

Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Esercizi 4 — 28 Ottobre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

- 1) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativo di $f(x, y) = \log(xy) + \frac{1}{x} + \frac{2}{y^2}$ in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} .$$

- 2) Determinare massimi e minimi, relativi ed assoluti (se esistono) della $f(x, y) = \sqrt{2(x+2y) - x^2 - 2y^2 - 1}$.

- 3) Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura $f(x, y) = \frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2}{2}$.
 (Suggerimento: uno dei punti critici presenta un “caso dubbio” ; per studiarlo ragionate opportunamente sul segno della funzione in un intorno di quel punto)

- 4) Determinare massimo e minimo assoluti (se esistono) di $f(x, y) = |x| + 2y^2 + x^2$ in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\} .$$

- 5) Determinare massimo e minimo assoluti (se esistono) di $f(x, y) = \sin(x+y) \cos(x-y)$ in $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

- 6) Sia

$$f(x, y) = \int_{\sin x}^{\sin y} e^{t^2} dt .$$

Determinare massimi e minimi, relativi ed assoluti (se esistono) di f in $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

- 7) Dati $P = (1, 1)$ e $Q = (3, 3)$ sia $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-3)^2 + (y-3)^2$ la funzione somma dei quadrati delle distanze euclidee di un punto generico (x, y) dai punti P e Q assegnati. Determinare se esistono massimo e minimo assoluti di f in $\mathbb{R}^2$. Che relazione c'è tra il punto di minimo trovato e i punti P e Q assegnati ?

Più in generale siano $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, per $i = 1, \dots, M$, M punti assegnati e sia

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^M \{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\} .$$

Che cosa vi aspettate rappresenti in questo caso generale il punto di minimo di f in $\mathbb{R}^3$?

- 8) Dimostrare che una funzione $f(x, y)$ continua in $\mathbb{R}^2$ tale che $\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$ ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$.

- 9) Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x + y & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

trovare (se esistono) massimo e minimo assoluti di f sul disco unitario $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- 10) Sia $E(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ dove (x_i, y_i) , per $i = 1, \dots, n$ sono n punti assegnati. Determinare il punto $(\bar{a}, \bar{b})$ di minimo di E in $\mathbb{R}^2$ (Osservazione: $y = \bar{a}x + \bar{b}$ è detta la retta di regressione nel metodo dei minimi quadrati).