Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Soluzioni 4 — 28 Ottobre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

1) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativo di $f(x,y) = \log(xy) + \frac{1}{x} + \frac{2}{y^2}$ in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} .$$

Il gradiente di f é $Df = (\frac{1}{xy}y - \frac{1}{x^2}, \frac{1}{xy}x - \frac{4}{y^3}) = (\frac{x-1}{x^2}, \frac{y^2-4}{y^3})$. I punti di massimo e minimo relativo di una funzione regolare come f in D sono punti stazionari, quindi tali che $Df = (0,0)$, cioé $x = 1$ e $y^2 = 4$. Si tratta quindi dei punti $(1,2)$ e $(1,-2)$ di cui solo il primo appartiene a D. Calcoliamo l'hessiano di f in $(1,2)$. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(1,2) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4}\Big|_{x=1} = \frac{2-x}{x^3}\Big|_{x=1} = 1 ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

mentre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(1,2) = \frac{2y^4 - 3y^2(y^2-4)}{y^6}\Big|_{y=2} = \frac{12 - y^2}{y^4}\Big|_{y=2} = \frac{1}{2} .$$

La matrice hessiana di f in $(1,2)$ é quindi diagonale ed ha valori positivi sulla diagonale, cioé é definita positiva; ció implica che il punto in esame é un punto di minimo relativo. Non esistono invece punti di massimo relativo di f in D visto che si ha un unico punto stazionario e che questo é un punto di minimo relativo.

2) Determinare massimi e minimi, relativi ed assoluti (se esistono) della $f(x,y) = \sqrt{2(x+2y) - x^2 - 2y^2 - 1}$.

Per prima cosa il dominio di f é costituito dall'insieme dei punti del piano tali che $2(x+2y)-x^2-2y^2-1 \geq 0$, cioé tali che $-(x-1)^2 - 2(y-1)^2 + 2 \geq 0$, dunque $\frac{1}{2}(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$. Il dominio é quindi costituito dai punti interni all'ellisse di centro nel punto $(1,1)$ e semiasse maggiore parallelo all'asse x lungo $\sqrt{2}$, semiasse minore parallelo all'asse y lungo 1. Poiché il dominio é un insieme chiuso e limitato del piano, dunque un compatto e f é ivi continua esistono per il teorema di Weierstrass massimo e minimo assoluti di f nel suo dominio. Sul bordo dell'ellisse f é nulla per definizione. Cerchiamo ora i punti stazionari di f, a tal proposito si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2-2x}{2\sqrt{2(x+2y)-x^2-2y^2-1}} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4-4y}{2\sqrt{2(x+2y)-x^2-2y^2-1}} = 0 \end{cases}$$

se e solo se $(x,y) = (1,1)$ ed $f(1,1) = \sqrt{2}$. Poiché f ammette sia massimo che minimo assoluto e che questi si trovano o nei punti stazionari o nei punti di non derivabilitá o nella frontiera del dominio, e poiché qui non vi sono punti di non derivabilitá e per definizione $f(x,y) \geq 0$, il massimo assoluto di f é $\sqrt{2}$ assunto nel punto $(1,1)$, il minimo assoluto di f é 0 assunto in tutti i punti del bordo dell'ellisse. Ovviamente il punto $(1,1)$ é anche un punto di massimo relativo.

3) Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura $f(x,y) = \frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2}{2}$. (Suggerimento: uno dei punti critici presenta un "caso dubbio" ; per studiarlo ragionate opportunamente sul segno della funzione in un intorno di quel punto)

Il seguente sistema che individua i punti stazionari (detti anche punti critici)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y + xy = yx(x+1) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + y = 0 \end{cases}$$

si scompone nei tre seguenti sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{6}(2x+3) = 0 \leftrightarrow (x = 0 \quad \text{oppure} \quad x = -\frac{3}{2}) \end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \end{cases} .$$

Quindi si ottengono tre punti stazionari $(0,0)$, $(-\frac{3}{2},0)$, $(-1,-\frac{1}{6})$. Calcolandoo le derivate seconde di f, si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 2xy + y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x^2 + x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 1 \end{cases}$$

