Capitolo 2 Gruppi di Lie

§1 Il metodo infinitesimale

NOTA Discutiamo i fondamenti della teoria sviluppando il legame fra gruppi ed algebre di Lie.

1.1 Introduzione La teoria dei gruppi di Lie ha svariati aspetti e le tecniche matematiche che vi si incontrano sono le più svariate, qui ci concentreremo sulla teoria delle rappresentazioni (che è parte di una collezione di teorie di rappresentazione per oggetti assai vari).

La teoria inizia con la definizione di Lie che ora diremo *locale o germe.*

Si suppongono date due funzioni

$$f : U \times U \to W, \quad g : U \times V \to V$$

dove $U \subset W \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ sono aperti negli spazi corrispondenti (per semplicità potremo supporli intorni di 0.

Lie suppone che tali funzioni siano differenziabili e che soddisfino.

$$f(a, f(, b, c)) = f(f(a, b), c) \quad \text{dove i due termini sono definiti}$$
$$f(0, a) = f(a, 0) = a$$
$$g(f(a, b), x) = g(a, g(b, x)), \quad g(0, x) = x$$

successivamente Lie impose anche l'esistenza di un inverso locale

$$i : U \to U, \quad f(i(a), a) = f(a, i(a)) = 0.$$

Esempio-esercizio Le trasformazioni lineari fratte

$$\frac{(a+1)x + b}{cx + d + 1} = ((a+1)x + b)(\sum_{j=0}^{\infty}(-cx - d)^j)$$

per dare la definizione alla maniera di Lie (abbiamo cambiato coordinate nelle matrici in modo che l'elemento neutro abbia coordinate 0) vanno ristrette ad aperti opportuni.

Il metodo di Lie consiste nel trasformare le precedenti euazioni funzionali in equazioni differenziali (alle derivate parziali) di tipo speciale che esprimono *in modo infinitesimale* le relazioni precedenti.

Come vedremo tali equazioni si possono integrare, almeno localmente fornendo le basi del *metodo infinitesimale.*

Con lo sviluppo delle idee globali di geometria differenziale si è passati ad un punto di vista differente, gli aperti U, W si identificano ad una varietà differenziabile G ed $f : G \times G \to G$ si suppone una operazione C^∞ che sia una legge di moltiplicazione di un gruppo, si suppone (o si prova) che anche l'inverso è C^∞ si ottiene in tal modo la nozione di *Gruppo di Lie*.

L'altra parte della definizione di Lie si traduce nella definizione di *azione* di G su una varietà differenziabile M, da questo punto di vista globale ad esempio le trasformazioni lineari fratte operano sulla retta reale proiettiva, e non solo su $\mathbb{R}$. Formalmente dunque:

Definizione. *Un gruppo di Lie G è una varietà differenziabile C^∞ con una struttura di gruppo tale che le due operazioni di moltiplicazione ed inverso siano C^∞.*[1]

Una azione di un gruppo di Lie G su una varietà differenziabile M è una azione $G \times M \to M$ del gruppo G sull'insieme M che sia anche una funzione C^∞.

Il più ovvio gruppo di Lie è $\mathbb{R}$ i numeri reali con l'addizione, poi $\mathbb{R}^+$ i numeri reali positivi con la moltiplicazione, S^1 i numeri complessi di modulo 1 con la moltiplicazione. Questi sono tutti gruppi abeliani poi abbiamo il gruppo delle matrici invertibili $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ sui reali o sui complessi e sottogruppi notevoli come

$$O(n, \mathbb{R}) := \{X \in GL(n, \mathbb{R}) | XX^t = 1\},$$
$$SO(n, \mathbb{R}) := \{X \in O(n, \mathbb{R}) | \det(X) = 1\}$$

il gruppo ortogonale ed il gruppo speciale ortogonale

$$U(n, \mathbb{C}) := \{X \in GL(n, \mathbb{C}) | X\overline{X}^t = 1\},$$
$$SU(n, \mathbb{C}) := \{X \in U(n, \mathbb{C}) | \det(X) = 1\}$$

il gruppo unitario ed il gruppo speciale unitario.

Il fatto che $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ siano gruppi di Lie è banale in quanto abbiamo coordinate globali in cui la moltiplicazione è data da polinomi (quadratici) nelle coordinate, mnentre l'inverso è dato da funzioni razionali con il determinante a denominatore. Per gli altri gruppi in realtà vale un teorema generale che proveremo in seguito, ovvero che un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie è in modo naturale gruppo di Lie, in particolare è una sottovarietà.

Osservazione. Se $XX^t = 1$ si ha $\det(X)^2 = 1$ quindi $\det(X) = \pm 1$, evidentemente esistono sempre matrici con $XX^t = 1$ e $\det(X) = -1$ ad esempio diagonali con autovalori -1 con molteplicità 1 ed 1 gli altri autovalori. Segue che $SO(n, \mathbb{R})$ è un sottogruppo normale di $O(n, \mathbb{R})$ di indice 2.

[1] si potrebbe indebolire la condizione C^∞ ma infatti vi è un teorema generale che assicura che un gruppo topologico G che sia localmente euclideo senza ipotesi di differenziabilità è addirittura un gruppo analitico, ovvero le operazioni sono di classe C^ω.

Osservazione I 4 gruppi appena definiti sono insiemi chiusi e limitati delle matrici e quindi sono *compatti.*

Quasi tutti gli esempi che studieremo si otterranno nel modo seguente:
Il gruppo G è un sottogruppo chiuso del gruppo delle matrici invertibili $GL(n, \mathbb{R})$, o $GL(n, \mathbb{C})$ sui reali o sui complessi.
M è una sottovarietà $G-$stabile di $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ o del corrispondente spazio proiettivo.

Prima di iniziare una trattazione sistematica studiamo in modo elementare i gruppi precedentemente introdotti, mostrando che sono effettivamente gruppi di Lie e calcolandone la dimensione. Per questo utilizzeremo la trasformata di Cayley:

$$y := C(x) := \frac{1-x}{1+x}, \quad x = \frac{1-y}{1+y}, \qquad C^2 = 1$$

che pensiamo come una trasformazione delle matrici $n \times n$, non definita ovunque ma solo nell'intorno U di 0 dato da $\det(1+x) \neq 0$, dove C è biunivoca ed involutiva. U è l'aperto formato da quelle matrici che non hanno autovalore -1.
Abbiamo:

$$C(-x) = C(x)^{-1}, \quad C(x^t) = C(x)^t, \quad C(\overline{x}) = \overline{C(x)}, \quad C(yxy^{-1}) = yC(x)y^{-1}.$$

Inoltre (usando una forma triangolare) se $a_1, \ldots, a_n$ sono gli autovalori di x allora $\frac{1-a_i}{1+a_i}$ sono gli autovalori di $C(x)$.
L'aperto U è evidentemente stabile per le operazioni di trasposizione e coniugazione ma non per $x \to -x$, per questo ci si deve restringere all'aperto V definito da $\det(1+x) \neq 0,\ \det(1-x) \neq 0$ formato da quelle matrici che non hanno autovalori uguali a ± 1.

