Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Soluzioni 8 — 2 Dicembre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

1) Calcolare i seguenti integrali utilizzando le coordinate polari (dove a é una costante positiva):

$$(i) \quad \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy;$$

$$(ii) \quad \int\int_D x dx dy \ , \text{ dove } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 2, x \le -|y|\} \ ;$$

$$(iii) \int\int_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

dove D è la metà superiore (cioé con $y \ge 0$) del cerchio di centro l'origine e raggio a.

(i) Dopo aver osservato che il dominio di integrazione corrisponde al quarto della circonferenza di centro l'origine e raggio a che stá nel primo quadrante si ha

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{\pi}{2} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^a = \frac{\pi a^3}{6} \ .$$

(ii)

$$\int\int_D x dx dy = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos\theta d\rho = \left(\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \cos\theta d\theta\right)\left(\int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho\right) =$$

$$= \sin\theta\Big|_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\rho^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}(1-2\sqrt{2}) \ .$$

(iii)

$$\int\int_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho = -\frac{\pi}{2}\int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}(-2\rho) d\rho = -\frac{\pi}{2} \frac{(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{\pi a^3}{3} \ .$$

2) Calcolare il seguente integrale utilizzando le coordinate polari:

$$\int\int_C y\, dx\, dy,$$

dove C è la metà superiore (cioè con $y \ge 0$) del cerchio di centro $(a/2, 0)$ passante per l'origine.

Usando le coordinate polari centrate nell'origine per ogni angolo θ la massima distanza dei punti di C dall'origine é assunta sul bordo della circonferenza di centro $(a/2, 0)$ e raggio $\frac{a}{2}$, di equazione $(x-\frac{a}{2})^2+y^2 = \frac{a^2}{4}$ cioé anche $x^2-ax+y^2 = 0$. Poiché in coordinate polari si ha $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, la precedente equazione nelle nuove variabili diventa $\rho^2 - a\rho\cos\theta = 0$ cioé i punti del bordo della circonferenza di centro $(a/2, 0)$ e raggio $\frac{a}{2}$ sono identificati dalla condizione $\rho = a\cos\theta$. Si ha quindi

$$\int\int_C y\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \rho^2 \sin\theta d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \ \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{a\cos\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \ \frac{a^3\cos^3\theta}{3}\ d\theta = -\frac{a^3}{3}\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{12} \ .$$

In alternativa si potevano usare le coordinate polari centrate nel punto $(\frac{a}{2}, 0)$ di equazioni quindi $(x,y) = (\rho\cos\theta + \frac{a}{2}, \rho\sin\theta)$ e tali che ancora $dxdy = \rho d\rho d\theta$, in tal caso si aveva

$$\int\int_C y\, dx\, dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^{\frac{a}{2}} \rho^2 \sin\theta d\rho = -\cos\theta\Big|_0^\pi \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\frac{a}{2}} = 2\frac{a^3}{24} = \frac{a^3}{12} \ .$$

3) Calcolare il seguente integrale utilizzando le coordinate polari:

$$\int\int_D \frac{x\, dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \text{ dove } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 2, 0 \le x \le \sqrt{4-4(y-1)^2}\} \ .$$

Per prima cosa D rappresenta il quarto dell'ellisse, centrata nel punto $(0,1)$ con semiasse maggiore lungo 2 lungo l'asse x e semiasse minore lungo 1 lungo l'asse y, in cui $x \geq 0$ e $y \geq 1$.
Usando le coordinate polari centrate nell'origine per ogni angolo θ la massima distanza dei punti di D dall'origine é assunta sul bordo dell'ellisse di equazione $x^2+4(y-1)^2 = 4$, e la minima distanza dei punti di D dall'origine é assunta sulla retta $y = 1$. Poiché in coordinate polari si ha $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, l' equazione dell'ellisse nelle nuove variabili diventa $\rho^2 + 3\rho^2\sin^2\theta - 8\rho\sin\theta = 0$ cioé anche $\rho(1 + 3\sin^2\theta) - 8\sin\theta = 0$, quindi i punti dell'ellisse sono identificati dalla condizione $\rho = \frac{8\sin\theta}{1+3\sin^2\theta}$. Analogamente l' equazione della retta $y = 1$ nelle nuove variabili diventa $\rho\sin\theta = 1$ cioé anche $\rho = \frac{1}{\sin\theta}$. Il valore massimo di θ assunto dai punti su D é $\frac{\pi}{2}$, quello minimo é assunto nel punto intersezione tra la retta e l'ellisse, si tratta quindi di θ_0 tale che $\frac{1}{\sin\theta_0} = \frac{8\sin\theta_0}{1+3\sin^2\theta_0}$ cioé θ_0 é caratterizzato dal fatto che $\sin\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Detto ció l'integrale diviene:

$$\int\int_D \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{\frac{8\sin\theta}{1+3\sin^2\theta}} \rho\cos\theta d\rho = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{\frac{1}{\sin\theta}}^{\frac{8\sin\theta}{1+3\sin^2\theta}} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left(\frac{64\sin^2\theta}{(1+3\sin^2\theta)^2} - \frac{1}{\sin^2\theta}\right) d\theta = \int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{1} \frac{32t^2}{(1+3t^2)^2}dt + \left.\frac{1}{2\sin\theta}\right|_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} = \int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{1} \frac{16}{3}t\frac{(6t)}{(1+3t^2)^2}dt + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} =$$

$$= -\frac{16}{3}t\left.\frac{1}{1+3t^2}\right|_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{1} + \frac{16}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{1} \frac{1}{1+3t^2}dt + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{16}{3\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}t)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{1} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} =$$

$$= -\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{16}{3\sqrt{3}}\left[\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})\right] .$$

