Esonero
Analisi Matematica 2 (2011-2012)
17/11/2011

Nei seguenti quesiti a risposta multipla si indichi se le affermazioni fatte sono vere o false (indicando in modo chiaro con **v** le affermazioni vere, e con **f** quelle false)

Quesito A1 Sia $\{x_h\}$ una successione in $\mathbb{R}^n$.

1) Se $x_h \to x$ per $h \to \infty$, allora $\|x_h\| \to \|x\|$ per $h \to \infty$.
2) Se $\|x_h\| \to \|x\|$ per $h \to \infty$, allora $x_h \to x$ per $h \to \infty$.
3) Se x_h non ammette sottosuccessioni convergenti, allora $\|x_h\| \to \infty$ per $h \to \infty$.
4) Se x_h ammette una sottosuccessione convergente, allora esiste $c > 0$ tale che $\|x_h\| \leq c$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.

Quesito A2 Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := 4x + \frac{1}{3}y$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1) f è una norma.
2) Per ogni fissato $c > 0$ si ha $\frac{1}{c}\|(x, y)\| \leq f(x, y) \leq c\|(x, y)\|$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3) $\frac{1}{3}\|(x, y)\| \leq f(x, y) \leq 3\|(x, y)\|$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4) $\frac{1}{4}\|(x, y)\| \leq f(x, y) \leq 4\|(x, y)\|$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Quesito A3 Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una funzione.

1) Se f è differenziabile in $\mathbb{R}^n$ allora f è continua in $\mathbb{R}^n$.
2) Se per ogni versore $v \in \mathbb{R}^n$ (cioè vettore di norma uno) la funzione $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $g(t) = f(tv)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ è continua, allora f è continua in zero.
3) Se per ogni successione $\{x_h\}$ tale che $\|x_h\|^4 \to 0$ per $h \to \infty$ si ha $f(x_h) \to 0$ per $h \to \infty$, allora f è continua in zero.
4) Se f è continua in zero, e $\{x_h\}$ è una successione convergente a 0, allora esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_h) = f(x)$ per ogni $h \geq \overline{h}$.

Quesito A4 Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1) Allora il grafico della funzione $(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + < \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) >$ rappresenta il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2) Vale la seguente alternativa: o $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + < \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) >$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, oppure $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) + < \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) >$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3) Assumiamo che esista $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + < v, (x - x_0, y - y_0) >$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Allora $v = \nabla f(x_0, y_0)$.
4) Se $v \in \mathbb{R}^2$ è un versore (ossia di norma uno) parallelo a $\nabla f(x_0, y_0)$, allora $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial v} = \pm\|\nabla f(x_0, y_0)\|$.

Esercizio B1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} 2x^2 + y^2 & \text{se } x \leq 3y; \\ -2x^2 - y^2 & \text{se } x > 3y. \end{cases}$$

Si studi la continuità, derivabilità e differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio B2 Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := -x^4 + 2x^2 - y^2 + 4y \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Trovare i punti stazionari (ossia critici) di f, e per ognuno di essi si stabilisca se si stratti di punto di massimo relativo, massimo assoluto, minimo relativo, minimo assoluto o punto di sella.

Esercizio B3 Sia $\overline{B_1((2,0))} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$, e sia $g : \overline{B_1((2,0))} \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$g(x,y) := \frac{1}{2x+y} \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \overline{B_1((2,0))}.$$

Trovare il punto di massimo e di minimo assoluto di g (su $\overline{B_1((2,0))}$).