Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Soluzioni 1— 7 Ottobre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

1) Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \log(xy) + \frac{1}{x} + \frac{2}{y^2} \quad ; \quad g(x,y) = \frac{\arcsin(x+y)}{3\sqrt{4 - x^2 - \frac{y^2}{4}}} \ .$$

Il dominio di f coincide con il primo e terzo quadrante, assi esclusi, cioé

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\} \ .$$

Il dominio di g coincide con i punti compresi tra le rette $y = -1 - x$ e $y = 1 - x$ che siano anche interni all'ellisse di semiasse maggiore lungo l'asse y lungo 4 e semiasse minore lungo l'asse x lungo 2, cioé:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x + y \le 1 \ ; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1\} \ .$$

2) Dimostrare che i seguenti limiti non esistono

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2}{x^2+y^2} \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \ .$$

Per il primo limite basta osservare che lungo l'asse x (i.e. sui punti $(x,y) = (x,0)$) la funzione di cui calcolare il limite é identicamente zero, mentre lungo la bisettrice $y = x$ (i.e. sui punti $(x,y) = (x,x)$) é identicamente uno.
Per il secondo limite basta osservare che lungo l'asse x (i.e. sui punti $(x,y) = (x,0)$) la funzione di cui calcolare il limite é identicamente zero, mentre lungo la parabola $y = x^2$ (i.e. sui punti $(x,y) = (x,x^2)$) é identicamente $1/2$.

3) Dire a cosa corrispondono le curve di livello delle seguenti funzioni

$$f(x,y) = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad g(x,y) = \tan(x^2 - y + 3) \ .$$

Per f si tratta di circonferenze centrate nell'origine di equazione $x^2 + y^2 = K$, $K > 0$. Per g invece si tratta delle parabole $x^2 - y + 3 = K$, $K \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

4)
(i) Data la funzione $f(x,y) = y^2 - y^x + \cos\left(\frac{\log(x^2-3x)}{x^2+3x}\right)$ calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}$.
(ii) Data la funzione $f(x,y) = y^2 \sin x$ calcolare $D\ f(\pi,-1)$.
(i) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - xy^{x-1}$. (ii) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin x$, quindi $D\ f(\pi,-1) = (-1,0)$.

5) Calcolare, se esistono, le derivate direzionali delle seguenti funzioni

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad ; \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

Il dominio di f coincide con $\mathbb{R}^2$ meno l'asse y. Su questo dominio si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

che sono funzioni continue sull'insieme di definizione di f quindi f é ivi differenziabile e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\cos\theta + \frac{x}{x^2+y^2}\sin\theta$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$, ove $\lambda = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Consideriamo prima g al di fuori dell'origine. Si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \ ; \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \ ,$$

quindi il gradiente di g é continuo al di fuori dell'origine. Questo implica che g é differenziabile al di fuori dell'origine e si ha

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}(y\cos\theta - x\sin\theta)$$

per ogni $\theta \in [0,2\pi)$, ove $\lambda = (\cos\theta, \sin\theta)$. Nell'origine invece si ha che $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$ dato che $g(0,0) = g(x,0) = g(0,y) = 0$. In una generica direzione $\lambda = (\cos\theta, \sin\theta)$ ove $\theta \in [0,2\pi)$ si ha

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h\cos\theta, h\sin\theta) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos\theta\sin\theta}{h}$$

che é indefinito a meno che $\cos\theta$ o $\sin\theta = 0$, corrispondenti all'asse x e y rispettivamente. Quindi le uniche derivate direzionali che esistono per g nell'origine sono le derivate parziali lungo gli assi.

6) Determinare, se esiste, a in $\mathbb{R}$ tale che sia continua su $\mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sen}(y-\mathrm{sen}(x))}{\mathrm{e}^{y-\mathrm{sen}(x)}-1} & \text{se } y > \mathrm{sen}(x) \\ a & \text{se } y \leq \mathrm{sen}(x)\ . \end{cases}$$

Gli unici punti nei quali la funzione puó non essere continua sono i punti sul grafico della funzione $y = \mathrm{sen}(x)$. Dal momento che se $(x,y) \to (x_0, \mathrm{sen}(x_0))$ con $y \leq \mathrm{sen}(x)$, il limite vale a, non resta che calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,\mathrm{sen}(x_0))\ ,y>\mathrm{sen}(x)} \frac{\mathrm{sen}(y-\mathrm{sen}(x))}{\mathrm{e}^{y-\mathrm{sen}(x)}-1}\ .$$

Con la sostituzione $z = y - \mathrm{sen}(x)$, si tratta di calcolare

$$\lim_{z\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}(z)}{\mathrm{e}^z - 1} = 1\,,$$

e quindi $a = 1$.