per cui il determinante della matrice hessiana é $2xy + y - (x^2 + x)^2$, che in $(0,0)$ vale 0, in $(-\frac{3}{2},0)$ vale $-\frac{3}{4} < 0$, in $(-1,-\frac{1}{6})$ vale $\frac{1}{6}$. Quindi in $(0,0)$ l'hessiano é solo semidefinito (é il "caso dubbio"), in $(-\frac{3}{2},0)$ l'hessiano é definito negativo, quindi $(-\frac{3}{2},0)$ é un punto di sella, in $(-1,-\frac{1}{6})$ l'hessiano é definito positivo, poiché inoltre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(-1,-\frac{1}{6}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} > 0$, $(-1,-\frac{1}{6})$ é un punto di minimo relativo.
Studiamo la natura dell'origine, dato che $f(0,0) = 0$ basta studiare il segno di f in un intorno dell'origine. Poiché $f(x,y) = y\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{y}{2}\right)$, in particolare lungo la parabola $y = -x^2$ si osserva che $f(x,-x^2) = -\frac{x^5}{3}$ quindi f lungo la parabola $y = -x^2$ ha il segno di x, per cui cambia segno in un intorno dell'origine (che per forza contiene punti sulla parabola indicata aventi sia x positiva che negativa) se ne deduce che l'origine non é né un punto di minimo relativo né un punto di massimo relativo.

4) Determinare massimo e minimo assoluti (se esistono) di $f(x,y) = |x| + 2y^2 + x^2$ in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1,\ |y| \le 1\} .$$

Dato che f é una funzione continua per il teorema di Weierstrass esistono massimo e minimo assoluti di f sull'insieme D che é un compatto del piano.
Per prima cosa troviamo i punti stazionari, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 1 + 2x \text{ se } x > 0 \\ -1 + 2x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

quindi $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ per ogni $x \neq 0$ ($1 + 2x = 0$ se e soltanto se $x = -\frac{1}{2}$ che peró non verifica la condizione $x > 0$ e analogamente si ragiona per $x < 0$). Non esistono dunque punti stazionari.
Analizziamo ora la funzione sull'insieme di non derivabilitá $f(0,y) = 2y^2$ per $y \in [-1,1]$; tale funzione ha minimo nell'origine in cui $f(0,0) = 0$ e massimo in $f(0,1) = f(0,-1) = 2$.
Infine analizziamo f sul bordo del dominio costituito da quattro lati. $L_1 = (-1,y)$ con $y \in [-1,1]$, $L_2 = (x,-1)$ con $x \in [-1,0) \cup (0,1]$, $L_3 = (1,y)$ con $y \in [-1,1]$, $L_4 = (x,1)$ con $x \in [-1,0) \cup (0,1]$.
Su L_1 e L_3 si ha $f(-1,y) = f(1,y) = 2 + 2y^2$, per $y \in [-1,1]$, che ha evidentemente minimo $f(-1,0) = f(1,0) = 2$ e massimo nei vertici del quadrato $f(1,1) = f(1,-1) = f(-1,1) = f(-1,-1) = 4$.
Su L_2 e L_4 si ha $f(x,1) = f(x,-1) = |x| + x^2 + 2$ per $x \in [-1,0) \cup (0,1]$, analogamente a sopra si verifica che non ha punti stazionari inoltre i suoi estremi di intervallo sono giá stati analizzati.
In sintesi confrontando i valori assunti da f sul bordo, sui punti stazionari (che non esistono) e sui punti di non derivabilitá, si conclude che il massimo assoluto di f in D é 4 assunto nei quattro vertici di D, il minimo assoluto di f é 0 assunto nell'origine.

5) Determinare massimo e minimo assoluti (se esistono) di $f(x,y) = \sin(x+y)\cos(x-y)$ in $[0,\pi] \times [0,\pi]$.

Poiché $[0,\pi] \times [0,\pi]$ é un insieme chiuso e limitato del piano, dunque un compatto e f é ivi continua esistono per il teorema di Weierstrass massimo e minimo assoluti di f nel suo dominio. Massimo e minimo assoluti vanno ricercati nei punti stazionari, nei punti di non derivabilitá (che qui non ci sono) e nella frontiera del dominio in esame.
Per prima cosa troviamo i punti stazionari

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y)\cos(x-y) - \sin(x+y)\sin(x-y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y)\cos(x-y) + \sin(x+y)\sin(x-y) = 0 \end{cases}$$

sommando le due equazioni del sistema tra loro si ottiene il seguente sistema equivalente

$$\begin{cases} \cos(x+y)\cos(x-y) = 0 \\ \sin(x+y)\sin(x-y) = 0 \end{cases}$$

quindi poiché le funzioni sin e cos non si annullano mai contemporaneamente se ne deducono i due sistemi equivalenti

$$\begin{cases}\cos(x+y)=0\\ \sin(x-y)=0\end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases}\cos(x-y)=0\\ \sin(x+y)=0\end{cases}$$

ricordando gli zeri di sin e cos se ne deduce che $(k,h,l,m\in\mathbb{Z})$

$$\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x-y=\pi+h\pi\end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}+l\pi\\ x+y=\pi+m\pi\end{cases}$$

