluti di $f(x,y) = 3x - 2y$ sull'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |\sin x|,\ x^2 + y^2 \leq 25,\ -\pi \leq x \leq \pi\}$$

facendo solo uso delle curve di livello di f e del fatto che il gradiente di f indica punto per punto la direzione di massimo accrescimento della funzione.

3) Determinare (se esistono) il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ nel campo $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$.

4) Calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $f(x,y) = \sin(e^x - x - \cos y)$ (con resto di Peano) nel punto $(0,0)$ e utilizzarlo per calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(e^x - x - \cos y)}{x^2 + y^2} .$$

5) Utilizzando i rispettivi polinomi di Taylor calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \sin(xy)}{x^2y^3} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y} - x\sin(xy) - 1}{(x^2+y^2)^2} .$$

6) Determinare se i seguenti insiemi sono aperti, chiusi, limitati, e/o compatti
(i) l'insieme di definizione della funzione $f(x,y) = \log\left[\sin(x^2+y^2)\right]$;
(ii) l'insieme di definizione della funzione $g(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;
(iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \sin\frac{1}{x}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, |y| \leq 1\}$.
Per gli aperti dire se sono connessi.

7) Dire se le seguenti funzioni sono omogenee. In tal caso determinare il loro dominio di definizione (verificando che si tratta di un cono) e il grado α di omogeneitá.

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2,\ g(x,y) = \frac{x^2 + 3y^2 + xy}{x^2},\ h(x,y) = \log\left(\frac{x-y}{y}\right),\ k(x,y) = \frac{1}{y^2} + \frac{\log x - \log y}{x^2} .$$

Infine verificare la validitá del teorema di Eulero per la funzione $k(x,y)$ (cioé verificare che $x\frac{\partial k}{\partial x} + y\frac{\partial k}{\partial y} = \alpha k$).

8) Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice omogenea di grado zero se é del tipo $f(x,y) = h\left(\frac{y}{x}\right)$ con $h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(i) Dimostrare che se esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ allora f é costante.
(ii) Scrivere l'espressione del gradiente di f in funzione di h, nell'ipotesi che h sia derivabile. Nel caso particolare in cui $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$ calcolare quindi il gradiente di f (sia applicando la formula appena trovata, sia scrivendo in funzione di x, y la funzione f e calcolandone direttamente il gradiente, ovviamente i risultati devono coincidere).

9) (i) Dare l' esempio di una $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e di un punto (x_0, y_0) tali che esista $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ e non esista $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
(ii) Esistono $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) tali che si abbia $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0, y_0) > 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^2$?

10) Utilizzando il teorema delle funzioni con gradiente nullo in un aperto connesso $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dimostrare per ogni $x > 0$, $y > 0$, l'identitá

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} .$$