4) Siano

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right)\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq y, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\} .$$

(i) Si dimostri che l'applicazione

$$g : \{(x, y) : x > 0, y > 0\} \to \{(u, v) : u > 0, v > 0\}$$

definita da $u(x, y) = \frac{y}{x}$ ed $v(x, y) = x^2 + y^2$ é un diffeomorfismo da D a $g(D)$.
(ii) Calcolare

$$\int\int_D f(x, y)dxdy .$$

(i) Per prima cosa é facile verificare che g é una applicazione C^1 nell'insieme $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, inoltre lo Jacobiano di g é

$$J_g = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

per cui $|detJg| = \frac{2(x^2+y^2)}{x^2}$ é sempre diverso da zero nell'insieme $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$. Per il teorema della funzione inversa ció garantisce che g sia localmente un diffeomorfismo (cioé invertibile e tale che g e g^{-1} siano applicazioni C^1). Poiché inoltre é facile verificare che esiste una corrispondenza biunivoca tra la frontiera di D e la frontiera di $g(D)$, l'applicazione g definisce in realtá un diffeomorfismo (globale) da D a $g(D)$.
(ii) Dal punto (i) si deduce che $dxdy\frac{2(x^2+y^2)}{x^2} = dudv$ cioé anche che $dxdy = \frac{1}{2(1+u^2)}dudv$ quindi poiché nelle nuove variabili $g(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, \frac{1}{4} \leq v \leq 1\}$ si ha

$$\int\int_D \sin\left(\frac{y}{x}\right)\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int_0^1 du \int_{\frac{1}{4}}^{1} (\sin u)(1+u^2)\frac{\ln v}{\sqrt{v}}\frac{1}{2(1+u^2)}dv =$$

$$= \left(\int_0^1 (\sin u)du\right)\left(\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{\ln v}{2\sqrt{v}}dv\right) = (1-\cos 1)\left(\sqrt{v}\ln v\Big|_{\frac{1}{4}}^{1} - \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{v}\sqrt{v}dv\right) =$$

$$= (1-\cos 1)\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right) - 2\sqrt{v}\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}\right) = (1-\cos 1)\left(\frac{1}{2}\ln 4 - 2 + 1\right) = (1-\cos 1)(\ln 2 - 1)\ .$$

5) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int\int_T e^{x+y+z} dxdydz$$

dove T e' la piramide di vertice nell'origine $(0,0,0)$ e base con vertici nei punti $A=(0,1,0)$, $B=(0,1,1)$, $C=(1,1,0)$ e $D=(1,1,2)$.

Il dominio di integrazione é un dominio normale rispetto al piano x,y, con base descritta dal triangolo con vertici in 0, A e C, cioé dall'insieme $\{(x,y,0): 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$, e quota massima descritta dal piano passante per i punti 0, B e D, di equazione $z = x+y$. Si ha quindi

$$\int\int\int_T e^{x+y+z} dxdydz = \int_0^1 dy \int_0^y dx \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dz = \int_0^1 dy \int_0^y e^{x+y+z}\Big|_0^{x+y} dx = \int_0^1 dy \int_0^y (e^{2(x+y)} - e^{x+y}) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{e^{2(x+y)}}{2} - e^{x+y}\right)\Big|_0^y dy = \int_0^1 \left(\frac{e^{4y}}{2} - e^{2y} - \frac{e^{2y}}{2} + e^y\right) dy = \left(\frac{e^{4y}}{8} - \frac{3}{4}e^{2y} + e^y\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{e^4}{8} - \frac{3}{4}e^2 + e - \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - 1\right) = -\frac{3}{8} + \frac{e^4}{8} - \frac{3}{4}e^2 + e\ .$$

6) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int\int_D z dxdydz \quad , \text{ dove } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge \frac{x^2+y^2}{3}, x^2+y^2+z^2 \le 4\}\ .$$

Utilizzando le coordinate cilindriche si ha

$$D = \{(\rho,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi\ , \frac{\rho^2}{3} \le z \le \sqrt{4-\rho^2}\ , 0 \le \rho \le \sqrt{3}\}\ ;$$

il valore massimo di ρ si ottiene infatti quando l'intervallo di z é vuoto cioé quando $\frac{\rho^2}{3} = \sqrt{4-\rho^2}$, cioé quando $\frac{\rho^4}{9} = 4-\rho^2$, quindi $\rho^4 + 9\rho^2 - 36 = 0$, quindi $\rho^2 = -12$ (impossibile) o $\rho^2 = 3$ da cui $\rho = \sqrt{3}$. Essendo inoltre $dxdydz = \rho d\theta d\rho dz$, si ha quindi

$$\int\int\int_D z dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\ \frac{z^2}{2}\Big|_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho =$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left((4-\rho^2) - \frac{\rho^4}{9}\right) d\rho = \pi \left[\frac{(4-\rho^2)^2}{-4} - \frac{\rho^6}{54}\right]\Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi\left(-\frac{1}{4} - \frac{27}{54} + \frac{16}{4}\right) = \frac{13}{4}\pi\ .$$

7) Calcolare il volume di D, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 1, x^2+y^2+z^2 \le 4\}$ utilizzando prima le coordinate cilindriche e poi quelle sferiche.

