FUNZIONI ELEMENTARI

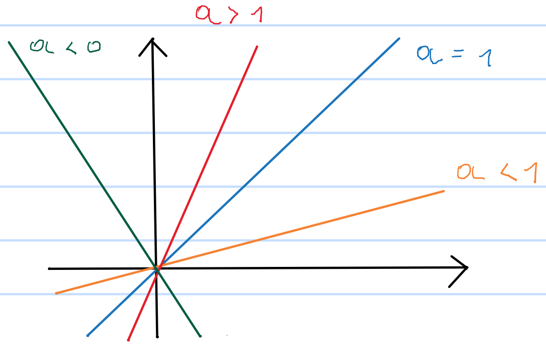
Descriviamo in dettaglio alcune funzioni; in particolare i polinomi di 1° e 2° grado, le potenze e radici ennesime, gli esponenziali e i logaritmi, e le funzioni trigonometriche.
Ricordiamo che un polinomio è una funzione del tipo $x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_0$, dove $n \in \mathbb{N}$ è il grado del polinomio.

FUNZIONI AFFINI

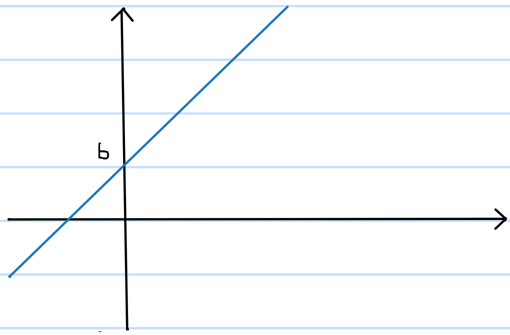
Le funzioni affini sono polinomi di grado uno, ossia funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ del tipo

$$f(x) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ fissati.}$$

Nel caso $a = 0$ abbiamo la funzione costante $f(x) = b \ \forall x \in \mathbb{R}$ (che si può considerare un polinomio di grado zero).
Consideriamo ora il caso $a \neq 0$. Inoltre consideriamo $b = 0$.



Allora $\Gamma(f)$ è una retta passante per l'origine.
a si chiama coefficiente angolare della retta. Al variare di a abbiamo un fascio di rette, contenute nel 1° e 3° quadrante se $a > 0$, e nel 2° e 4° quadrante se $a < 0$. Inoltre, se $|a|$ è grande $\Gamma(f)$ tende a essere verticale, mentre se $|a|$ è piccolo $\Gamma(f)$ tende a essere orizzontale.
Al variare di $a \in \mathbb{R}$, otteniamo tutte le rette passanti per l'origine tranne quella verticale, che formalmente corrisponderebbe a $a = \pm\infty$.



Consideriamo ora il caso generale $f(x) = ax + b$.
Osserviamo che il grafico di tale funzione differisce dal caso $b = 0$ solo per una traslazione verticale b.

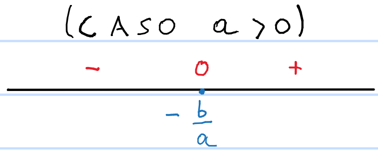
RIASSUMENDO Il coefficiente angolare a misura la pendenza del grafico, mentre il coefficiente b rappresenta una traslazione verticale del grafico.

PROPRIETÀ GENERALI $f(x) := ax + b$ con $a \neq 0$ è biettiva e monotona: è strettamente crescente se $a > 0$; strettamente decrescente se $a < 0$.

ZERI E DISEQUAZIONI Ponendo $f(x) = 0$, si ha $ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$.
Studiamo ora l'insieme di positività e negatività di f.

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff \begin{cases} x > -\frac{b}{a} & \text{se } a > 0; \\ x < -\frac{b}{a} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

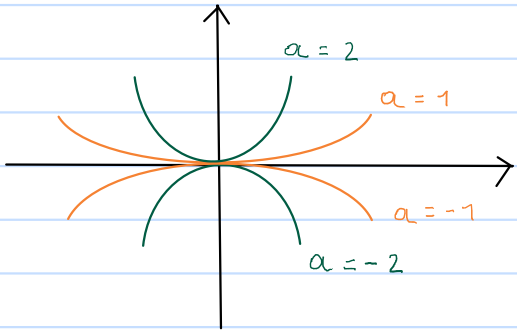
Questo risultato è coerente col fatto che se $a > 0$ allora f è crescente



Polinomi di 2° grado

Sono funzioni del tipo $f(x) := ax^2+bx+c$ $\forall x \in \mathbb{R}$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (se $a=0$ il grado del polinomio non è due).

Consideriamo per cominciare il caso $b=c=0$. In questo caso $\Gamma(f)$ è (per definizione!) una parabola, che risulta rivolta verso l'alto se $a>0$, verso il basso se $a<0$. Inoltre più è grande $|a|$, più la parabola risulta stretta. Osserviamo che $\Gamma(f)$ è pari: la parabola è simmetrica rispetto all'asse delle y.



Consideriamo ora il caso $f(x) = ax^2+c$ (ossia $b=0$). Questo caso è del tutto analogo al precedente, e $\Gamma(f)$ risulta semplicemente la traslata in verticale di c della parabola $f(x)=ax^2$.

