Secondo Esonero di Analisi Matematica 2 (2011-2012)
19/01/2012

COGNOME: __________________**NOME**: __________________**MATRICOLA**:______________

Mettere tra parentesi il proprio nome e cognome se non si vuole che il voto e il proprio nominativo compaiano sulla pagina dei risultati dell'esonero.

Nei seguenti quesiti a risposta multipla si indichi se le affermazioni fatte sono vere o false (indicando in modo chiaro con **V** le affermazioni vere, e con **F** quelle false)

Quesito A1 Sia $Q := (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$ e sia $F \in C^1(Q; \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale.

1) Se rot $F = 0$, allora F ammette una primitiva. ...
2) Se F è conservativo, allora rot $F = 0$. ...
3) Se $F = \nabla U$ per qualche $U \in C^1(Q; \mathbb{R})$, allora il lavoro di F su ogni cammino chiuso è nullo. ...
4) Se $F = \nabla U$ e $F = \nabla V$ per qualche U, $V \in C^1(Q; \mathbb{R})$, allora $U = V$. ...

Quesito A2 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato

1) Se E è misurabile (secondo Peano-Jordan) allora ∂E è misurabile. ...
2) Se ∂E è misurabile allora E è misurabile. ...
3) Se $\partial E \subset C$ dove C è misurabile e ha misura nulla, allora E è misurabile. ...
4) Se ∂E ha misura nulla, allora E ha misura nulla. ...

Quesito A3 Sia $F \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $F(x_0, y_0) = 0$.

1) Se $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$, allora $\nabla F(x_0, y_0)$ è ortogonale all'insieme $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ in (x_0, y_0). ...
2) Se $F_x(x_0, y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, allora la funzione $y(x)$ definita implicitamente dall' equazione $F(x, y) = 0$ ha un massimo locale in x_0. ...
3) Se $F_x(x_0, y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, allora esite una funzione $x(y)$ definita in un intorno di y_0, tale che $F(x(y), y) = 0$. ...
4) Se $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$, allora $\nabla F(x_0, y_0)$ è tangente all'insieme $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ in (x_0, y_0). ...

Quesito A4 Siano A e B aperti misurabili limitati di $\mathbb{R}^n$.

1) Sia $f \in C^1(A)$. Allora f è integrabile. ...
2) Sia $f \in C^0(\bar{A})$. Allora f è integrabile. ...
3) Se $|A \cup B| = |A| + |B|$, allora A e B sono disgiunti. ...
4) Sia f una funzione integrabile su A tale che $\int_A f(x)\,dx > 0$. Allora $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$. ...

COGNOME: ____________________**NOME**: ____________________**MATRICOLA**:______________

Esercizio B1 Sia F un campo di forze definito (nel suo dominio di definizione naturale) da

$$F(x,y) := \left(-\frac{2(x+y)}{x^2+y^2}, \frac{2(x-y)}{x^2+y^2}\right).$$

i) Stabilire se la forma differenziale associata a F è chiusa;

ii) Dire se il campo F ristretto a $B_3(4,0)$ è conservativo;

iii) Calcolare il lavoro compiuto da F lungo il cammino $\partial([-3,3]\times[-3,3])$ percorso in senso antiorario.

COGNOME: ____________________**NOME**: ____________________**MATRICOLA**:______________

Esercizio B2 Sia D l'aperto di $\mathbb{R}^2$ definito da $D := \{x > 4y^2\} \cap \{x < 4y\}$. Calcolare

$$\int_D 7xy \, dx \, dy.$$

COGNOME: ____________________**NOME**: ____________________**MATRICOLA**:______________

Esercizio B3 Al variare del parametro $\beta > 0$ stabilire se il seguente integrale improprio è finito o infinito.

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0,0)} \frac{1}{(x^2 + 3y^2)^\beta} \, dx\, dy.$$

Esercizio Facoltativo Sia $\{f_n\} \subset C^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^+)$ una successione di funzioni positive che convergono uniformemente a 0 in $\mathbb{R}^2$. Sia inoltre $\{a_m\}$ una successione infinitesima, e assumiamo che per ogni n, $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_m(0,0)} f_n(x, y)\, dx\, dy \leq a_m.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n(x, y)\, dx\, dy = 0.$$