Calcolo II, a.a. 2005–2006 — Soluzioni 2 — 14 Ottobre 2005
corso dei Proff. M. Assunta Pozio e Antonio Siconolfi
esercitazioni a cura della Dott.ssa Luisa Moschini

1) Definita la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{per } y \neq 0 \\ 0 & \text{per } y = 0 \end{cases}$$

verificare che per $(x,y) \neq (x,0)$ si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ mentre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Per $y \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \frac{1}{y} = \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 2y \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{xy^2}{x^2+y^2} \ ,$$

per cui derivando $\frac{\partial f}{\partial x}$ rispetto alla variabile y si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{3y^2(x^2+y^2) - 2yy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

mentre derivando $\frac{\partial f}{\partial y}$ rispetto alla variabile x si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \frac{1}{y} + \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} 2x - \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{y^2(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2} \ ,$$

quindi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ per $(x,y) \neq (x,0)$.
In realtá i precedenti passaggi potevano essere omessi osservando che f é una funzione infinitamente derivabile con continuitá se $y \neq 0$, per cui $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ per $(x,y) \neq (x,0)$ discende direttamente del teorema di Schwartz.
Nell'origine si hanno invece entrambe le derivate parziali nulle dato che $f(h,0) = f(0,h) = f(0,0) = 0$. Inoltre da sopra per $y_0 \neq 0$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \frac{y_0^3}{y_0^2} = y_0$ mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0,h) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \arctan\left(\frac{x_0}{h}\right)}{h} = 0 \ ,$$

dato che $|\arctan\left(\frac{x_0}{h}\right)| \leq \frac{\pi}{2}$. Per definizione si ha quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

mentre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0 \ .$$

2) (i) Definita la funzione $f(x,y) = \frac{x^2 y}{2} - x^2 + xy - 2x - y^2$ determinare l'equazione del piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(1,0)$.
(ii) Calcolare inoltre la derivata direzionale di f nel punto $(0,1)$ secondo la direzione $\lambda = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

(i) Per prima cosa calcoliamo in $(1,0)$ la funzione e le sue derivate parziali $f(1,0) = -3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = xy - 2x + y - 2\Big|_{(1,0)} = -4$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{x^2}{2} + x - 2y\Big|_{(1,0)} = \frac{3}{2}$. Quindi l'equazione del piano tangente (che esiste perché la funzione f essendo un polinomio ammette derivate parziali continue ed é quindi differenziabile) é

$$z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0) = -3 - 4(x-1) + \frac{3}{2}y = 1 - 4x + \frac{3}{2}y \ .$$

(ii) Poiché f é differenziabile si ha inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \ .$$

3) (i) Calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, dove $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$, per $(x,y) \neq (0,0)$.
(ii) Nel caso in cui il limite l, di cui sopra, esista finito, prolungare con continuitá la funzione $f(x,y)$ nell'origine, ponendo $f(0,0) = l$ e calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$.
(iii) Stabilire se f cosí definita é differenziabile nell'origine.

(i) Passando a coordinate polari e prendendo il modulo si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3 y}{x^2+y^2}\right| = \lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{\rho^4 |\cos^3\theta \sin\theta|}{\rho^2} \leq \lim_{\rho\to 0} \rho^2 = 0 \quad ,$$

dato che $|\cos^3\theta\sin\theta| \leq 1$. (ii) Poiché $f(h,0) = f(0,0) = f(0,h) = 0$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. (iii) La funzione é differenziabile nell'origine se e soltanto se si ha:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3 k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \ .$$

Passando a coordinate polari e prendendo il modulo si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\frac{h^3 k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\right| = \lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{\rho^4 |\cos^3\theta \sin\theta|}{\rho^3} \leq \lim_{\rho\to 0} \rho = 0 \ ,$$

dato che $|\cos^3\theta\sin\theta| \leq 1$.

4) Ripetere l'esercizio **3)** per la funzione $f(x,y) = y\log\left(2 + \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$, per $(x,y) \neq (0,0)$.

