Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Soluzioni 9 — 9 Dicembre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

1) Calcolare (se esiste)

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} \ .$$

Il dominio di integrazione é un dominio illimitato e la funzione da integrare é una funzione positiva. Poiché

$$\int\int_{x^2+y^2\le R^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^2} = 2\pi \frac{(1+\rho^2)^{-1}}{-2}\Big|_0^R = -\pi\left(\frac{1}{1+R^2}-1\right) \ ,$$

e il seguente limite

$$\lim_{R\to+\infty} \int\int_{x^2+y^2\le R^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} \ = \lim_{R\to+\infty} -\pi\left(\frac{1}{1+R^2}-1\right) = \pi$$

esiste, da ció si deduce che esiste l'integrale improprio e si ha

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} = \lim_{R\to+\infty} \int\int_{x^2+y^2\le R^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} = \pi \ .$$

2) Si dica se é sommabile sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge y^2, y \ge 0\}$ la funzione

$$f(x,y) = 2ye^{-x}\cos(x+y^2) \ .$$

Il dominio di integrazione é un dominio illimitato e la funzione da integrare é una funzione che cambia segno in D. Poiché $|f(x,y)| \le 2|y|e^{-x} = 2ye^{-x}$ in D, la funzione f é sommabile in D se é sommabile in D la funzione $g(x,y) := 2ye^{-x}$. Definito $D_k := D \cap [0,k] \times \mathbb{R}^+$, poiché

$$\int\int_{D_k} g(x,y)dxdy = \int_0^k dx \int_0^{\sqrt{x}} 2ye^{-x}dy = \int_0^k e^{-x} \ y^2\Big|_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^k xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int_0^k (-e^{-x})dx =$$

$$= -e^{-x}(x+1)\Big|_0^k = -e^{-k}(k+1)+1 \ ,$$

e il seguente limite

$$\lim_{k\to+\infty} \int\int_{D_k} g(x,y)dxdy \ = \lim_{k\to+\infty} -e^{-k}(k+1)+1 = 1$$

esiste, da ció si deduce che g é sommabile in D e si ha

$$\int\int_D g(x,y)dxdy = \lim_{k\to+\infty} \int\int_{D_k} g(x,y)dxdy = 1 \ .$$

Essendo g sommabile in D anche f lo é.

3) Si dica se é sommabile sull'insieme $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ la funzione $f(x,y) = \frac{x^2\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$. In caso affermativo si calcoli $\int\int_B f(x,y)dxdy$.

Il dominio di integrazione é un dominio limitato ma la funzione f é illimitata in un intorno dell'origine ed é non positiva in tutto B. Poiché

$$\int\int_{\epsilon^2\le x^2+y^2\le 1} |f(x,y)|dxdy = -\int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1 \frac{\rho^2\cos^2\theta\ln(\rho^2)}{\rho^2}\rho d\rho d\theta = -\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\right)\left(\int_\epsilon^1 \ln(\rho^2)\rho d\rho\right) =$$

$$= -\left(\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta\right)\left(\int_\epsilon^1 \ln(\rho^2)\rho d\rho\right) = -\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\ln(\rho^2)\Big|_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \frac{\rho^2}{2}\frac{2\rho}{\rho^2}d\rho\right) =$$

$$= -\pi\left(\frac{\rho^2}{2}(\ln(\rho^2)-1)\Big|_\epsilon^1\right) = -\pi\left(-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon^2}{2}(\ln(\epsilon^2)-1)\right) \ ,$$

e il seguente limite

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\int_{\epsilon^2\le x^2+y^2\le 1} |f(x,y)|dxdy \ = \lim_{\epsilon\to 0} -\pi\left(-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon^2}{2}(\ln(\epsilon^2)-1)\right) = \frac{\pi}{2}$$

esiste, da ció si deduce che f é sommabile in B e si ha

$$\int\int_B |f(x,y)|dxdy = \lim_{\epsilon\to 0}\int\int_{\epsilon^2\le x^2+y^2\le 1}|f(x,y)|dxdy = \frac{\pi}{2}\ .$$

4) Si dica se é sommabile sull'insieme $Q=[0,1]\times[0,1]$ la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2} & \text{se } 0<x<y<1\ ,\\ -\frac{1}{x^2} & \text{se } 0<y<x<1\ ,\\ 0 & \text{altrove}\ .\end{cases}$$

Verificare che tuttavia esistono $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$ e $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx$; che cosa succede ?