di nuovo sommando le due equazioni in ciascun sistema si ha

$$\begin{cases}2x=\frac{3}{2}\pi+(k+h)\pi\\ y=\frac{\pi}{2}-x+k\pi\end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases}2x=\frac{3}{2}\pi+(l+m)\pi\\ y=\pi-x+m\pi\end{cases}$$

cioé

$$\begin{cases}x=\frac{3}{4}\pi+(k+h)\frac{\pi}{2}\\ y=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\pi-(k+h)\frac{\pi}{2}+k\pi=-\frac{\pi}{4}+(k-h)\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases}x=\frac{3}{4}\pi+(l+m)\frac{\pi}{2}\\ y=\frac{\pi}{4}+(m-l)\frac{\pi}{2}\end{cases} .$$

Nel dominio assegnato si hanno quindi i seguenti quattro punti stazionari $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$,$(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)$,$(\frac{3}{4}\pi,\frac{\pi}{4})$ e $(\frac{3}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi)$.
Calcoliamo il valore di f nei punti stazionari $f(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})=1$, $f(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)=f(\frac{3}{4}\pi,\frac{\pi}{4})=0$ e $f(\frac{3}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi)=-1$.
Resta quindi da analizzare il comportamento di f sul bordo del dominio costituito da quattro parti $L_1=(x,0)$ con $x\in[0,\pi]$, $L_2=(\pi,y)$ con $y\in[0,\pi]$, $L_3=(x,\pi)$ con $x\in[0,\pi]$, $L_4=(0,y)$ con $y\in[0,\pi]$.
Su L_1 si ha $f(x,0)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$ la cui derivata é $\cos 2x$ quindi $f(x,0)$ ha punti stazionari in $(\frac{\pi}{4},0)$ e in $(\frac{3}{4}\pi,0)$, rispettivamente di massimo e minimo, in cui $f(\frac{\pi}{4},0)=\frac{1}{2}$ e $f(\frac{3}{4}\pi,0)=-\frac{1}{2}$, inoltre negli estremi dell'intervallo si ha $f(0,0)=0$ e $f(\pi,0)=0$.
Su L_2 si ha $f(\pi,y)=\sin(\pi+y)\cos(\pi-y)=\sin y\cos y=\frac{1}{2}\sin(2y)$ che ha punti stazionari in $(\pi,\frac{\pi}{4})$ e in $(\pi,\frac{3}{4}\pi)$, rispettivamente di massimo e minimo, in cui $f(\pi,\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$ e $f(\pi,\frac{3}{4}\pi)=-\frac{1}{2}$, inoltre nell'unico estremo di intervallo non ancora considerato si ha $f(\pi,\pi)=0$.
Su L_3 si ha $f(x,\pi)=\sin(x+\pi)\cos(x-\pi)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$ che ha punti stazionari in $(\frac{\pi}{4},\pi)$ e in $(\frac{3}{4}\pi,\pi)$, rispettivamente di massimo e minimo, in cui $f(\frac{\pi}{4},\pi)=\frac{1}{2}$ e $f(\frac{3}{4}\pi,\pi)=-\frac{1}{2}$, inoltre nell' unico estremo di intervallo non ancora considerato si ha $f(0,\pi)=0$.
Su L_4 si ha $f(0,y)=\sin y\cos(-y)=\sin y\cos y=\frac{1}{2}\sin(2y)$ che ha punti stazionari in $(0,\frac{\pi}{4})$ e in $(0,\frac{3}{4}\pi)$, rispettivamente di massimo e minimo, in cui $f(0,\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$ e $f(0,\frac{3}{4}\pi)=-\frac{1}{2}$, inoltre i suoi estremi di intervallo sono giá stati considerati.
In sintesi confrontando i valori assunti da f sul bordo e sui punti stazionari, si conclude che il massimo assoluto di f é 1 assunto nel punto $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, il minimo assoluto di f é -1 assunto nel punto $(\frac{3}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi)$.