A questo punto osserviamo che, se $x \in V$ si ha:

$$C(x)^t = C(X)^{-1} \iff x^t = -x, \quad \overline{C(x)}^t = C(X)^{-1} \iff \overline{x}^t = -x,$$

Ne deduciamo che almeno nell'aperto V i gruppi $O(n, \mathbb{R}),\ U(n, \mathbb{C})$ sono sottovarietà (date in forma parametrica) e:

$$\dim O(n, \mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \dim U(n, \mathbb{C}) = n^2.$$

preso un punto p qualunque in uno di questi sottogruppi H, la moltiplicazione per p porta un intorno di 1 in un intorno di p con un diffeomorfismo e $px \in H$ se e solo se $x \in H$ quindi per moltiplicazione otteniamo anche coordinate locali intorno ad un punto qualunque $p \in H$ mostrando che, non appena abbiamo verificato che H è una sottovarietà nell'intorno di 1 lo è in ogni suo punto.

ESERCIZIO Studiare i seguenti gruppi. Usiamo ora e nel futuro la notazione $M_{n,m}(K)$ come lo spazio delle matrici $n \times m$ su un campo K (nel nostro caso $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

Il gruppo *affine* reale o complesso delle matrici a blocchi $n+1 \times n+1$

$$\begin{vmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad A \in GL(n, K), \quad u \in M_{n,1}(K)$$

opera sullo spazio affine $n-$dimensionale visto come vettori colonna $\begin{vmatrix} v \\ 1 \end{vmatrix}$.

Il gruppo $O(p, q)$ delle matrici reali che preservano la forma quadratica reale indefinita $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=1}^{q} x_{p+j}^2, \; x_i \in \mathbb{R}$.

Il gruppo $U(p, q)$ delle matrici complesse che preservano la forma Hermitiana complessa indefinita $\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2 - \sum_{j=1}^{q} |x_{p+j}|^2, \; x_i \in \mathbb{C}$.

1.2 Azioni Prima di immergerci nella teoria di Lie facciamo delle semplici premesse di tipo algebrico sulla simmetria e sulle azioni dei gruppi.

Definizione. *Una azione di un gruppo G su un insieme X è una applicazione, $\phi : G \times X \to X$, che spesso si indica in modo più suggestivo come un prodotto: $\phi(g, x) := gx$, e che soddisfa agli assiomi:*

$$\phi : G \times X \to X, \quad 1x = x, \quad g(hx) = (gh)x, \quad \forall x \in X, \forall g, h \in G$$

Si vede immediatamente che per ogni $g \in G$ l'applicazione $L_g : x \to gx$ è biunivocva con inversa $L_{g^{-1}}$, inoltre gli assiomi sono equivalenti a:

$$L_1 = 1_X, \quad L_{gh} = L_g \circ L_h.$$

In altre parole, dare una azione di G su X equivale a dare un omomorfismo di gruppi da G al gruppo S_X di tutte le trasformazioni biunivoche di X.

Nella teoria che svilupperemo sia X che G avranno altre strutture (topologica, differenziabile, algebrica) e sarà naturale restringersi ad azioni che rispettano le strutture.

A volte invece di dire che G agisce (o opera) su X diremo che X è un $G-$*insieme.*

È conveniente pensare agli insiemi su cui G agisce come una *categoria*, la categoria dei $G-$insiemi dando la seguente definizione:

Definizione. *Dati due $G-$insiemi X, Y un $G-$morfismo, ovvero un morfismo $G-$equivariante da X a Y è una applicazione $f : X \to Y$ che soddisfa:*

$$f(gx) = gf(x), \quad \forall x \in X, \; g \in G. \tag{1.2.1}$$

Fra le azioni abbiamo la *azione banale*, $gx = x, \forall g, x$.

Se G agisce banalmente su Y un morfismo $G-$equivariante da X a Y è anche detto un *invariante.*

Dta la azione di G su X si definisce la relazione di equivalenza (verificare);

$$x \equiv y, \iff \exists g \in G \,|\, y = gx.$$

Le classi di equivalenza si dicono *orbite* del gruppo, dato un $x \in X$ la sua orbita si denota con Gx e si ha:

$$Gx = \{gx,\ g \in G\}. \tag{1.2.2}$$

Un elemento $x \in G$ si dice invariante o fisso per G se $Gx = x$ ovvero $gx = x$ per ogni $g \in G$.

Da una o più azioni se ne possono dedurre altre. Il modo più semplice è d prendere due $G-$insiemi X, Y e farne la *somma disgiunta* $X \sqcup Y$.

1) Dati due G insiemi X, Y sia Y^X l'insieme delle applicazioni $f : X \to Y$ ed $X \times Y$ il prodotto. Agiamo su Y^X e su $X \times Y$ con le formule:

$$f : X \to Y, \quad (gf)(x) := g(f(g^{-1}x)), \quad g(x, y) := (gx, gy).$$

OSSERVAZIONE 1) $f : X \to Y$ è $G-$equivariante se e solo se è un invariante rispetto alla azione sulle funzioni.

2) (x, y) è fisso se e solo se sia x che y sono fissi.

Più in generale si definisce:

$$G_x := \{g \in G \,|\, gx = x\}, \qquad \text{lo stabilizzatore di } x. \tag{1.2.3}$$

Si vede subito che:

i) Per ogni $x \in X$, G_x è un sottogruppo di G.

ii) $G_{(x,y)} = G_x \cap G_y$.

iii) $G_{hx} = hG_xh^{-1}$.

Se prendiamo come Y un campo per esempio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e consideriamo le funzioni reali o complesse su X abbiamo che $\mathbb{R}^X$ è uno spazio vettoriale (ed anche un'algebra per moltiplicazione), l'azione di G su $\mathbb{R}^X$ è data da trasformazioni lineari. In generale:

DEFINIZIONE. *Una rappresentazione lineare di un gruppo G è una azione di G su uno spazio vettoriale V tramite trasformazioni lineari.*

In altri termini una rappresentazione lineare di G su V è un omomorfismo $\rho : G \to GL(V)$ nel gruppo di tutte le trasformazioni lineari.