Il dominio di integrazione é un dominio limitato ma la funzione f é illimitata in un intorno dell'origine ed inoltre cambia segno in Q. In particolare si ha

$$f^+(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2} & \text{se } 0<x<y<1\ ,\\ 0 & \text{altrove}\ ;\end{cases}$$

ed

$$f^-(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & \text{se } 0<y<x<1\ ,\\ 0 & \text{altrove}\ .\end{cases}$$

Verifichiamo per prima cosa se la parte positiva di f, denotata con $f^+(x,y)$, é sommabile in Q. A tal fine consideriamo la funzione

$$\int\int_{[0,1]\times[\epsilon,1]} f^+(x,y)dxdy = \int_\epsilon^1 dy\int_0^y \frac{1}{y^2}dx = \int_\epsilon^1 \frac{1}{y}dy = -\ln(\epsilon)$$

Poiché

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\int_{[0,1]\times[\epsilon,1]} f^+(x,y)dxdy = \lim_{\epsilon\to 0} -\ln(\epsilon) = +\infty\ ,$$

se ne deduce che $f^+(x,y)$ non é sommabile in Q. Analogamente si dimostra che anche la parte negativa di f, denotata con $f^-(x,y)$ non é sommabile in Q. Di conseguenza la funzione f assegnata non é né sommabile né integrabile in Q (cioé non esiste finito $\int\int_Q |f(x,y)|dxdy$ e non é neanche ben definito $\int\int_Q f(x,y)dxdy$). Si puó verificare che tuttavia esiste

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy = \int_0^1\left[\int_0^y \frac{1}{y^2}dx + \int_y^1\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\right]dy = \int_0^1\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\Big|_y^1\right]dy =$$

$$= \int_0^1\left[\frac{1}{y}+1-\frac{1}{y}\right]dy = \int_0^1 dy = 1\ .$$

Inoltre si puó verificare che esiste anche

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx = \int_0^1\left[\int_x^1 \frac{1}{y^2}dy + \int_0^x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dy\right]dx = \int_0^1\left[-\frac{1}{y}\Big|_x^1 - \frac{1}{x}\right]dx =$$

$$= \int_0^1\left[-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right]dx = -\int_0^1 dx = -1\ .$$

Accade peró che $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy \neq \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx$.

5) Calcolare (se esiste)

$$\int\int_D \frac{x+1}{y}dxdy$$

dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le y^2, 0\le y\le 1\}$.

Il dominio di integrazione é un dominio limitato ma la funzione $f(x,y) := \frac{x+1}{y}$ é illimitata per y vicino a zero ed é positiva in tutto D. Poiché

$$\int\int_{\{\epsilon\le y\le 1, 0\le x\le y^2\}} f(x,y)dxdy = \int_\epsilon^1 dy \int_0^{y^2} \frac{x+1}{y}dx = \int_\epsilon^1 \frac{1}{y}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^{y^2} dy = \int_\epsilon^1 \frac{1}{y}\left(\frac{y^4}{2}+y^2\right)dy =$$

$$= \int_\epsilon^1 \left(\frac{y^3}{2}+y\right)dy = \left[\frac{y^4}{8}+\frac{y^2}{2}\right]\Big|_\epsilon^1 = \frac{5}{8} - \frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^2}{2} \ ,$$

e il seguente limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\int_{\{\epsilon\le y\le 1, 0\le x\le y^2\}} f(x,y)dxdy \ = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{5}{8} - \frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^2}{2} = \frac{5}{8}$$

esiste, da ció si deduce che f é sommabile in D e si ha

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \lim_{\epsilon\to 0}\int\int_{\{\epsilon\le y\le 1, 0\le x\le y^2\}} f(x,y)dxdy = \frac{5}{8} \ .$$

6) Calcolare (se esiste)

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x+y)}dxdy \ .$$

Il dominio di integrazione é un dominio illimitato e la funzione da integrare é una funzione positiva. Poiché per ogni $R > 0$

$$\int\int_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-(x+y)}dxdy = \left(\int_{-R}^R e^{-x}dx\right)\left(\int_{-R}^R e^{-y}dy\right) = \left(-e^{-x}\Big|_{-R}^R\right)\left(-e^{-y}\Big|_{-R}^R\right) = (e^R - e^{-R})^2 \ ,$$

e si ha

$$\lim_{R\to+\infty}\int\int_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-(x+y)}dxdy = \lim_{R\to+\infty}(e^R - e^{-R})^2 = +\infty$$

da ció si deduce che la funzione $e^{-(x+y)}$ non é sommabile su $\mathbb{R}^2$.

7) Si dica se é sommabile sull'insieme $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 1, y\ge x^2\}$ la funzione $f(x,y) = \frac{1}{x^4+y^2}$.