Utilizzando le coordinate cilindriche si ha

$$D = \{(\rho,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi\ , 1 \le z \le \sqrt{4-\rho^2}\ , 0 \le \rho \le \sqrt{3}\}\ ;$$

il valore massimo di ρ si ottiene infatti quando l'intervallo di z é vuoto cioé quando $1 = \sqrt{4-\rho^2}$, cioé quando $\rho^2 = 3$ da cui $\rho = \sqrt{3}$. Essendo inoltre $dxdydz = \rho d\theta d\rho dz$, si ha quindi

$$V(D) = \int\int\int_D dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_1^{\sqrt{4-\rho^2}} dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\left(\sqrt{4-\rho^2} - 1\right) d\rho =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{8}{3}\right) = \frac{5}{3}\pi\ .$$

Utilizzando invece le coordinate sferiche $(x,y,z) = (\rho\sin\psi\cos\theta, \rho\sin\psi\sin\theta, \rho\cos\psi)$ si ha

$$D = \{(\rho,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi\ , 0 \le \psi \le \frac{\pi}{3}\ , \frac{1}{\cos\psi} \le \rho \le 2\}\ ;$$

il valore minimo di ρ si ottiene infatti quando $z = 1$ cioé quando $\rho = \frac{1}{\cos\psi}$; il valore massimo di ψ si ottiene invece quando l'intervallo di ρ é vuoto cioé quando $\cos\psi = \frac{1}{2}$, cioé quando $\psi = \frac{\pi}{3}$. Essendo inoltre $dxdydz = \rho^2 \sin\psi d\theta d\rho d\psi$, si ha quindi

$$V(D) = \int\int\int_D dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\psi d\psi \int_{\frac{1}{\cos\psi}}^2 \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin\psi) \frac{\rho^3}{3}\Big|_{\frac{1}{\cos\psi}}^2 d\psi =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\psi \left(8 - \frac{1}{\cos^3\psi}\right) d\psi = \frac{2\pi}{3}\left(-8\cos\psi - \frac{1}{2\cos^2\psi}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3}\left(-4 - 2 + 8 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{3}.$$

8) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_D e^x |xy - 1 - y| \frac{e^{2x} y^2}{x^2(1+y)^2} dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq ye^x \leq 2, 2 \leq xy + x \leq 3\}$.

Il cambio di variabile suggerito dal dominio é il seguente $g : \{(x, y) : x > 0, y > 0\} \to \{(u, v) : u > 0, v > 0\}$, definito da $u(x, y) = ye^x$ ed $v(x, y) = x(1 + y)$. Si osservi infatti che le y in D sono sicuramente positive a causa della disequazione $ye^x \geq 1$ caratterizzante D, ció implica inoltre che dalla disequazione $x(y + 1) \geq 2$ anche le x lo sono. Lo Jacobiano di g é

$$J_g = \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ (1+y) & x \end{pmatrix}$$

per cui $|detJg| = e^x|xy - 1 - y|$. Il determinante é nullo per $x \neq 1$ e $y = \frac{1}{x-1}$, quindi per $x > 1$ e $y = \frac{1}{x-1}$ essendo in D ammessi solo punti ad ordinata positiva. Poiché per ogni $x > 0$, $e^x \geq x + 1$ ed $x + 1 > 2(x - 1)$ se $x < 3$ (verificata dai punti di D dato che $xy > 0$ implica $x < xy + x \leq 3$) allora $ye^x > 2$ se $x > 1$ e $y = \frac{1}{x-1}$; cioé in D il determinante di g non é mai nullo. Per il teorema della funzione inversa ció garantisce che g sia localmente un diffeomorfismo. Poiché inoltre é facile verificare che esiste una corrispondenza biunivoca tra la frontiera di D e la frontiera di $g(D)$, l'applicazione g definisce in realtá un diffeomorfismo (globale) da D a $g(D)$. Si ha inoltre che $e^x|xy - 1 - y|dxdy = dudv$, come conseguenza del calcolo di $|detJ_g|$, e che $g(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, 2 \leq v \leq 3\}$, da cui

$$\int\int_D e^x|xy - 1 - y| \frac{e^{2x}y^2}{x^2(1+y)^2} dxdy = \int_1^2 du \int_2^3 \frac{u^2}{v^2} dv = \left(\frac{u^3}{3}\Big|_1^2\right)\left(-\frac{1}{v}\Big|_2^3\right) = \frac{7}{3}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{18}\ .$$