Come per le azioni cosí per le rappresnetazioni lineari possiamo formarne di nuove da date:

Se V, W sono due rappresntazioni lineari possiamo formare:

$$V^*,\ hom(V, W),\ V \oplus W,\ V \otimes W$$

Le azioni lineari sono quelle evidenti, scriviamo $\langle \phi \,|\, v\rangle$ per il valore di una forma $\phi \in V^*$ su un vettore $v \in V$:

$$\langle g\phi \,|\, v\rangle := \langle \phi \,|\, g^{-1}v\rangle, \quad (gf)(v) := g(f(g^{-1}v)), \quad g(v \oplus w) := gv \oplus gw, \quad g(v \otimes w) := gv \otimes gw$$

Una formula fondamentale si ha considerando il morfismo lineare:

(1.2.4) $$i : W \otimes V^* \to hom(V, W), \quad i(w \otimes \phi)(v) := \langle \phi \,|\, v\rangle w.$$

PROPOSIZIONE. *Se V, W sono $G-$rappresentazioni $i : W \otimes V^* \to hom(V, W)$ è $G-$lineare. Se V o W è di dimensione finita, i è un isomorfismo.*

DIM. Semplice esercizio. $\square$

Infine a partire da uno spazio V possiamo costruire varie algebre.

L'algebra tensoriale $T(V) := \oplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i}$ e i suoi quozienti $\wedge V$, $S(V)$.

Se V è una rappresentazione lineare di G l'azione indotta su queste algebre preserva il prodotto, ovvero G opera come gruppo di automorfismi di algebre.

Nella trattazione seguente vi saranno gruppi e spazi di vario tipo, alcuni di dimensione infinita come ad esempio il gruppo di tutti i diffeomorfismi di una varietà, che opera su spazi di dimensione infinita come lo spazio delle funzioni C^∞ o dei campi vettoriali o le forme differenziali. Cercheremo di sviluppare un formalismo che almeno per gli aspetti algebrici sia del tutto generale per cui la natura formale delle formule dovrebbe essere chiara.

1.3 Prime proprietà

Sia G un gruppo di Lie e consideriamo la moltiplicazione $m : G \times G \to G$ e l'inverso $i : G \to G$ poiché $m(1, 1) = 1^2 = 1, \quad i(1) = 1$ abbiamo un differenziale

$$dm_{1,1} : T_1(G) \times T_1(G) \to T_1(G), \quad di_1 : T_p(G) \to T_p(G)$$

PROPOSIZIONE.

$$dm_{1,1}(a, b) = a + b, \quad di_1(a) = -a$$

DIM. Il primo addendo $T_1(G) \times 0$ è per definizione l'immagine tramite $(dj_l)_1$ 1a inclusione $j_1 : G \to G \times G, \quad j_1(g) := (g, 1)$ per moltiplicazione $m \circ j_1 = 1_G$ quindi $dm_{1,1} \circ (dj_1)_1 = 1$ ovvero $dm_{1,1}(a, 0) = a$, simiole analisi per j_2. Per i abbiamo che $m(g, i(g)) = m(g, g^{-1}) = 1$ quindi segue che $a + di_1(a) = 0$. $\square$

1.4 Gruppi ad un parametro

Il primo grande passo nella teoria dei gruppi di Lie stà nello sviluppare il metodo infinitesimale ossia la teoria delle algebre di Lie, la base è la nozione di *gruppo ad un parametro* ovvero:

Definizione. Un gruppo ad un parametro in un gruppo di Lie G è un omomorfismo C^∞,[2]

$$\phi : \mathbb{R} \to G.$$

Esempio Esercizio Matrici ed evoluzioni lineari.

Data una matrice reale $A \in M(n, \mathbb{R})$ l'esponenziale

$$e^{sA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA)^k}{k!}$$

è un gruppo ad un parametro in $GL(n, \mathbb{R})$. Esso induce il gruppo di diffeomorfismi $\phi_A(s)(v)e^{sA}v$ su $v \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema lineare di equazioni differenziali a coefficienti costanti:

$$\frac{d\, e^{sA} v}{d\, s} = A e^{sA} v$$

ed anche per moltiplicazione ad esempio a sinistra sul gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ un gruppo di diffeomorfismi di $GL(n, \mathbb{R})$, calcolarne i rispettivi generatori infinitesimali.

Teorema. *Dato un gruppo di Lie G ed un vettore tangente all'identità $a \in T_1(G)$ esiste un unico gruppo ad un parametro $\psi_a(s)$ che ha a come velocità in 0.*

Esistono unici campi vettoriali $X^d(a)$, $X^s(a)$ invarianti rispetto alle moltiplicazioni a destra (risp. a sinistra) degli elementi di G ed uguali ad a in 1.

$X^d(a)$ (risp. $X^s(a)$) è il generatore infinitesimale del gruppo ad un paramtero di diffeomorfismi di G:

$$(s, g) \to \psi_a(s)g, \quad \textit{risp.} \quad (s, g) \to g\psi_a(s).$$

Dim. Ragioniamo a sinistra (a destra è simile). Indichiamo con $L_g : x \to gx$ il diffeomorfismo di G indotto dalla moltiplicazione a sinistra per un elemento g. Dire che un campo di vettori X è invariante a sinistra vuol dire (1.3.2) che, per ogni $g, h \in G$ si ha

$$X_{gh} = dL_g(X_h), \quad dL_g(h) : T_h(G) \to T_{gh}(G)$$

in particolare se $X_1 = a$ si deve avere $X_g = dL_g(1)(a)$. Ora effettivamente si può usare tale formula come definizione

$$X^s(a)_g := dL_g(a)$$

per la legge di composizione dei differenziali segue l'invarianza a sinistra e, in coordinate il campo è espresso tramite la matrice Jacobiana e quindi è C^∞.

[2]in effetti basta supporre che sia continuo e C^∞ segue

Esprimiamo la moltiplicazione $g = (g_1, \ldots, g_m),\ h = (h_1, \ldots, h_m)$

$$gh = (F_1(g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m), \ldots, F_m(g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m))$$

e quindi

$$dL_g(1)(a_1, \ldots, a_m) = (\sum_j \frac{\partial F_1(g_1, \ldots, g_m, 0, \ldots, 0)}{\partial h_j} a_j, \ldots, \sum_j \frac{\partial F_m(g_1, \ldots, g_m, 0, \ldots, 0)}{\partial h_j} a_j).$$

Sia $\Psi(s)$ il (germe) di gruppo ad un parametro associato ad $X^s(a)$ e poniamo $\psi_a(s) := \Psi(s)(1)$ la curva di evoluzione di $1 \in G$.