Il dominio di integrazione é un dominio illimitato e la funzione f é una funzione positiva in D. Poiché per ogni $R > 0$

$$\int\int_{\{1\le x\le R, x^2\le y\le R^2\}} \frac{dxdy}{x^4+y^2} = \int_1^R dx\int_{x^2}^{R^2}\frac{dy}{x^4+y^2} = \int_1^R dx\int_{x^2}^{R^2}\frac{dy}{x^4\left(1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2\right)} =$$

$$= \int_1^R \frac{\arctan\left(\frac{y}{x^2}\right)}{x^2}\Big|_{x^2}^{R^2} dx = \int_1^R \frac{\arctan\left(\frac{R^2}{x^2}\right) - \frac{\pi}{4}}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{R^2}{x^2}\right)\Big|_1^R + \int_1^R \frac{1}{x}\frac{\frac{-2R^2}{x^3}}{1+\frac{R^4}{x^4}}dx + \frac{\pi}{4}\frac{1}{x}\Big|_1^R =$$

$$= -\frac{\pi}{4R} + \arctan(R^2) + \int_1^R \frac{-2R^2}{x^4+R^4}dx + \frac{\pi}{4R} - \frac{\pi}{4} \le \arctan(R^2) \ ,$$

(eliminando i contributi negativi) e osservando che

$$\lim_{R\to+\infty}\int\int_{\{1\le x\le R, x^2\le y\le R^2\}} f(x,y)dxdy \le \lim_{R\to+\infty}\arctan(R^2) = \frac{\pi}{2}$$

si deduce che la funzione $f(x,y)$ assegnata é sommabile su D.

8) Calcolare (se esiste)

$$\int\int_B \ln\sqrt{x^2+y^2}dxdy \ ,$$

dove $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$.

Il dominio di integrazione é un dominio limitato ma la funzione $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ é illimitata in un intorno dell'origine ed é non positiva in B. Poiché

$$\int\int_{\epsilon^2\le x^2+y^2\le 1} |\ln\sqrt{x^2+y^2}|dxdy = -\int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1 (\ln\rho)\rho d\rho d\theta = -2\pi\left(\frac{\rho^2}{2}\ln\rho\Big|_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \frac{\rho^2}{2}\frac{1}{\rho}d\rho\right) =$$

$$= -2\pi\left(\frac{\rho^2}{2}\ln\rho - \frac{\rho^2}{4}\right)\Big|_\epsilon^1 = -2\pi\left(-\frac{1}{4} - \frac{\epsilon^2}{2}\ln\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}\right) \ ,$$

e il seguente limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\int_{\epsilon^2\le x^2+y^2\le 1} |\ln\sqrt{x^2+y^2}|dxdy \ = \lim_{\epsilon\to 0} -2\pi(-\frac{1}{4} - \frac{\epsilon^2}{2}\ln\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

esiste, da ció si deduce che $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ é sommabile in B e si ha

$$\int\int_B |\ln\sqrt{x^2+y^2}|dxdy = \lim_{\epsilon\to 0}\int\int_{\epsilon^2\le x^2+y^2\le 1} |\ln\sqrt{x^2+y^2}|dxdy = \frac{\pi}{2} \ .$$

9) Calcolare (se esiste)

$$\int\int_Q \frac{dxdy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} \ ,$$

dove $Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le 1, |y|\le 1\}$.

Il dominio di integrazione é un dominio limitato ma la funzione $f(x,y) := \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$ é illimitata in un intorno della bisettrice $y = x$ ed é positiva in Q. Poiché

$$\int\int_{Q\cap\{|x-y|\ge s\}} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1-s} dx\int_{x+s}^1 \frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} + \int_{-1+s}^1 dx\int_{-1}^{x-s}\frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} =$$

$$= \int_{-1}^{1-s}\frac{-(x-y)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Big|_{x+s}^1 dx + \int_{-1+s}^1 \frac{-(x-y)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Big|_{-1}^{x-s} dx =$$

$$= -3\left[\int_{-1}^{1-s}\left((x-1)^{\frac{1}{3}} + s^{\frac{1}{3}}\right)dx + \int_{-1+s}^1\left(s^{\frac{1}{3}} - (x+1)^{\frac{1}{3}}\right)dx\right] =$$

$$= -3\left[\left(\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + s^{\frac{1}{3}}x\right)\Big|_{-1}^{1-s} + \left(s^{\frac{1}{3}}x - \frac{(x+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)\Big|_{-1+s}^1\right] =$$

$$= -3\left[\left(\frac{(-s)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + s^{\frac{1}{3}}(1-s) - \frac{(-2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + s^{\frac{1}{3}}\right) + \left(s^{\frac{1}{3}} - \frac{(2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - s^{\frac{1}{3}}(s-1) + \frac{s^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)\right] \ .$$

Poiché

$$\lim_{s\to 0}\int\int_{Q\cap\{|x-y|\ge s\}} f(x,y)dxdy =$$

$$= \lim_{s\to 0} -3\left[\left(\frac{(-s)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + s^{\frac{1}{3}}(1-s) - \frac{(-2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + s^{\frac{1}{3}}\right) + \left(s^{\frac{1}{3}} - \frac{(2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - s^{\frac{1}{3}}(s-1) + \frac{s^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)\right] = 9\ \sqrt[3]{2},$$

se ne deduce che $f(x,y)$ é sommabile in Q ed

$$\int\int_Q f(x,y)dxdy = \lim_{s\to 0}\int\int_{Q\cap\{|x-y|\ge s\}} f(x,y)dxdy = 9\ \sqrt[3]{2} \ .$$