(i) Poiché $\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$, allora $\frac{3}{2} \leq 2 + \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{5}{2}$, da cui $\log\frac{3}{2} \leq \log\left(2 + \frac{xy}{x^2+y^2}\right) \leq \log\frac{5}{2}$, quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\log\left(2 + \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0 \ .$$

(ii) Poiché $f(h,0) = f(0,0) = 0$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\log 2}{h} = \log 2 \ .$$

(iii) La funzione é differenziabile nell'origine se e soltanto se il seguente limite é nullo:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k\log\left(2+\frac{hk}{h^2+k^2}\right) - k\log 2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k\left(\log\left(2+\frac{hk}{h^2+k^2}\right) - \log 2\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \ .$$

Passando a coordinate polari e prendendo il modulo si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|k|\left|\log\left(2+\frac{hk}{h^2+k^2}\right) - \log 2\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{\rho|\cos\theta|\,|\log(2+\cos\theta\sin\theta) - \log 2|}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} |\cos\theta|\,|\log(2+\cos\theta\sin\theta) - \log 2| = \sup_{\theta\in[0,2\pi)} |\cos\theta|\,|\log(2+\cos\theta\sin\theta) - \log 2| \neq 0 \ .$$

Quindi la funzione non é differenziabile nell'origine.

5) Verificare che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

é derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata discontinua in $x = 0$. Definita la funzione $f(x,y) = g(x) + g(y)$ dimostrare che f é differenziabile in $(0,0)$ pur avendo entrambe le derivate parziali discontinue in $(0,0)$.

Per prima cosa

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

dato che $-1 \leq \sin \frac{1}{h} \leq 1$, mentre

$$g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

il cui limite per $x \to 0$ non esiste a causa del secondo addendo. Quindi g é derivabile ovunque in $\mathbb{R}$ ma non ha derivata continua nell'origine. Per definizione di f si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(x)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g'(y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, quindi f ha entrambe le derivate parziali discontinue nell'origine; f é peró differenziabile nell'origine, infatti il seguente limite é nullo

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \left| \frac{g(h) + g(k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{|g(h)| + |g(k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = 0 \,,$$

dato che $|\sin \frac{1}{h}| \leq 1$, $|\sin \frac{1}{k}| \leq 1$.

6) Dimostrare che sono definite e differenziabili su $\mathbb{R}^2$ le funzioni

$$f(x, y) = \int_x^y \frac{\sin(t)}{t} \, dt \,, \qquad g(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} \, dt \,.$$

La funzione $h(t) = \sin(t)/t$, posta uguale ad 1 nell'origine, é continua e quindi integrabile su ogni intervallo di $\mathbb{R}$. Pertanto, f è ben definita su $\mathbb{R}^2$. Per il teorema fondamentale del calcolo, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -h(x) \,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h(y) \,.$$

Essendo le derivate parziali continue, f é differenziabile su $\mathbb{R}^2$.
La funzione $k(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}$ *non* é prolungabile per continuitá nell'origine, ma, dal momento che ha un andamento asintotico uguale a $t^{-\frac{1}{2}}$, é integrabile in senso improprio. La funzione g é pertanto ben definita. Se x e y sono diversi da zero, si ha (per il teorema fondamentale del calcolo integrale),

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -2 \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} \,, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2 \frac{1 - \cos(y^2)}{y^4} \,.$$

Mentre

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{h \to 0} \left[\int_{h^2}^{y_0^2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} \, dt - \int_0^{y_0^2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} \, dt \right] \frac{1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[- \int_0^{h^2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} \, dt \right] \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0} (-2h) \frac{1 - \cos(h^2)}{h^5} = -1$$

usando nel primo passaggio il teorema di de l'Hôpital. Poiché -1 é esattamente il limite di $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ per (x, y) tendente a $(0, y_0)$ e poiché lo stesso ragionamento puó ripetersi per ogni altra derivata ($\frac{\partial g}{\partial y}(0, y_0)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, 0)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, 0)$) si ha che le derivate parziali sono continue su $\mathbb{R}^2$, e quindi g é differenziabile.

7) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 + \alpha x + \beta y - e^{x+y}}{x^2 + y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono parametri reali. Determinare per quali valori di α, β la funzione é continua, per quali valori é derivabile, per quali valori é differenziabile.

La funzione é definita ovunque fuori dall'origine e di classe C^∞. Se ci avviciniamo all'origine lungo l'asse x otteniamo

$$f(x, 0) = \frac{1 + \alpha x - e^x}{x^2} \,.$$

Si verifica subito (ad esempio con de l'Hôpital) che se $\alpha \neq 1$ si ha $f(x,0) \to \pm\infty$ per $x \to 0$ (a seconda del valore di α e del segno di x), in particolare non si ottiene un limite finito; se invece $\alpha = 1$ si ha $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \frac{1}{2}$. Basta questa osservazione per dedurre che il limite di $f(x,y)$ in $(0,0)$ non é mai 0 e la funzione non é quindi continua in $(0,0)$ per nessun valore di α, β. Se f non é continua nell'origine, non puó essere differenziabile nell'origine. Potrebbe peró essere derivabile nell'origine (anche se non sará mai C^1) ma come abbiamo visto $f(x,0)$ non é continua e quindi non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}$ (discorso analogo per $\frac{\partial f}{\partial y}$), cioé f non puó essere derivabile in 0.