Componendo con L_g ed applicando la formula delle derivate vediamo che una curva integrale di $\psi(s)$ viene mandata in una curva integrale ovvero $g\Psi(s)(h) = \Psi(s)(gh)$ da cui in particolare $\Psi(s)(g) = g\Psi(s)(1) = g\psi_a(s)$ ed inoltre $\psi_a(s+t) = \Psi(s+t)(1) = \Psi(s)\Psi(t)(1) = \Psi(t)(1)\psi_a(s) = \psi_a(t)\psi_a(s)$.

Ne segue che $\psi_a(s)$ è un germe di gruppo ad un parametro, a priori definito solo in un intorno di raggio ϵ di 0. Ma ora è facile definire $\psi_a(s)$ per ogni s (e quindi anche $\Psi(s)$, basta preso s determinare un intero n per cui $s/n < \epsilon$ e porre $\psi_a(s) := \psi_a(s/n)^n$.

Ora il teorema fondamentale:

TEOREMA. *Lo spazio dei campi vettoriali invarianti a destra (risp. a sinistra) è una sottoalgebra di Lie dell'algebra di Lie di tutti i campi vettoriali.*

DIM. La struttura di algebra di Lie segue facilmente. Da Cap. 1, 1.3.1 sappiamo che l'azione dei diffeomorfismi sui campi vettoriali preserva la parentesi di Lie. In particolare i campi vettoriali invarianti per un insieme di diffeomorfismi di una varietà M sono una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{L}(M)$, basta quindi applicare questa osservazione al gruppo dei diffeomorfismi dato dalle moltiplicazioni sinistre. $\square$

Diamo quindi la definizione fondamentale:

DEFINIZIONE. *Dati due vettori $a, b \in T_1(G)$ definiamo $[a, b]$ dalla formula:*

(1.4.1) $$X_{[a,b]} := [X_a, X_b].$$

$T_1(G)$ con la struttura di algebra di Lie data dalla precedente formula (canonicamente isomorfa all'algebra di Lie dei campi vettoriali invarianti a sinistra) è l'algebra di Lie del gruppo G.

OSSERVAZIONE Avremmo potuto usare i campi invarianti a destra, in generale otterremo una diversa struttura $[a, b]_d$ di algebra di LIe. In effetti molto semplicemnte $[a, b]_d = -[a, b]$. Infatti vi è una semplice relazione fra campi invarianti a sinistra ed a destra, basta prender il diffeomorfismo $i : g \to g^{-1}$ che scambia la moltiplicazione a destra per h con la moltiplicazione a sinistra per h^{-1}. Pertanto i induce un isomorfismo fra l'algebra di Lie dei campi invarianti a sinistra e quella dei campi invarianti a destra. Poichè il differenziale di i in 1 è $v \to -v$ si ha:

$$(1.4.2) \qquad i_*(X^s_v) = X^d_{-v} = -X^d_v.$$

Esempio $G = GL(n, \mathbb{R})$, per ogni matrice A abbiamo il gruppo ad un parametro e^{sA} e quindi il campo vettoriale invariante a destra (risp. sinistra) è il generatore del gruppo di diffeomorfismi $X \to e^{sA}X$, (risp. $X \to Xe^{sA}$.) Il campo vettoriale è dunque quello lineare AX (risp. XA) ovvero in coordinate

$$\Delta^d_A := \sum_{ij}(\sum_h x_{ih}a_{hj})\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \quad \Delta^s_A := \sum_{ij}(\sum_h a_{ih}x_{hj})\frac{\partial}{\partial x_{ij}}.$$

Le applicazioni $A \to -\Delta^d_A, A \to \Delta^s_A$ sono omomorfismi di algebre di Lie, la matrice elementare e_{ij} corrisponde ai campi $\sum_k x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}$, $\sum_k x_{jk}\frac{\partial}{\partial x_{ik}}$.

Prendiamo $i : X \to X^{-1} = Y$, per calocare il differenziale in X facciamo lo sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$(X+\epsilon V)^{-1} = (X(1+\epsilon X^{-1}V))^{-1} = (1-\epsilon X^{-1}V))X^{-1} + O(\epsilon^2), \quad di_X(V) = -X^{-1}VX^{-1}$$

Se $V = XA$ è il valore del campo invariante a sinistra abbiamo dunque in $Y = X^{-1}$ il vettore $di_X(XA) = -X^{-1}XAX^{-1} = -AX^{-1} = -AY$.

Dato un vettore tangente $a \in T_1(G)$ è usuale (dalla teoria delle matrici) denotare il gruppo ad un parametro da esso generato come $s \to esp(sa)$ il prodotto di Lie si legge infinitesimalmente dalla formula

$$(A) \qquad \lim_{n\to\infty}[esp(a/n)esp(b/n)esp(-a/n)esp(-b/n)]^{n^2} = esp([a, b]).$$

Altra formula notevole è:

$$(B) \qquad \lim_{n\to\infty}[esp(a/n)esp(b/n)]^n = esp(a + b).$$

Proveremo in seguito queste formule riducendoci al caso delle matrici.

Esercizio Dimostrare le due formule per le matrici.

Suggerimento. Si parta dalla formula

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{A}{n})^n = e^A$$

che si generalizza come segue (per continuità):

Data una successione di matrici A_n con $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ allora

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{A_n}{n})^n = e^A$$

Calcolando esplicitamente si vede che

$$esp(a/n)esp(b/n) = 1 + \frac{(a+b)}{n} + O(1/n^2)$$
$$esp(a/n)esp(b/n)esp(-a/n)esp(-b/n) = 1 + \frac{[a,b]}{n^2} + O(1/n^3).$$

Similmente se $\lim_n a_n = a, \lim_n b_n = b$ si ha:

(B') $$\lim_{n\to\infty}[esp(a_n/n)esp(b_n/n)]^n = esp(a+b).$$

Il significato della formula precedente è ancora più chiaro nella sua forma generale.

