

Primo esame scritto di Analisi Matematica 2 (2011-2012)

30/01/2012

COGNOME: _____ NOME: _____ MATRICOLA: _____

Mettere tra parentesi il proprio nome e cognome se non si vuole che il voto e il proprio nominativo compaiano sulla pagina dei risultati dello scritto.

Nei seguenti quesiti a risposta multipla si indichi se le affermazioni fatte sono vere o false (indicando in modo chiaro con **V** le affermazioni vere, e con **F** quelle false)

Quesito A1 Sia l^1 lo spazio delle successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $\sum_n |a_n| < \infty$.

1) Sia $T : l^1 \mapsto l^1$ definito da

$$T(\{a_n\}) = \{1, a_1, a_2, \dots\},$$

ossia $T(\{a_n\})$ e' la successione che ad ogni $n \geq 2$ associa a_{n-1} , a che ad 1 associa 1. Allora T ammette un punto fisso, ossia esiste $\{a_n\} \in l^1$ tale che $T\{a_n\} = \{a_n\}$

2) Sia $T : l^1 \mapsto l^1$ definito da

$$T(\{a_n\}) = \{7, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\},$$

ossia $T(\{a_n\})$ e' la successione che ad ogni $n \geq 2$ associa a_n/n , a che ad 1 associa 7. Allora T ammette un punto fisso, ossia esiste $\{a_n\} \in l^1$ tale che $T\{a_n\} = \{a_n\}$

Quesito A2 Sia $E_0 \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme di livello definito da

$$E_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 4y^2 = 2\}.$$

1) Allora risulta definita una funzione implicita $y(x)$ in un intorno del punto $(0, -1/\sqrt{2})$. Inoltre tale funzione ammette minimo locale in 0

2) Allora risulta definita una funzione implicita $x(y)$ in un intorno del punto $(1, 0)$. Inoltre tale funzione ammette massimo locale in 0

Quesito A3 Sia $f \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, e sia $E \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], (x, y) - f(z) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$$

1) Allora E è misurabile secondo Peano-Jordan, e inoltre $|E| = 1$...

2) Allora E è misurabile secondo Peano-Jordan, e la sua misura è data dalla formula

$$|E| = \int_0^1 \left| \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right| dz \quad \dots$$

COGNOME: _____ NOME: _____ MATRICOLA: _____

Esercizio B1 Sia $F \in C^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ un campo di forze definito da

$$F(x, y) := (x^4 - y, x + y^4).$$

- i) Stabilire se la forma differenziale associata a F è chiusa;
- ii) Calcolare il flusso di F uscente dalla circonferenza unitaria $\partial B_1(0)$.
- iii) Calcolare il lavoro compiuto da F lungo la circonferenza unitaria $\partial B_1(0)$ percorsa in senso antiorario.

COGNOME: _____ NOME: _____ MATRICOLA: _____

Esercizio B2 Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0); \mathbb{R})$ definita da

$$f(x, y) := \sin x + \cos y + \frac{x}{|x|}(x^2 + y^4)$$

- i) Stabilire se f può essere estesa ad una funzione continua su tutto \mathbb{R}^2 .
- ii) Stabilire se f può essere estesa ad una funzione differenziabile su tutto \mathbb{R}^2 .
- iii) Determinare se il grafico di f ammette un piano tangente nel punto $(0, 0, 1)$, e in caso affermativo scrivere l'equazione di tale piano.

COGNOME: _____ NOME: _____ MATRICOLA: _____

Esercizio B3 Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 3\}.$$

Sia inoltre $f \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ definita da

$$f(x, y, z) := e^z$$

Si determinino i punti di minimo e di massimo vincolato della funzione f su E , e specificare se si tratta di minimi o massimi assoluti o relativi.

COGNOME: _____ NOME: _____ MATRICOLA: _____

Esercizio B4 Sia D l'aperto di \mathbb{R}^3 definito da

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 2, z \in (0, 1)\}.$$

Calcolare

$$\int_D z^2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) dx dy dz.$$

Esercizio Facoltativo Sia C un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^n , e sia $N : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una norma su \mathbb{R}^n . Infine, poniamo

$$\text{dist}(x, C) := \inf_{y \in C} N(x - y).$$

Dimostrare che esiste sempre un elemento $y \in C$ di minima distanza, ossia dimostrare che l'estremo inferiore nella formula è in realtà un minimo.