Infine consideriamo il caso generale $f(x) = ax^2+bx+c$. L'idea è di scrivere

$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2+\tilde{c} \quad \text{con } x_0, \tilde{c} \text{ scelti opportunamente.}$$

Svolgendo i conti si ha $ax^2+bx+c = ax^2-2ax_0x+ax_0^2+\tilde{c}$. Basterà imporre

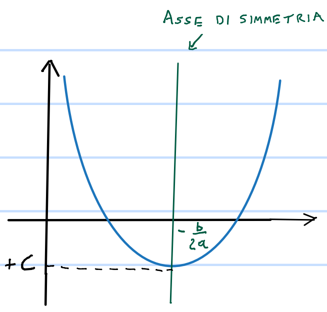
$$\begin{cases} -2ax_0 = b \\ \tilde{c} = -ax_0^2+c \end{cases} \iff x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad \tilde{c} = -\frac{b^2}{4a}+c.$$

Quindi il grafico di ax^2+bx+c coincide con una opportuna traslazione del grafico di ax^2. Infatti

$$(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma(ax^2+bx+c) \iff (\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma(a(x-x_0)^2+\tilde{c}) \iff \bar{y} = a(\bar{x}-x_0)^2+\tilde{c} \iff \bar{y}-\tilde{c} = a(\bar{x}-x_0)^2$$

$$(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma(ax^2+bx+c) \iff (\bar{x}-x_0, \bar{y}-\tilde{c}) \in \Gamma(ax^2)$$

Concludiamo che $\Gamma(ax^2+bx+c) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}+c\right) + \Gamma(ax^2)$

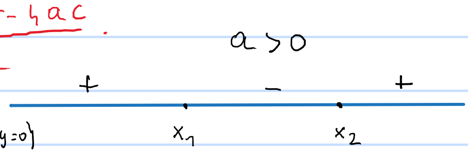


Proprietà generali $\Gamma(ax^2+bx+c)$ è una parabola con asse di simmetria verticale, passante in $(-\frac{b}{2a}, 0)$. Il punto $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}+c)$ è "il punto più basso" del grafico se $a>0$ (il più alto se $a<0$). Inoltre f non è monotona, ma chiaramente ammette due regioni di monotonia: $f|_{(-\frac{b}{2a}, +\infty)}$ è strettamente crescente se $a>0$, strettamente decrescente se $a<0$. (Mentre in $(-\infty, -\frac{b}{2a})$....)

Zeri e disequazioni Consideriamo il caso $b=0$. Allora $ax^2+c=0 \iff x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Nel caso generale usiamo che $\Gamma(ax^2+bx+c) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}+c) + \Gamma(ax^2)$. Cerchiamo prima gli zeri di $ax^2-\frac{b^2}{4a}+c$: $x = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$. Basterà semplicemente traslare tali zeri di $-\frac{b}{2a}$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

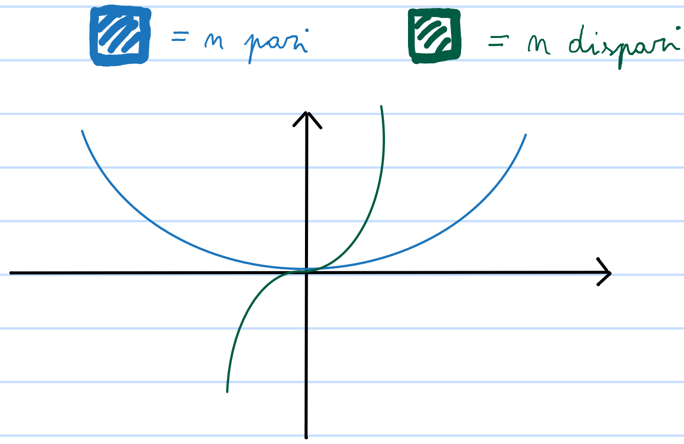


Se $b^2-4ac<0$ non vi sono soluzioni.

Se $b^2-4ac=0$ c'è un'unica soluzione (la parabola è tangente all'asse $\{y=0\}$)

Altrimenti ci sono 2 soluzioni $x_1<x_2$. In tal caso avremo, se $a>0$, $f(x)<0$ in (x_1,x_2), $f \geq 0$ altrove (mentre se $a<0$ ...)

Potenze e Radici Ennesime



Sia $n \in \mathbb{N}$, e sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^n \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Allora f è pari se n è pari, e f è dispari se n è dispari. Osserviamo che se n è pari $\Gamma(x^n)$ "assomiglia" qualitativamente a $\Gamma(x^2)$.
Osserviamo inoltre che se n è dispari x^n è strettamente crescente, e quindi iniettiva. Se n è pari $x^n\big|_{\mathbb{R}^+}$ (ristretta a $\mathbb{R}^+$) è strettamente crescente.

Definizione Sia $n \in \mathbb{N}$. La *radice ennesima* "$\sqrt[n]{x}$" è la funzione inversa di x^n se n è dispari, e di $x^n\big|_{\mathbb{R}^+}$ se n è pari.

Osserviamo che $\sqrt[n]{\ }: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se n è dispari, mentre $\sqrt[n]{\ }: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ se n è pari.

Esempio: La radice quadrata $\sqrt{x}$ è la funzione da $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}^+$ definita da
$\sqrt{x} = y \in \mathbb{R}^+ : y^2 = x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+.$

Conviene denotare $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Definizione: Sia $q \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{m_1}{m_2}$ con $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^+ (\neq 0)$. Allora

$$x^q := \sqrt[m_2]{x^{m_1}} = \left(x^{m_1}\right)^{\frac{1}{m_2}}.$$

definita da $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}^+$ se m_2 è pari, e da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ se m_2 è dispari.

Definizione: Sia $q = \frac{m_1}{m_2}$ come prima. Poniamo

$$x^{-q} := \frac{1}{x^q} \qquad \forall\, x \in \mathrm{Dom}(x^q) \setminus \{0\}.$$

Rimane il difficile compito di definire $x^\alpha \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$. Questo è tutt'altro che banale. L'idea è di approssimare α con un $q \in \mathbb{Q}$, e usare la nozione già definita di potenza con esponente razionale in $\mathbb{Q}$. Per formalizzare questa idea intuitiva serve il concetto di limite.