LEMMA. *Siano dati due gruppi ad un parametro (o germi di gruppi ad un parametro) $\phi(s)$, $\psi(t)$ con generatori infinitesimali X, Y rispettivamente. Dato un punto $p \in M$ consideriamo la curva (nel parametro s) $\phi(s)\psi(s)\phi(-s)\psi(-s)p$ si verifica allora che la derivata di tale curva in 0 è 0 ma la derivata seconda è $2[X,Y]_p$.*

SKETCH. Calcolare esplicitamente in coordinate locali ovvero calcolare una tipica serie di Taylor di $F(\phi(s)\psi(s)\phi(-s)\psi(-s)p)$ con F una funzione C^∞.

Osservazione La costruzione dei gruppi ad un parametro ci fornisce una applicazione C^∞ di $\mathbb{R} \times L(G) \to G$ e quindi una applicazione C^∞:

$$esp : L(G) \to G, \quad esp : a \to esp(a).$$

per costruzione il differenziale a 0 di tale applicazione è l'identità di $L(G)$ pertanto dal teorema delle funzioni implicite otteniamo.

COROLLARIO. *esp induce un diffeomorfismo fra un intorno di 0 in $L(G)$ ed un intorno di 1 in G.*

Molto spesso si utilizzano altri diffeomorfismi locali indotti da *esp*.

Esercizio Si decomponga $L(G) := \oplus_{i=1}^k V_i$ in somma diretta di sottospazi, si scriva un elemento di tale decomposizione come $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. L'applicazione

$$(v_1, v_2, \ldots, v_k) \to esp(v_1)esp(v_2)\ldots esp(v_k)$$

è un diffeomorfismo locale.

Sugg. Il differenziale è l'identità in 0.

1.5 Punto di vista duale Sia dato un gruppo di Lie G con L la sua algebra di Lie, spazio tangente in 1. Invece dei campi vettoriali possiamo studiare le forme invariani, per esempio a sinistra. Di nuovo data una forma in 1 questa determina univocamente una forma invariante a sinistra. Questo vale per forme di qualunque grado. Abbiamo pertanto che, per ogni k lo spazio vettoriale $\wedge^k L^*$ si identifica allo spazio delle forme esterne di grado k ed invarianti a sinistra.

Evidentemente, poichè il differenziale commuta con i diffeomorfismi, otteniamo:

PROPOSIZIONE. *L'algebra esterna $\wedge L^*$ ha in modo naturale una struttura di algebra differenziale graduata.*

Vogliamo provare ora che:
i) Il differenziale $-d : L^* \to L^* \wedge L^*$ è duale al prodotto di Lie su L.
ii) La condizione $d^2 = 0$ sul differenziale è equivalente alla identità di Jacobi.
Per i) ricordiamo che, dati due campi vettoriali X, Y ed una forma ψ abbiamo

$$\langle \psi | [X, Y] \rangle = -\langle d\psi \,|\, X \wedge Y \rangle + X(\langle \psi \,|\, Y \rangle) - Y(\langle \psi \,|\, X \rangle) \tag{1.5.1}$$

Se ψ, X, Y sono tutti invarianti a sinistra, evidentemente $\langle \psi \,|\, X \rangle, \langle \psi \,|\, Y \rangle$ sono anche invarianti a sinistra quindi costanti e pertanto, $X(\langle \psi \,|\, Y \rangle) = Y(\langle \psi \,|\, X \rangle) = 0$ e dunque:

$$\langle \psi | [X, Y] \rangle = \langle -d\psi \,|\, X \wedge Y \rangle, \quad \text{dualità} \tag{1.5.2}$$

per la seconda parte si inizia con una osservazione formale:
Dato uno spazio vettoriale V e una applicazione $d : V \to V \wedge V$ eiste una unica estensione di d ad una *derivazione, nel senso delle algebre graduate, o superderivazioni* dell'algebra $\wedge V$.

Nel formalismo differenziale appare sempre la natura graduata degli oggetti, data un'algebra graduata una derivazione D omogenea di grado k è un operatore che soddisfa $\delta(D(a)) = k + \delta(a)$ e la relazione $D(ab) = D(a)b + (-1)^{\delta a\, k} a D(b)$.
δa è il grado di a.

ESEMPIO *il (super-)commutatore* In un'algebra graduata definiamo:

$$[a, b] := ab - (-1)^{\delta a\, \delta b} ba$$

ESERCIZIO La applicazione $b \to [a, b]$ è una (super-)derivazione di grado il grado di a.
Possiamo definire dunque:

$$d(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_k) := \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge d(a_i) \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_k.$$

ESERCIZIO Questa definizone è ben posta e fornisce una derivazione di grado 1.

Ricordiamo la dualità, fra $\wedge^k V$ e $\wedge^k V^*$:

$$\langle \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k \,|\, a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_k \rangle := \det \begin{vmatrix} \langle \phi_1 \,|\, a_1 \rangle & \langle \phi_1 \,|\, a_2 \rangle & \dots & \langle \phi_1 \,|\, a_k \rangle \\ \langle \phi_2 \,|\, a_1 \rangle & \langle \phi_2 \,|\, a_2 \rangle & \dots & \langle \phi_2 \,|\, a_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \phi_k \,|\, a_1 \rangle & \langle \phi_k \,|\, a_2 \rangle & \dots & \langle \phi_k \,|\, a_k \rangle \end{vmatrix}$$

Ora il fatto importante, la applicazione $d : V \to V \wedge V$ definisce, almeno se V ha dimensione finita, per dualità una applicazione:

$$\delta : V^* \wedge V^* \to V^*, \quad \langle \delta(\phi \wedge \psi) \,|\, v \rangle := \langle \phi \wedge \psi \,|\, dv \rangle$$

dualizziamo $d : \wedge^2 V \to \wedge^3 V$ per ottenere per dualità $\delta : \wedge^3 V^* \to \wedge^2 V^*$

$$\langle \delta(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \,|\, a_1 \wedge a_2 \rangle := \langle \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \,|\, d(a_1 \wedge a_2) \rangle = \langle \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \,|\, d(a_1) \wedge a_2 - a_1 \wedge d(a_2) \rangle$$

Usiamo la notazione $[\phi, \psi] := -\delta(\phi \wedge \psi)$ per definizione $[\phi, \psi]$ è una composizione bilineare antisimmetrica. Per definizione $\langle [\phi, \psi] \,|\, v \rangle = -\langle \phi \wedge \psi \,|\, dv \rangle$

Ora calcoliamo il determinante $\langle \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \,|\, d(a_1) \wedge a_2 \rangle$ sviluppandolo lungo la terza colonna

$$\langle \phi_2 \wedge \phi_3 \,|\, d(a_1) \rangle \langle \phi_1 \,|\, a_2 \rangle - \langle \phi_1 \wedge \phi_3 \,|\, d(a_1) \rangle \langle \phi_2 \,|\, a_2 \rangle + \langle \phi_1 \wedge \phi_2 \,|\, d(a_1) \rangle \langle \phi_3 \,|\, a_2 \rangle$$

ed usando la definizione per dualità abbiamo:

