Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Soluzioni 7 — 25 Novembre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

1) Calcolare i seguenti integrali doppi, considerando i rispettivi domini prima normali rispetto all'asse x e poi normali rispetto all'asse y:

$$(i) \int\int_Q \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \quad \text{dove } Q = [3,4] \times [1,2]; \qquad (ii) \int\int_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy, \text{ dove } D = [0,1] \times [0,1].$$

Primo integrale:

$$\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \int_3^4 -\frac{1}{(x+y)}\Big|_{y=1}^{y=2} dx = \int_3^4 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right] dx = \log \frac{x+1}{x+2}\Big|_{x=3}^{x=4} = \log \frac{25}{24}$$

oppure

$$\int_1^2 dy \int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \int_1^2 -\frac{1}{(x+y)}\Big|_{x=3}^{x=4} dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{3+y} - \frac{1}{4+y}\right] dy = \log \frac{3+y}{4+y}\Big|_{y=1}^{y=2} = \log \frac{25}{24}.$$

Come conseguenza di un noto teorema dell'analisi i risultati ottenuti con i due metodi di integrazione ovviamente coincidono.
Secondo integrale:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy = \int_0^1 x^2 \arctan y\big|_{y=0}^{y=1} dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{12}$$

oppure

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{12}.$$

In realtá il secondo integrale poteva essere direttamente scritto come prodotto di due integrali di una sola variabile (l'integrando é il prodotto di una funzione della sola variabile x per una della sola variabile y e il dominio di integrazione é il prodotto di due intervalli, in cui gli estremi di intervallo non sono funzioni ma costanti!) cioé

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dx = \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\right)\left(\int_0^1 x^2 dx\right) .$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_Q \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}\, dx\, dy\,, \qquad \text{dove } Q = [0,1] \times [1,2]\,,$$

Il dominio Q é un dominio normale rispetto ad entrambi gli assi peró data la forma dell'integrando conviene integrare prima in x e poi in y:

$$\int\int_Q \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}\, dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3} dx\right) dy = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{y}} - 1}{y^2} dy = -e^{\frac{1}{y}} + \frac{1}{y}\Big|_1^2 = e - \sqrt{e} - \frac{1}{2}\,.$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_T (x - y^2) dx\, dy, \qquad \text{dove } T \text{ é il triangolo di vertici } (0,0),\ (1,1) \text{ e } (2,-1)\ .$$

Spezziamo il triangolo in due insiemi normali:

$$\int_0^1 dx \int_{-x/2}^{x} (x-y^2) dy + \int_1^2 dx \int_{-x/2}^{3-2x} (x-y^2) dy = \int_0^1 \left(xy - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=-\frac{x}{2}}^{y=x} dx + \int_1^2 \left(xy - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=-x/2}^{y=3-2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3x^3}{8}\right) dx + \int_1^2 \left(x(3-2x) - \frac{(3-2x)^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{24}\right) dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^4}{32}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} +$$
$$+ \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{(3-2x)^4}{24} - \frac{x^4}{96}\right)_{x=1}^{x=2} = \frac{5}{4}.$$

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_D \frac{dxdy}{1+x} , \qquad \text{dove } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ , x^2 \le y \le \sqrt{x}\} \ .$$

L'integrale richiesto può essere riscritto come

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{dy}{1+x}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}(\sqrt{x} - x^2) \ dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}(t-t^4)2t \ dt =$$

dove si è posto $t = \sqrt{x}$ e quindi $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2t}dx$,

$$= -2\int_0^1 \frac{t^5 - t^2}{1+t^2} \ dt = -2\int_0^1 \left(t^3 - t - 1 + \frac{t+1}{1+t^2}\right) \ dt =$$
$$= -2\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan t\right) \Big|_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2} - \ln 2 \ .$$

5)
(i) Rappresentare il seguente dominio normale rispetto all'asse x come dominio normale rispetto all'asse y: $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4, \ \ 3x^2 \le y \le 12x\}$.
(ii) Rappresentare il seguente dominio normale rispetto all'asse y come dominio normale rispetto all'asse x: $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, \ \ -\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y\}$.

Il primo dominio D rappresenta la zona di piano limitata compresa fra la retta $y = 12x$ e la parabola $y = 3x^2$, per cui $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 48, \ \ \frac{y}{12} \le x \le \sqrt{\frac{y}{3}}\}$.
Il secondo dominio é composto dal quarto di cerchio unitario contenuto nel secondo quadrante, più il triangolo di vertici $(1,0)$, $(0,1)$ e $(0,0)$, per cui

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0, \ \ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le 1-x\} \ .$$

6) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_D e^{\frac{y}{x}} \, dx \, dy \, , \qquad \text{dove } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2 \, , \ \frac{y}{2} \le x \le \min(y,1)\} \, .$$

È chiaro che integrare prima in x e poi in y, come suggerito dalla definizione di D come dominio normale rispetto all'asse y, non è possibile (non si conosce una primitiva di $e^{\frac{y}{x}}$). È allora necessario "girare" l'insieme; si vede facilmente che si ha

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \, , \ x \le y \le 2x\} \, ,$$

e quindi

$$\int\int_D e^{\frac{y}{x}} \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_x^{2x} e^{\frac{y}{x}} \, dy\right) \, dx = \int_0^1 x \, (e^2 - e) \, dx = \frac{e^2 - e}{2} \, .$$

7) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_D x \sin^2(x+y) \ dxdy \ ,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \le x \le 0, \ |x+y| \le \frac{\pi}{2}\}$ (Suggerimento: ricordare che $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$).

$$\int\int_D x \sin^2(x+y) \ dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 dx \int_{-x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} x \sin^2(x+y) \ dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} dx \int_{-x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} x(1-\cos(2(x+y)))\, dy = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x(y-\frac{1}{2}\sin(2(x+y)))\Big|_{-x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} xdx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{\pi^3}{16}\ .$$

8) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_Q \frac{x\sqrt{|y|}}{1+\sqrt{|y|}}\ dxdy\ , \qquad \text{dove } Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1\ , -1\le y\le 2\}\ .$$

Poichè l'integrando è il prodotto di una funzione di x e una di y, e poiché anche il dominio di integrazione é il prodotto di due intervalli a estremi costanti, l'integrale assegnato è uguale a

$$\left(\int_0^1 x\ dx\right)\left(\int_{-1}^{2}\frac{\sqrt{|y|}}{1+\sqrt{|y|}}\ dy\right) = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1\left(\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{-y}}{1+\sqrt{-y}}\ dy + \int_0^2\frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}\ dy\right) =$$

ponendo $t=\sqrt{-y}$ e $s=\sqrt{y}$, si ha rispettivamente $-2t\ dt = dy$ e $2s\ ds = dy$, e quindi:

$$= \frac{1}{2}\left(\int_1^0 \frac{-2t^2}{1+t}\ dt + \int_0^{\sqrt{2}}\frac{2s^2}{1+s}\ ds\right) = \int_0^1\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\ dt + \int_0^{\sqrt{2}}\left(s-1+\frac{1}{1+s}\right)\ ds =$$

$$= F(1)-F(0)+F(\sqrt{2})-F(0)$$

dove $F(t)=t^2/2-t+\ln|t+1|$, quindi il valore dell'integrale è $1/2-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})$.

9) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_T |x+y|\mathrm{e}^{x-y}\ dxdy\ ,$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-2)$.

$$\int\int_T |x+y|\mathrm{e}^{x-y}\ dxdy = \int_0^1 dx\int_{-x}^{x}(x+y)e^{x-y}dy + \int_0^1 dx\int_{-2x}^{-x} -(x+y)e^{x-y}dy =$$

$$= \int_0^1 e^x dx\int_{-x}^{x}(xe^{-y}+ye^{-y})dy + \int_0^1 e^x dx\int_{-2x}^{-x} -(xe^{-y}+ye^{-y})dy$$

poiché per parti si ha che $\int ye^{-y}dy = -e^{-y}y - \int(-e^{-y})dy = -e^{-y}(y+1)$, l'integrale assegnato diventa:

$$= \int_0^1 e^x(-xe^{-y}-e^{-y}(y+1))\Big|_{-x}^{x} dx + \int_0^1 e^x(xe^{-y}+e^{-y}(y+1))\Big|_{-2x}^{-x} dx =$$

$$= \int_0^1[-2x-1+e^{2x}]dx + \int_0^1[e^{2x}+e^{3x}(x-1)]dx = \left(-x^2-x+e^{2x}+\frac{e^{3x}}{3}(x-1)-\frac{e^{3x}}{9}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -2+e^2-\frac{e^3}{9}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9} = e^2-\frac{e^3+23}{9}\ .$$

10) Definita $F(x)=\int_{x^2}^{x^3}[xt+\ln(1+xt)]\,dt$ per $x\in(1,2)$
(i) verificare che $F'(x)$ esiste,
(ii) calcolare $F'(x)$.

La funzione integranda $f(x,t)\equiv xt+\ln(1+xt) : (1,2)\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ é una funzione continua nelle sue due variabili, inoltre é derivabile nella variabile x per ogni $t\in\mathbb{R}^+$ fissato ed anche $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t+\frac{t}{1+xt}$ é una funzione continua nelle sue due variabili. Gli estremi di integrazione $\alpha(x)=x^2$ e $\beta(x)=x^3$ sono funzioni di classe C^1 nell'aperto $(1,2)$. Ne segue per il teorema di derivazione di integrali dipendenti da parametro che $F\in C^1(1,2)$, quindi in particolare esiste $F'(x)$. Il teorema citato inoltre afferma che

$$F'(x) = f(x,x^3)3x^2 - f(x,x^2)2x + \int_{x^2}^{x^3}\left[t+\frac{t}{1+xt}\right]dt$$

poiché

$$\frac{t}{1+xt} = \frac{1}{x}\left[\frac{xt}{1+xt}\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{1+xt-1}{1+xt}\right] = \frac{1}{x}\left[1-\frac{1}{1+xt}\right] = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{x}{1+xt}$$

se ne deduce che

$$F'(x) = f(x,x^3)3x^2 - f(x,x^2)2x + \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1+xt)\right)\Big|_{x^2}^{x^3} =$$

$$= \left[x^4 + \ln(1+x^4)\right]3x^2 - \left[x^3 + \ln(1+x^3)\right]2x + \left(\frac{x^6-x^4}{2} + x^2 - x - \frac{1}{x^2}\ln(1+x^4) + \frac{1}{x^2}\ln(1+x^3)\right) =$$

$$= \frac{7}{2}x^6 + \left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\ln(1+x^4) - \frac{5}{2}x^4 + \left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)\ln(1+x^3) + x^2 - x\ .$$