8) Studiare continuitá, derivabilitá e differenziabilitá in $\mathbb{R}^3$, al variare dei parametri $\alpha, \beta, \gamma > 0$, della funzione

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha \, |y|^\beta \, |z|^\gamma}{x^2+y^2+z^2} & \text{per } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

La funzione f é continua in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Usando il fatto che $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, e le analoghe per $|y|$ e $|z|$, è facile vedere che f è continua anche nell'origine se $\alpha+\beta+\gamma > 2$. Se $\alpha+\beta+\gamma = 2$, è sufficiente calcolare il limite sulle rette $x = l\,t$, $y = m\,t$, $z = n\,t$ per rendersi conto che dipende dalla retta scelta. Se, poi, $\alpha+\beta+\gamma < 2$, la funzione è illimitata superiormente in un intorno dell'origine, e quindi non ammette limite zero. In sintesi la funzione é continua nell'origine se e soltanto se $\alpha+\beta+\gamma > 2$.
Passiamo ora a studiare derivabilitá e differenziabilitá di f nell'origine. Essendo $\alpha > 0$ (così come β e γ), le derivate parziali di f nell'origine esistono e sono tutte nulle. Per la differenziabilità, si tratta di verificare quando

$$\lim_{(h,k,l)\to(0,0,0)} \frac{|h|^\alpha \, |k|^\beta \, |l|^\gamma}{(h^2+k^2+l^2)^{\frac{3}{2}}} = 0\,,$$

ed è facile vedere che ciò accade se e solo se $\alpha+\beta+\gamma > 3$.
Passiamo ora a studiare derivabilitá e differenziabilitá di f in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Si verifica facilmente che la funzione f risulta derivabile con continuitá al di fuori dei tre piani di equazioni rispettivamente $x = 0$, $y = 0$ o $z = 0$; per il teorema del differenziale totale é quindi ivi differenziabile.
Resta da verificare derivabilitá e differenziabilitá di f su questi tre piani. Consideriamo il piano $x = 0$ ad eccezione dell'origine (precedentemente studiata) cioé l'insieme dei punti $\{(0,y,z) : (y,z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$, poiché $f(0,y,z) = 0$ le derivate parziali di f lungo gli assi y e z esistono su tali punti e sono nulle. Per quanto riguarda la derivata parziale rispetto l'asse x questa esiste se esiste il seguente limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y,z) - f(0,y,z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha \, |y|^\beta \, |z|^\gamma}{h(h^2+y^2+z^2)} = |y|^\beta \, |z|^\gamma \lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha}{h(h^2+y^2+z^2)}\ ;$$

poiché $(y,z) \neq (0,0)$ tale limite esiste se e soltanto se $\alpha > 1$ ed in tal caso vale 0. Per la differenziabilità, si tratta quindi di verificare quando

$$\lim_{(h,k,l)\to(0,0,0)} \frac{|h|^\alpha \, |y+k|^\beta \, |z+l|^\gamma}{(h^2+(y+k)^2+(z+l)^2)\sqrt{h^2+k^2+l^2}} = 0\,,$$

ed è facile vedere che poiché $(y,z) \neq (0,0)$ ciò accade se e solo se $\alpha > 1$. Analogamente possono essere trattati gli altri due piani. In tal caso si ha che le derivate parziali di f lungo gli assi x e z (rispettivamente x e y) esistono sui punti del piano $y = 0$ (rispettivamente $z = 0$) ad eccezione dell'origine e sono nulle; che la derivata parziale di f lungo l' asse y (rispettivamente z) esiste sui punti del piano $y = 0$ (rispettivamente $z = 0$) ad eccezione dell'origine se e solo se $\beta > 1$ (rispettivamente $\gamma > 1$) ed é nulla; infine che la funzione f é differenziabile sui punti del piano $y = 0$ (rispettivamente $z = 0$) ad eccezione dell'origine se e solo se $\beta > 1$ (rispettivamente $\gamma > 1$).