(A) $$-\langle [\phi_2, \phi_3] \,|\, a_1] \rangle \langle \phi_1 \,|\, a_2 \rangle + \langle [\phi_1, \phi_3] \,|\, a_1 \rangle \langle \phi_2 \,|\, a_2 \rangle - \langle [\phi_1, \phi_2] \,|\, a_1 \rangle \langle \phi_3 \,|\, a_2 \rangle$$

in modo simile calcoliamo $-\langle \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \,| a_1 \wedge d(a_2) \rangle$ ottenendo:

(B) $$\langle \phi_1 \,|\, a_1 \rangle \langle [\phi_2, \phi_3] \,|\, a_2 \rangle - \langle \phi_2 \,|\, a_1 \rangle \langle [\phi_1, \phi_3] \,|\, a_2 \rangle + \langle \phi_3 \,|\, a_1 \rangle \langle [\phi_1, \phi_2] \,|\, a_2 \rangle$$

sommando $A + B$ si ha infine per dualità:

$$-\delta(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) = [\phi_2, \phi_3] \wedge \phi_1 - [\phi_1, \phi_3] \wedge \phi_2 + [\phi_1, \phi_2] \wedge \phi_3$$

componendo:

$$\delta^2(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) = [[\phi_2, \phi_3], \phi_1] - [[\phi_1, \phi_3], \phi_2] + [[\phi_1, \phi_2], \phi_3]$$

in definitiva $\delta^2 = 0$ è equivalente a $d^2 = 0$ ed è equivalente alla identità di Jacobi.

ESEMPIO

Nel caso di $GL(n, \mathbb{R})$ si vede che presa $X := (x_{i,j})$ la matrice con elementi le funzioni coordinate, e $dX := (dx_{i,j})$ la matrice con elementi i differenziali delle funzioni coordinate, la matrice $\omega := X^{-1} dX$ è formata da n^2 forme differenziali invarianti a sinistra e linearmente indipendenti, ovvero una base delle forme invarianti.

Da $XX^{-1} = 1$ otteniamo $0 = d(XX^{-1}) = d(X)X^{-1} + Xd(X^{-1})$ da cui la formula:

$$d(X^{-1}) = -X^{-1}d(X)X^{-1}, \quad d\omega = d(X^{-1}) \wedge dX = -\omega \wedge \omega. \tag{1.5.3}$$

L'equazione $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ è la forma più semplice delle *equazioni di Maurer.*

Per generalizzarla a qualunque gruppo di Lie, dobbiamo riformularla, perché in una algebra di Lie qualunque non vi è il prodotto associativo ma solo il commutatore. Usiamo il fatto che le matrici di forme sono una algebra graduata, con le 1-forme in grado 1 e quindi $\omega \wedge \omega = \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ e riscriviamo le equazioni di Maurer come:

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

Ora queste equazioni valgono più in generale per una algebra di Lie nel senso che vogliamo spiegare:

Ricordiamo qualche idea semplice di algebra tensoriale. Se L è uno spazio vettoriale di dimensione finita $L \otimes L^*$ si identifica all'algebra $End(L) = gl(L)$ degli endomorfismi.

L'identità 1_L si scrive, usando una base e_i di L e la sua duale e^i come $1_L = \sum_i e_i \otimes e^i$.

Si introduca ora $L \otimes \wedge L^*$, le *forme a valori in L.*

Ora se L è una algebra di Lie possiamo dare una struttura di algebra a $L \otimes \wedge L^*$ definendo:

$$[a \otimes \phi, b \otimes \psi] := [a, b] \otimes \phi \wedge \psi$$

Usualmente si trascura il segno $\otimes$ e si scrive solo $a\psi := a \otimes \psi$. Con questa operazione $L \otimes \wedge L^*$ non è una algebra di Lie, bensí quello che si chiama una *superlagebra di Lie*, ovvero i due assiomi di algebra di Lie vengono modificati introducendo un segno:

$$[a, b] + (-1)^{\delta(a)+\delta(b)}[b, a] = 0, \ \text{antisimmetria}$$

$$(-1)^{\delta(a)\delta(c)}[a, [b, c]] + (-1)^{\delta(a)\delta(b)}[b, [c, a]] + (-1)^{\delta(b)\delta(c)}[c, [a, b]] = 0 \quad \text{identità di Jacobi}$$

Abbiamo già visto che su $\wedge L^*$ è definito un differenziale d per dualità con la moltiplicazione ed estendiamo tale operazione come $d(a \otimes \psi) := a \otimes d\psi$, abbiamo ora, per $A, B \in L \otimes \wedge L^*$ $d[A, B] = [dA, B] + (-1)^{\delta(A)+\delta(B)}[A, dB]$. Ora identifichiamo 1_L con un elemento che chiamiamo $\omega \in L \otimes \wedge L^*$.

Per un elemento del tipo $e\psi$, $a \in L, \psi$ una 1-forma ed un campo vettoriale poniamo $\langle e\psi \,|\, X \rangle := e\langle \psi \,|\, X \rangle$.

Finalmente:

TEOREMA.

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0 \quad \textit{equazione di Maurer}$$

DIM. Sia $\omega = \sum_i e_i\psi_i$, con e_i una base di L, X_i i campi invarianti a sinistra corrispondenti e ψ_i base duale delle forme. Abbiamo da 1.5.2 e $[X_i, X_j] = \sum_h c_{ijh}X_h$:

$$\langle d\omega \,|\, X_i \wedge X_j \rangle = -\langle \omega \,|\, [X_i, X_j] \rangle = -\sum_h e_h \langle \psi_h \,|\, [X_i, X_j] \rangle = -\sum_h e_h \sum_k c_{ijk} \langle \psi_h \,|\, X_k \rangle =$$

$$= -\sum_h e_h c_{ijh} = -[e_i, e_j] = -\frac{1}{2}\langle \sum_{h,k} [e_h, e_k]\psi_h \wedge \psi_k \mid X_i \wedge X_j \rangle = -\frac{1}{2}\langle [\omega, \omega] \mid X_i \wedge X_j \rangle.$$

Poiché gli $X_i \wedge X_j$ sono puntualmente una base di $\wedge^2 T_p(G)$ abbiamo che $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]$. □

1.6 Il terzo teorema fondamentale di Lie

Ovviamente, nella nostra presentazione della Teoria, stiamo deviando dall'approccio classico. Al tempo di Lie, già abbiamo detto, la teoria era essenzialmente locale e per provare che ad una algebra di Lie L è associato un gruppo di Lie, si procedeva mostrando:

Terzo teorema fondamentale di Lie. *Data una algebra di Lie L di dimensione n, con base e_i, L si può rappresentare come campi vettoriali, X_i linearmente indipendenti (corrispondenti agli e_i) in $n-$variabili.*

Dim. Come vedremo nei prossimi paragrafi, l'esistenza di un gruppo di Lie G con L come algebra di Lie è certamente un enunciato più forte di questo in oggetto. Peraltro vogliamo far vedere questo enunciato più debole nella forma provata da Schur.

