

Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Soluzioni 3 — 21 Ottobre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

1) Determinare i punti stazionari della seguente funzione $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Il gradiente di f é $Df(x, y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 6xy - 12)$. I punti stazionari sono i punti (x, y) tali che $Df(x, y) = (0, 0)$, cioè i punti tali che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2} = 0 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}.$$

L'equazione biquadratica $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ si risolve ponendo $t := x^2$ in tal modo si ha $t^2 - 5t + 4 = 0$ che ammette due radici $t_1 = 1$ e $t_2 = 4$. In corrispondenza delle radici di t si hanno le seguenti radici di x : $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. Dalla seconda equazione del sistema si deduce che i punti stazionari di f sono i seguenti $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 1)$, $(-2, -1)$.

2) Trovare (se esistono) il massimo e il minimo assoluti di $f(x, y) = 3x - 2y$ sull'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |\sin x|, x^2 + y^2 \leq 25, -\pi \leq x \leq \pi\}$$

facendo solo uso delle curve di livello di f e del fatto che il gradiente di f indica punto per punto la direzione di massimo accrescimento della funzione.

Per il teorema di Weierstrass essendo f continua su $\mathbb{R}^2$ e l'insieme in esame un compatto di $\mathbb{R}^2$ esistono il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x, y)$ sull'insieme assegnato. Il gradiente di f é il vettore costante $(3, -2)$, le curve di livello di f sono le rette $3x - 2y = K$, con $K \in \mathbb{R}$ (si osservi che sono curve ortogonali in ogni punto al gradiente). Considerando la direzione individuata dal vettore gradiente e disegnando le relative curve di livello si deduce che il minimo di f é assunto nel punto $(-\pi, \sqrt{25 - \pi^2})$ mentre il massimo nel punto $(\pi, 0)$.

3) Determinare (se esistono) il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ nel campo $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$.

Per il teorema di Weierstrass essendo f continua su $\mathbb{R}^2$ e il campo in esame un compatto di $\mathbb{R}^2$ esistono il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x, y)$ nel campo assegnato. Per prima cosa troviamo i punti stazionari

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 4x + 2 - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3x + 3 = 0 \end{cases},$$

da cui si ottiene un unico punto stazionario $(-1, -1)$ ove f vale -1 . Il campo indicato rappresenta un triangolo i cui lati (che indicheremo con L_1, L_2, L_3) hanno la seguente parametrizzazione

$$L_1 := \begin{cases} x = 0 \\ y \in [-3, 0] \end{cases}, \quad L_2 := \begin{cases} y = 0 \\ x \in [-3, 0] \end{cases}, \quad L_3 := \begin{cases} y = -3 - x \\ x \in [-3, 0] \end{cases}.$$

La funzione f ristretta ad L_1 diventa $f(0, y) = y^2 + y$. Studiamo il massimo e il minimo assoluti di $g(y) = y^2 + y$ sull'intervallo $[-3, 0]$ (che esistono per il teorema di Weierstrass). Sugli estremi dell'intervallo in esame si ha $f(0, -3) = 6$ e $f(0, 0) = 0$. Troviamo gli eventuali punti stazionari interni $g'(y) = 2y + 1 = 0$ se e solo se $y = -1/2$ in tale punto si ha $f(0, -1/2) = -1/4$.

La funzione f ristretta ad L_2 diventa $f(x, 0) = x^2 + x$, il cui studio é analogo a quello fatto su L_1 . Si ha quindi sull'unico estremo di intervallo non ancora analizzato $f(-3, 0) = 6$, mentre sul punto stazionario interno $f(-1/2, 0) = -1/4$.

Infine la funzione f ristretta ad L_3 diventa $f(x, -3 - x) = x^2 + (-3 - x)^2 - x(-3 - x) + x - 3 - x = 3x^2 + 9x + 6$. Studiamo il massimo e il minimo assoluti di $g(x) = 3x^2 + 9x + 6$ sull'intervallo $[-3, 0]$ (che esistono per il teorema di Weierstrass). Dato che gli estremi dell'intervallo sono già stati analizzati troviamo gli eventuali punti stazionari interni $g'(x) = 6x + 9 = 0$ se e solo se $x = -3/2$ in tale punto si ha $f(-3/2, -3/2) = -3/4$. Comparando i valori ottenuti: $f(-1, -1) = -1$, $f(0, -3) = f(-3, 0) = 6$, $f(0, 0) = 0$, $f(0, -1/2) = f(-1/2, 0) = -1/4$, $f(-3/2, -3/2) = -3/4$, si deduce facilmente che il minimo

assoluto di f é raggiunto nel punto $(-1, -1)$ e vale -1 , mentre il massimo assoluto é raggiunto nei punti $(0, -3)$ e $(-3, 0)$ e vale 6 .

4) Calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $f(x, y) = \sin(e^x - x - \cos y)$ (con resto di Peano) nel punto $(0, 0)$ e utilizzarlo per calcolare il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(e^x - x - \cos y)}{x^2 + y^2}.$$

Per prima cosa $f(0, 0) = \sin 0 = 0$, si ha inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \cos(e^x - x - \cos y) [e^x - 1] \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \cos(e^x - x - \cos y) \sin y \Big|_{(0,0)} = 0.$$

Inoltre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0, 0) = e^x \cos(e^x - x - \cos y) - \sin(e^x - x - \cos y) [e^x - 1]^2 \Big|_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0, 0) = \cos y \cos(e^x - x - \cos y) - \sin(e^x - x - \cos y) \sin^2 y \Big|_{(0,0)} = 1$$

mentre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -\sin(e^x - x - \cos y) [e^x - 1] \sin y \Big|_{(0,0)} = 0,$$

da ciò si deduce che lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $f(x, y)$ con resto di Peano nel punto $(0, 0)$ é $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + o(x^2 + y^2)$; applicandolo allo studio del limite assegnato si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(e^x - x - \cos y)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + o(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

5) Utilizzando i rispettivi polinomi di Taylor calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - \sin(xy)}{x^2 y^3}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2 y} - x \sin(xy) - 1}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Per il primo limite si ha (ricordando lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ nell'intorno di $t = 0$ e sostituendo t con xy)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - \sin(xy)}{x^2 y^3} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - xy + \frac{x^3 y^3}{6} + o(x^3 y^3)}{x^2 y^3} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{6} + \frac{o(x^3 y^3)}{x^2 y^3} = 0.$$

Per il secondo limite si ha (ricordando anche lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ nell'intorno di $t = 0$ e sostituendo t con $x^2 y$)

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{e^{x^2 y} - x \sin(xy) - 1}{(x^2 + y^2)^2} \right| &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{1 + x^2 y + \frac{x^4 y^2}{2} - x(xy - \frac{x^3 y^3}{6}) - 1 + o(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\frac{x^4 y^2}{2} + \frac{x^4 y^3}{6} + o(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^2 \left| \frac{1}{2} + \frac{o(x^4 y^2)}{x^4 y^2} \right|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \\ &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)^3}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0. \end{aligned}$$

dato che $x^4 \leq (x^2 + y^2)^2$ e $y^2 \leq x^2 + y^2$.

6) Determinare se i seguenti insiemi sono aperti, chiusi, limitati, e/o compatti

(i) l'insieme di definizione della funzione $f(x, y) = \log [\sin(x^2 + y^2)]$;

(ii) l'insieme di definizione della funzione $g(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;

(iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \sin \frac{1}{x}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, |y| \leq 1\}$.
Per gli aperti dire se sono connessi.

(i) L'insieme di definizione di f é costituito dai punti del piano tali che $\sin(x^2 + y^2) > 0$, cioè $2k\pi < x^2 + y^2 < \pi + 2k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. É un insieme aperto (unione numerabile di aperti), non é limitato, non é compatto e non é connesso.

(ii) L'insieme di definizione di g é costituito dai punti del piano tali che $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ e $x - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \geq 0$, cioè $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$ e $x^2 \geq 1 - x^2 - y^2$. Questa ultima condizione equivale alla richiesta $2x^2 + y^2 \geq 1$. In sintesi si tratta di tutti i punti del piano nel primo e quarto quadrante esterni alla ellisse di centro l'origine con semiasse maggiore lungo l'asse y lungo 1 e semiasse minore lungo l'asse x lungo $1/\sqrt{2}$ e interni alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1. É un insieme chiuso e limitato quindi compatto.

(iii) I punti di accumulazione di $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \sin \frac{1}{x}\}$ non appartenenti a tale insieme sono per l'appunto in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, |y| \leq 1\}$, quindi l'insieme e' chiuso. Non é compatto in quanto non é limitato.