7) Per quali valori del parametro reale α la funzione $f(x,y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\log(1+y)}{(x^2+\arctan^2 y)^\alpha} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

La funzione $f(x,y)$ per ogni α é continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, inoltre sará continua nell'origine se e solo se :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\log(1+y)}{(x^2+\arctan^2 y)^\alpha} = f(0,0) = 0\ .$$

Per y vicino a zero si ha $\log(1+y) = y + o(y)$ e $\arctan(y) = y + o(y)$ dove $o(y)$ é un quantitativo tale che $\lim_{y\to 0} o(y)/y = 0$. Da ciò segue che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\log(1+y)}{(x^2+\arctan^2 y)^\alpha} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + xo(y)}{(x^2+y^2+o(y^2))^\alpha}\ ,$$

passando a coordinate polari e prendendo il modulo si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x\log(1+y)}{(x^2+\arctan^2 y)^\alpha}\right| = \lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{\rho^2(|\cos\theta\sin\theta| + o(\rho^2)/\rho^2)}{(\rho^2+o(\rho^2))^\alpha} \leq \lim_{\rho\to 0} \rho^{2-2\alpha} \frac{(1+o(\rho^2)/\rho^2)}{(1+o(\rho^2)/\rho^2)^\alpha} = 0$$

se e solo se $2 - 2\alpha > 0$ cioè se $\alpha < 1$. Per $\alpha \geq 1$ infatti basta ragionare sui punti (x,x) per verificare che il limite non e' zero in questo caso. Per $\alpha \leq 0$ la continuitá era in realtà immediata.

8) Studiare continuitá, derivabilitá e differenziabilitá in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } y < x^3 \\ y & \text{se } y \geq x^3\ . \end{cases}$$

Ragionando come nell'esercizio 6, gli unici problemi si hanno per i punti (x, y) sulla curva $y = x^3$. Usando la definizione di f, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0^3)\,,y<x^3} f(x, y) = x_0\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,x_0^3)\,,y\geq x^3} f(x, y) = x_0^3\,,$$

e quindi f é continua solo in (x_0, x_0^3) tali che $x_0 = x_0^3$, cioé solo nei punti $(-1, -1)$, $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Per quanto riguarda la derivabilitá, é facile verificare che in *nessun* punto della curva $y = x^3$ esistono le derivate parziali, e quindi f è derivabile solo *fuori* da tale curva. Infatti si ha

$$f(x_0 + h, x_0^3) - f(x_0, x_0^3) = \begin{cases} x_0 + h - x_0^3 & \text{per } h > 0 \\ x_0^3 - x_0^3 = 0 & \text{per } h < 0\,. \end{cases}$$

mentre

$$f(x_0, x_0^3 + h) - f(x_0, x_0^3) = \begin{cases} x_0^3 + h - x_0^3 = h & \text{per } h > 0 \\ x_0 - x_0^3 & \text{per } h < 0\,. \end{cases}$$

per cui i limiti destro e sinistro per $h \to 0$ che definiscono le derivate parziali nei punti appartenenti alla curva $y = x^3$ sono diversi. Là dove é derivabile, f é anche differenziabile (le derivate parziali sono continue).

9) Studiare la continuitá e la differenziabilitá in $\mathbb{R}^2$ di:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+|y|} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

La funzione $f(x, y)$ é continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, inoltre sará continua nell'origine se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + |y|} = f(0, 0) = 0\,.$$

Passando a coordinate polari e prendendo il modulo si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2 y}{x^2 + |y|}\right| = \lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{\rho^3(\cos^2\theta\ |\mathrm{sen}\theta|)}{\rho^2\cos^2\theta + \rho|\sin\theta|} = \lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{\rho^2\cos^2\theta\ |\mathrm{sen}\theta|}{\rho\cos^2\theta + |\sin\theta|} \leq \lim_{\rho\to 0} \rho^2 = 0$$

dato che $\frac{|\mathrm{sen}\theta|}{\rho\cos^2\theta+|\sin\theta|} \leq 1$ e che $\cos^2\theta \leq 1$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$. Per dimostrare la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$, utilizzeremo il teorema del differenziale totale, che ci permette di dedurre la differenziabilità in un punto a partire dalla continuità in un intorno delle derivate prime di f, che possono essere calcolate facilmente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy|y|}{(x^2 + |y|)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^4}{(x^2 + |y|)^2}\,,$$

essendo le stesse continue in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, se ne deduce che f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Per dimostrare la differenziabilità di f nell'origine, dobbiamo calcolare le derivate parziali di f nell'origine come limite di rapporti incrementali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0\,,$$

e verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2 y}{x^2+|y|}}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = 0\,.$$

Passando a coordinate polari e prendendo il modulo si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\frac{x^2 y}{x^2+|y|}}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}\right| = \lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{\rho^3(\cos^2\theta\ |\mathrm{sen}\theta|)}{\rho^3\cos^2\theta + \rho^2|\sin\theta|} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos^2\theta\ |\mathrm{sen}\theta|}{\rho\cos^2\theta + |\sin\theta|} \leq \lim_{\rho\to 0} \rho = 0\,.$$

dato che $\frac{|\mathrm{sen}\theta|}{\rho\cos^2\theta+|\sin\theta|} \leq 1$ e che $\cos^2\theta \leq 1$. Quindi f risulta differenziabile (e continua) in $\mathbb{R}^2$.