Per dualità basta far vedere dualmente che si possono risolvere le equazioni di Maurer $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$ con $\omega = \sum_i e_i \psi_i$ e le ψ_i forme in $n-$variabili linearmente indipendenti. L'idea è di risolvere queste equazioni differenziali iterativamente in serie di Taylor. Più precisamente si fa il cambio di variabili $x_i = tx_i$ e si riscrive

$$d\omega(tx) + \frac{1}{2}[\omega(tx), \omega(tx)] = d\sum_{i=1}^{\infty} t^i \omega_i + \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{\infty} t^i \omega_i, \sum_{i=1}^{\infty} t^i \omega_i] = 0, \quad d\omega_i = -\frac{1}{2}\sum_{a+b=i} [\omega_a, \omega_b]$$

Poniamo la condizione iniziale $\omega_1 := \sum_i e_i dx_i$ (che assicura la lineare indipendenza) ed osserviamo che, se $\zeta := \sum_i e_i \zeta_i$ è una 1-forma a valori in L si ha $d[\zeta, \zeta] = [d\zeta, \zeta] - [\zeta, d\zeta] = 2[d\zeta, \zeta]$. In particolare supponiamo di avere già calcolato ω_a, $a < i$ con $d\omega_a = \sum_{b+c=a} [\omega_b, \omega_c]$ dobbiamo risolvere $d\omega_i = -\frac{1}{2}\sum_{a+b=i} [\omega_a, \omega_b]$ abbiamo, per la condizione di compatibilità:

$$-\frac{1}{2} d \sum_{a+b=i} [\omega_a, \omega_b] = -\sum_{a+b=i} [d\omega_a, \omega_b] = \sum_{a+b+c=i} [[\omega_a, \omega_b], \omega_c]$$

Applicando la identità di Jacobi:

$$\sum_{a+b+c=i} [[\omega_a, \omega_b], \omega_c] = -\sum_{a+b+c=i} \{[[\omega_b, \omega_c], \omega_a] + [[\omega_c, \omega_a], \omega_b]\} = -2\sum_{a+b+c=i} [[\omega_a, \omega_b], \omega_c]$$

quindi $-\frac{1}{2} d \sum_{a+b=i} [\omega_a, \omega_b] = 0$ pertanto si può trovare una forma ω_i di grado i nelle x per cui $d\omega_i = -\frac{1}{2}\sum_{a+b=i} [\omega_a, \omega_b]$.

Per copletare l'argomeno dovremmo provare che possiamo fare le scelte in modo tale che la serie somma sia convergente. Poiché non utilizzeremo queso fatto ci fermiamo qui.

□

1.7 Azioni

Il passo successivo del metodo infinitesimale è il seguente.

Data una azione $G\times M \to M$ di un gruppo di Lie G su una varietà differenziabile M, per ogni gruppo ad un parametro $\phi_a(s),\ a \in L(G)$ otteniamo un gruppo ad un parametro $\phi^l_a(s)$ definito da $\phi^l_a(s)(p) := \phi_a(s)p$ su M indotto dalla azione. Sia $X(a)$ il campo vettoriale generatore infinitesimale di tale gruppo ad un parametro.

TEOREMA 1. *L'applicazione $a \to X(a)$ è un omomorfismo di algebre di Lie.*

DIM. Fissato $p \in M$ sia $\psi^p : G \to M$ dato dall'azione $g \to gp$, si ha dunque

$$\phi^l_a(s)(p) = \psi^p(\phi_a(s))(p), \quad X(a)_p = \frac{d\psi^p \circ \phi_a(s)}{ds}_{s=0} = d\psi^p \circ d\phi_a \frac{d}{ds} = d\psi^p_1(a)$$

$$X(a)_p = d\psi^p_1(a), \qquad \Longrightarrow X(a+b) = X(a) + X(b),\ X(\alpha a) = \alpha X(a)$$

La compatibilità con il prodotto di Lie $[X(a), X(b)]$ è conseguenza immediata della formula 1.8.6 del Cap.1. Infatti detto $a(s)$ il generatore del gruppo ad un parametro $\phi_b(s)\phi_a(t)\phi_b(s)^{-1}$ si ha che $X(a(s))$ è generatore di $\phi^l_b(s)\phi^l_a(t)\phi^l_b(s)^{-1}$ e quindi:

$$[X(a), X(b)] = \frac{dX(a(s))}{ds}_{s=0} = X(\frac{da(s)}{ds}_{s=0}) = X([a,b]).$$

□

Esempio Prendiamo l'azione di $G \times G$ su G data da $(a,b)g := agb^{-1}$ allora il campo vettoriale indotto da $v, w \in Lie(G \times G) = Lie(G) \oplus Lie(G)$ è $X^s_v - X^d_w$.

La potenza del metodo infinitesimale sta nel fatto che, entro alcuni limiti, si possono integrare i dati infinitesimali.

L'idea di Lie è di provare che, dati k campi vettoriali X_i su M con la proprietà che generino linearmente una algebra di Lie, ovvero che $[X_i, X_j] = \sum_k c_{i,j,k}X_k$ per *costanti* $c_{i,j,k}$ esiste, almeno localmente, un gruppo di Lie G ed una azione di G su M che induce i campi dati.

Nella teoria di Lie tutte queste soluzioni sono date solo localmente ma durante il secolo scorso si è arrivati a provare che in realtà si può trovare un gruppo di Lie (globale) con data algebra di Lie.

TEOREMA. *Data un'algebra di Lie di dimensione finita L esiste un gruppo di Lie G con $L(G) = L$.*

Proveremo più avanti questo teorema fondamentale.