7) Dire se le seguenti funzioni sono omogenee. In tal caso determinare il loro dominio di definizione (verificando che si tratta di un cono) e il grado α di omogeneità.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2, \quad g(x, y) = \frac{x^2 + 3y^2 + xy}{x^2}, \quad h(x, y) = \log \left(\frac{x - y}{y} \right), \quad k(x, y) = \frac{1}{y^2} + \frac{\log x - \log y}{x^2}.$$

Infine verificare la validità del teorema di Eulero per la funzione $k(x, y)$ (cioé verificare che $x \frac{\partial k}{\partial x} + y \frac{\partial k}{\partial y} = \alpha k$).

Il dominio di definizione di f é $\mathbb{R}^2$, quello di g e' $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, quello di h é l'insieme dei punti del piano ove $\frac{x-y}{y} > 0$, cioè l'insieme dei punti del piano ove $x > y$ e $y > 0$ oppure $x < y$ e $y < 0$ (in sintesi $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 0\}$), infine k é definita solo nel primo quadrante (cioé nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$). Si verifica facilmente che se (x, y) appartiene a uno dei domini di definizione sopra elencati allora anche (tx, ty) vi appartiene per ogni valore di $t > 0$ scelto, ciò equivale a verificare che si tratta di coni.

Si osserva poi che $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$, $g(tx, ty) = g(x, y)$, $h(tx, ty) = h(x, y)$, $k(tx, ty) = t^{-2} k(x, y)$, per cui tutte le funzioni sopra elencate sono funzioni omogenee. In particolare il grado di omogeneità di f é 2, quello di g e quello di h é 0, quello di k é -2. Per verificare il teorema di Eulero calcoliamo

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{x^{-1} x^2 - 2x(\log x - \log y)}{x^4} = \frac{1 - 2 \log x + 2 \log y}{x^3}$$

$$\frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{2}{y^3} - \frac{1}{x^2 y}$$

da cui

$$x \frac{\partial k}{\partial x} + y \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1 - 2 \log x + 2 \log y}{x^2} - \frac{2}{y^2} - \frac{1}{x^2} = -2k(x, y).$$

8) Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice omogenea di grado zero se é del tipo $f(x, y) = h\left(\frac{y}{x}\right)$ con $h(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Dimostrare che se esiste il $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ allora f é costante.

(ii) Scrivere l'espressione del gradiente di f in funzione di h , nell'ipotesi che h sia derivabile. Nel caso particolare in cui $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$ calcolare quindi il gradiente di f (sia applicando la formula appena trovata, sia scrivendo in funzione di x, y la funzione f e calcolandone direttamente il gradiente, ovviamente i risultati devono coincidere).

(i) Da un lato per omogeneità di f si ha per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(tx_0, ty_0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0),$$

dall'altro poiché il limite di f nell'origine esiste per ipotesi

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(tx_0, ty_0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y),$$

da cui si deduce che $f(x_0, y_0) \equiv \text{costante}$ indipendentemente dal valore di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fissato e tale costante é uguale al valore del $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

(ii) Per prima cosa si ha

$$Df(x, y) = h' \left(\frac{y}{x} \right) \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x} \right),$$

poiché $h'(t) = \frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, applicando la formula trovata nel caso particolare in esame si ha

$$Df(x, y) = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x} \right) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x} \right).$$

Calcolare direttamente il gradiente invece significa per prima cosa scrivere esplicitamente

$$f(x, y) = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

nel caso particolare in esame e poi calcolare il gradiente come al solito

$$Df(x, y) = \left(\frac{y(x^2 + y^2) - 2x(xy)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x(x^2 + y^2) - 2y(xy)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} (-y, x).$$

9) (i) Dare l' esempio di una $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e di un punto (x_0, y_0) tali che esista $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ e non esista $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

(ii) Esistono $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) tali che si abbia $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0, y_0) > 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^2$?

(i) Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

allora $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$ non esiste per nessun $x_0 \in \mathbb{R}$, mentre $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) \equiv 0$ per ogni $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, quindi in particolare $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, 0) = 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) No non possono esistere dato che per definizione si ha $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f}{\partial(-\lambda)}(x_0, y_0)$ e $-\lambda \in \mathbb{R}^2$ se $\lambda \in \mathbb{R}^2$.

10) Utilizzando il teorema delle funzioni con gradiente nullo in un aperto connesso $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dimostrare per ogni $x > 0, y > 0$, l'identità

$$\arctan \left(\frac{y}{x} \right) + \arctan \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Sia $f(x, y) = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) + \arctan \left(\frac{x}{y} \right)$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) + \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = 0$$

Per cui essendo il primo quadrante un aperto connesso si ha dal teorema delle funzioni con gradiente nullo che f é costante. Basta quindi calcolare f nei punti (x, x) dove si ha $f(x, x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, per ottenere la tesi.