10) Sia f la funzione di due variabili definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{(\mathrm{sen}x)^2 + 2(\mathrm{sen}y)^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dove $\alpha \geq 0$ è un parametro reale fissato. Determinare l'insieme di definizione di f. Inoltre determinare per quali valori di α la funzione è continua in 0, per quali valori è derivabile in 0, per quali valori è differenziabile in 0.

La funzione è definita nell'origine e in tutti i punti in cui il denominatore non si annulla. Il denominatore si annulla per

$$(\mathrm{sen}x)^2 + 2(\mathrm{sen}y)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{sen}x = \mathrm{sen}y = 0$$

cioè nei punti

$$x = \ell\pi, \quad y = m\pi, \quad \ell, m \in \mathbb{Z}.$$

In conclusione l'insieme di definizione è

$$\{(0,0)\} \cup \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\ell\pi, m\pi) \colon \ell, m \in \mathbb{Z}\}\right).$$

Continuità in 0: utilizziamo la disuguaglianza

$$|\mathrm{sen}x| \geq c|x|$$

vera per una qualunque fissata costante $c < 1$ purché x sia sufficientemente vicino a 0 (ad esempio $|\mathrm{sen}x| \geq 2|x|/\pi$ è vera per tutti gli x tali che $|x| \leq \pi/2$). Possiamo scrivere allora, per (x,y) vicino all'origine,

$$\frac{|xy|^\alpha}{(\mathrm{sen}x)^2 + 2(\mathrm{sen}y)^2} \leq \frac{|xy|^\alpha}{c^2(x^2 + 2y^2)} \leq \frac{|xy|^\alpha}{c^2(x^2 + y^2)} \leq \frac{1}{c^2}\ \rho^{2\alpha - 2}$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, e quindi vediamo subito che $f \to 0$ quando $(x,y) \to 0$ non appena $\alpha > 1$. Se invece $0 \leq \alpha \leq 1$ otteniamo, sui punti del tipo (x,x)

$$f(x,x) = \frac{|x|^{2\alpha}}{3(\mathrm{sen}x)^2}$$

che non tende a 0 quando $x \to 0$ (infatti tende a $1/3$ per $\alpha = 1$, e tende a $+\infty$ per $\alpha < 1$). In conclusione f è continua in 0 se e solo se $\alpha > 1$.
Derivabilità in 0: se $\alpha > 0$, abbiamo $f(x,0) = f(0,y) = 0$ per tutti gli x, y vicini a 0, quindi i rapporti incrementali nell'origine sono entrambi identicamente nulli e la funzione è derivabile in $(0,0)$ con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Invece quando $\alpha = 0$ la funzione diventa (per $(x,y) \neq (0,0)$)

$$f(x,y) = \frac{1}{(\mathrm{sen}x)^2 + 2(\mathrm{sen}y)^2}$$

che non é derivabile né rispetto a x né rispetto a y.
Differenziabilità in 0: se esiste, il differenziale in 0 deve essere $L = df(0,0) \equiv 0$ dato che le derivate parziali sono nulle. Si tratta allora di capire quando è vero che

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k) - f(0,0) - L(h,k)}{|(h,k)|} = \lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k)}{|(h,k)|} = 0.$$

Scrivendo esplicitamente l'espressione ($|(h,k)| = \sqrt{h^2 + k^2}$), vogliamo sapere per quali valori di α si ha

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|hk|^\alpha}{(\mathrm{sen}h)^2 + 2(\mathrm{sen}k)^2} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Come prima, possiamo scrivere subito

$$\frac{|hk|^\alpha}{(\mathrm{sen}h)^2 + 2(\mathrm{sen}k)^2} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{1}{c^2}\ \rho^{2\alpha - 3}$$

dove $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$. Quindi per $\alpha > 3/2$ il limite è zero e la funzione è differenziabile nell'origine. Se invece $0 \leq \alpha \leq 3/2$, proviamo a fare il limite per punti del tipo (h, h); l'espressione precedente diventa

$$\frac{|h|^{2\alpha}}{3(\mathrm{sen} h)^2} \frac{1}{|h|} = \frac{|h|^2}{3(\mathrm{sen} h)^2} |h|^{2\alpha - 3}$$

ed esattamente come prima vediamo che il limite non è zero se $0 \leq \alpha \leq 3/2$, quindi la funzione non è differenziabile in 0 per tali valori del parametro.