6) Sia

$$f(x,y)=\int_{\sin x}^{\sin y} e^{t^2}\,dt \ .$$

Determinare massimi e minimi, relativi ed assoluti (se esistono) di f in $Q=[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

Dato che f é una funzione continua (l'integrando é una funzione continua ed anche i suoi estremi di integrazione lo sono) per il teorema di Weierstrass esistono massimo e minimo assoluti di f sull'insieme Q che é un compatto del piano.
Per prima cosa troviamo i punti stazionari, si ha $Df=(e^{\sin^2 x}(-\cos x),e^{\sin^2 y}\cos y)$ per cui $Df=(0,0)$ se e soltanto se $\cos x=\cos y=0$, quindi se e soltanto se $x,y\in\{\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\}$. Si ottengono cosí quattro punti stazionari $P_1=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $P_2=(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$, $P_3=(\frac{3}{2}\pi,\frac{\pi}{2})$ e $P_4=(\frac{3}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi)$; in cui $f(P_1)=f(P_4)=0$ (dato che gli estremi di integrazione coincidono se $y=x$), $f(P_2)=\int_1^{-1}e^{t^2}dt<0$ (dato che $1>-1$ e la funzione integranda é positiva), $f(P_3)=\int_{-1}^{1}e^{t^2}dt=-f(P_2)>0$. Per stabilire se si tratta di massimi o minimi relativi o assoluti, in questo caso possiamo evitare di studiare l'hessiano e ragionare come segue. La frontiera si decompone ancora una volta in quattro parti $L_1=\{(x,0):x\in[0,2\pi]\}$, $L_2=\{(2\pi,y):y\in[0,2\pi]\}$, $L_3=\{(x,2\pi):x\in[0,2\pi]\}$ e $L_4=\{(0,y):y\in[0,2\pi]\}$ in ognuno di questi quattro casi uno dei due estremi di integrazione vale zero, pertanto nel miglior caso possibile l'ampiezza dell'intervallo di integrazione é 1 e quindi non ho sulla frontiera né il massimo né il minimo assoluto di f che sono invece rispettivamente in P_3

é in P_2 (ovviamente questi sono anche rispettivamente punti di massimo e minimo relativo di f). Mentre evidentemente P_1 e P_4 sono punti di sella di f (in un intorno di tali punti gli estremi di integrazione non coincidono piu' e possono essere ordinati nel verso giusto dando un valore positivo o in senso opposto dando luogo ad un valore negativo).

7) Dati $P = (1, 1)$ e $Q = (3, 3)$ sia $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 3)^2 + (y - 3)^2$ la funzione somma dei quadrati delle distanze euclidee di un punto generico (x, y) dai punti P e Q assegnati. Determinare se esistono massimo e minimo assoluti di f in $\mathbb{R}^2$. Che relazione c'e' tra il punto di minimo trovato e i punti P e Q assegnati ?
Piú in generale siano $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, per $i = 1, \cdots, M$, M punti assegnati e sia

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{M} \left\{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right\} \ .$$

Che cosa vi aspettate rappresenti in questo caso generale il punto di minimo di f in $\mathbb{R}^3$?

Per prima cosa troviamo i punti stazionari

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - 1) + 2(x - 3) = 4x - 8 = 4(x - 2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - 1) + 2(y - 3) = 4y - 8 = 4(y - 2) = 0 \end{cases}$$

solo e soltanto nel punto $(2, 2)$, in cui $f(2, 2) = 4$. Dato che per le derivate seconde si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$, la matrice hessiana é diagonale con entrambi i valori sulla diagonale positivi quindi $(2, 2)$ é un punto di minimo relativo. Inoltre dato che per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 20 = 2[(x - 2)^2 + (y - 2)^2] + 4 \geq 4 \ ,$$

$(2, 2)$ é in realtá il punto di minimo assoluto di f in $\mathbb{R}^2$. Non esiste evidentemente alcun punto di massimo assoluto di f in $\mathbb{R}^2$ dato che $\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty} f(x, y) = +\infty$. (Si osservi a tal proposito che il fatto che $(2, 2)$ fosse il punto di minimo assoluto di f in $\mathbb{R}^2$ si poteva dedurre direttamente dall'esercizio 8).
Resta da osservare che $(2, 2)$ é il punto medio del segmento che unisce P a Q. Nel caso generale il punto di minimo assoluto di f in $\mathbb{R}^3$ rappresenta il baricentro degli M punti P_i assegnati e coincide con l'unico punto stazionario di f che si puó calcolare esplicitamente ed é uguale a $\left(\frac{\sum_{i=1}^M x_i}{M}, \frac{\sum_{i=1}^M y_i}{M}, \frac{\sum_{i=1}^M z_i}{M}\right)$.

8) Dimostrare che una funzione $f(x, y)$ continua in $\mathbb{R}^2$ tale che $\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty} f(x, y) = +\infty$ ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$.

Per fissare le idee, fissato un punto, ad esempio $(0, 0)$ e preso $M > f(0, 0)$ per ipotesi si ha

$$\exists \ R(M) > 0 \text{ tale che } f(x, y) > M \text{ se } x^2 + y^2 > R(M) \ .$$

Sia $I := \min_{x^2+y^2 \leq R(M)} f(x, y)$, che esiste per il teorema di Weierstrass data la continuitá di f, I é anche minimo assoluto di f in $\mathbb{R}^2$ poiché per $x^2 + y^2 > R(M)$ si ha $f(x, y) > M > f(0, 0) \geq I$.

9) Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x + y & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

trovare (se esistono) massimo e minimo assoluti di f sul disco unitario $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

La funzione f non é continua sull'asse $x = 0 \cap \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ a meno di non considerare i punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$ unici punti di continuitá di f sull'asse, infatti

$$\lim_{(x,y) \to (0, y_0), x > 0} x + y = y_0$$

ed $y_0 = f(0, y_0)$ se e soltanto se $y_0 = y_0^2$ cioé $y_0 \in \{0, 1\}$. Quindi nonostante il disco unitario sia un compatto del piano non é detto che esistano massimo e minimo assoluti di f sul disco. In realtá si verifica facilmente che f non é neppure derivabile sull'asse $x = 0 \cap \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ rispetto alla variabile x.

Per prima cosa troviamo i punti stazionari. Per $x > 0$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1$, mentre per $x < 0$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ è $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Poiché il gradiente non é mai nullo non vi sono punti stazionari.
Analizziamo ora i punti di non derivabilitá cioé $x = 0 \cap \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. La funzione diventa $f(0, y) = y^2$ per $y \in [-1, 1]$ che ha evidentemente minimo in $(0, 0)$ in cui $f(0, 0) = 0$, ed ha massimo in $(0, 1)$ e $(0, -1)$ in cui $f(0, 1) = f(0, -1) = 1$.
Per quanto riguarda il bordo del dominio si ha

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \leq 0 \text{ e } x^2 + y^2 = 1 \\ x + y \text{ se } x > 0 \text{ e } x^2 + y^2 = 1 \ . \end{cases}$$

Poiché i punti sul bordo del disco unitario tali che $x > 0$ si possono descrivere come i punti tali che $(x, y) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ allora resta da studiare $f(x, y) = f(\cos t, \sin t) = F(t) := \cos t + \sin t$. Poiché $F'(t) = -\sin t + \cos t \geq 0$ se e soltanto se $\sin t \leq \cos t$ quindi $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$, $F(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ é un massimo, si ricordi che a $t = \frac{\pi}{4}$ corrisponde il punto di coordinate $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; mentre si ha $\lim_{t \to \pm\frac{\pi}{2}} F(t) = \pm 1$.
Ció basta a concludere che f sul disco unitario ha massimo assoluto uguale a $\sqrt{2}$ assunto nel punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, ma non ha minimo assoluto. Ha peró estremo inferiore uguale a -1.

10) Sia $E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ dove (x_i, y_i), per $i = 1, \cdots, n$ sono n punti assegnati. Determinare il punto $(\bar{a}, \bar{b})$ di minimo di E in $\mathbb{R}^2$ (Osservazione: $y = \bar{a}x + \bar{b}$ é detta la retta di regressione nel metodo dei minimi quadrati).

Per prima cosa cerchiamo i punti stazionari di E:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

quindi si ha

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

o analogamente ricavando b dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima

$$\begin{cases} a \left[n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \right] + \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i = n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ b = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i \right] \ . \end{cases}$$

Dato che $n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 > 0$ (come si puó facilmente dedurre applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz nel seguente modo $| < (x_1, \cdots, x_n), (1, \cdots, 1) > |^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) n$) dividendo per tale fattore la prima equazione si ricava l' unica soluzione $(\bar{a}, \bar{b})$ del sistema lineare. Le derivate seconde di E sono indipendenti dal punto stazionario $(\bar{a}, \bar{b})$ e tali che

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i^2 \\ \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 E}{\partial b \partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i \\ \frac{\partial^2 E}{\partial b \partial b} = 2n \end{cases}$$

quindi il determinante dell'hessiano essendo $4(n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2)$ é positivo, dato che si ha inoltre $\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial a} > 0$, l'unico punto stazionario $(\bar{a}, \bar{b})$ é di minimo. (Interpretazione: Se x_i, y_i, $i = 1, \cdots, n$ rappresentano n dati statistici tra loro correlati - tipo peso/altezza di n persone-, la retta di regressione $y = \bar{a}x + \bar{b}$ puó essere interpretata come una relazione "ottimale" tra il "dato" x e il "dato" y dove il criterio di ottimalitá é quello di rendere minimo lo scarto quadratico totale tra i dati della tabella e quelli che si ottengono pensando che i dati siano correlati dalla legge $y = \bar{a}x + \bar{b}$.)