Se ora consideriamo una algebra di Lie L di campi vettoriali su una varietà M vorremmo integrare tale algebra ad una azione di $G(L)$ su M questo non si può fare in generale, quello che si può fare è di dare un germe di azione in un intorno di ogni punto di M e se L è a supporto compatto (ad esempio se M è compatta) si ottiene una azione globale.

La idea è la seguente, una azione di G su una varietà M definisce anche una azione di G su $G \times M$ data da $g(x, m) := (gx, gm)$. la differenza ora è che i campi vettoriali indotti dall'algebra di Lie di G su $G \times M$ sono linearmente indipendenti e generano una distribuzione integrabile su $G \times M$. Una foglia massimale si proietta su G dando luogo ad un diffeomorfismo locale, ad esempio per la foglia passante per $(1, m)$. Moralmente se questo diffeomorfismo locale è un vero diffeomorfismo l'inverso di tale diffeomorfismo composto con la seconda proiezione è la azione che descrive l'orbita di m.

In generale non si può dire di più ma se M è compatto si provi che tale diffeomorfismo locale è proprio e quindi un rivestimento. Se abbiamo scelto G semplicemente connesso abbiamo l'azione richiesta.

Diamo i dettagli di questa discussione. Se assumiamo il Teorema di esistenza dei gruppi di Lie si riformula il problema precedente come segue, sia L l'algebra di Lie di G e supponiamo di dare un omomorfismo $f : L \to Lie(M)$ da L all'algebra di Lie dei campi vettoriali su M. Si vede immediatamente che la mappa $A \to A + f(A)$ è un isomorfismo fra L ed una algebra di Lie L' di campi vettoriali su $G \times M$.

Fissata una base A_i di L sia $X_i := f(A_i)$ e si considerano su $G \times M$ i campi vettoriali $Y_i := A_i + X_i$, essi sono una base di L' ed in ogni punto di $G \times M$ sono linearmente indipendenti.

Il problema si riformula dunque su questo prodotto.

Le ipotesi fatte implicano che la distribuzione data da questi campi vettoriali è integrabile.

Consideriamo, per $x \in M$ la foglia F_x della distribuzione passante per $(1, x)$ e la proiezione $p : F_x \to G$ che almeno localmente è un diffeomorfismo per cui i campi Y_i si identificano ai campi A_i, ne segue che, se X è un elemento dell'algebra di Lie di G e $\phi_X, \psi_{f(X)}$ sono rispettivamente i gruppi ad un parametro generati da X ed $f(X)$ il campo $X + f(X)$ genera il gruppo ad un parametro $\psi_{X+f(X)}$ con

$$\psi_{X+f(X)}(t)(x, y) \to (\phi_X(t)(x), \psi_{f(X)}(t)(y)).$$

La proiezione p ristretta alla foglia trasforma il gruppo $\psi_{X+f(X)}$ nel gruppo ad un parametro ϕ_X, questo permette localmente di definire l'azione di G su M generata dai campi vettoriali di $f(L)$ dalla formula (valida per X vicino a 0 in L ed in un intorno di x):

$$g = \phi_X(1), \quad g.y := \psi_{f(X)}(1)(y). \tag{1.7.1}$$

Teorema. *Le formule 1.4.1 definiscono una azione locale di G su M con generatori infinitesimali i campi $f(X)$.*

Dim. Per definizione se $g = \psi_X(t)$ si ha $g = \psi_{tX}(1)$ e quindi:

$$\psi_X(t).y = \psi_{tX}(1).y = \psi_{f(tX)}(1)(y) = \psi_{f(X)}(t)(y)$$

ed il generatore dell'azione del gruppo ad un parametro generato da X su M è $f(X)$.

Basta quindi verificare la proprietà locale della azione ovvero per $g = \phi_X(1), h = \phi_Y(1)$ assai vicini ad 1, per cui $gh = \phi_Z(1)$ per qualche Z, provare che:

$$g.(h.y) = (gh).y \iff \psi_{f(X)}(1)(\psi_{f(Y)}(1)y) = \psi_{f(Z)}(1)(y).$$

per questo basta provare che:

$$\psi_{X+f(X)}(1)(\psi_{Y+f(Y)}(1)(1,y)) = \psi_{Z+f(Z)}(1)(1,y)$$

ma poiché la proiezione si G della foglia per $1, y$ è biunivoca questo è vero in quanto per definizione

$$\phi_X(1)\phi_Y(1) = \phi_Z(1)$$

□

1.8 Omomorfismi

Sia $f : H \to G$ un omomorfismo di gruppi di Lie e $d\,f := d\,f_1 : L(H) \to L(G)$ l'applicazione indotta fra le algebre di Lie.

Teorema. *$d\,f$ è un omomorfismo di algebre di Lie.*

Dim. Questo è un caso speciale del Teorema 1 di 1,4, in quanto un tale omomorfismo f induce una azione di H su G data da $h.g := f(h)g$, ed evidentemente il campo vettoriale associato al gruppo ad 1-parametro $esp(sa).g,\ a \in L(H)$ è $esp(sdf(a))g$.

In ogni caso possiamo anche dare un'altra prova diretta. Sia $a \in L(H)$ e $\phi_a(t)$ il corrispondente gruppo ad un parametro, si ha chiaramente che $f(\phi_a(t))$ è un gruppo ad un parametro di G e, calcolandone la derivata in 0 si ha:

$$f(\phi_a(t)) = \phi_{df(a)}(t)$$

Sappiamo che, dati $a, b \in L(H)$ si calcola $2[a, b]$ come la derivata seconda in 0 della curva $\phi_a(s)\phi_b(s)\phi_a(-s)\phi_b(-s)1$ similmente per $2[d\,f(a), d\,f(b)]$, ma si ha:

$$\phi_{df(a)}(s)\phi_{df(b)}(s)\phi_{df(a)}(-s)\phi_{df(b)}(-s)1 = f(\phi_a(s)\phi_b(s)\phi_a(-s)\phi_b(-s)1)$$

□

OSSERVAZIONE Con le notazioni precedenti. Poiché evidentemente $f(esp(sa)) = esp(s\, df(a))$ si ha la *naturalità dell'esponenziale* ovvero il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & G \\ {\scriptstyle esp}\Big\uparrow & & {\scriptstyle esp}\Big\uparrow \\ L(H) & \xrightarrow{df} & L(G) \end{array}$$

Prima di ottenere dei corollari proviamo due fatti generali sui gruppi topologici.

PROPOSIZIONE. *1) Se G è un gruppo topologico ed H è un sottogruppo aperto allora H è anche chiuso e G è l'unione disgiunta topologica delle sue classi laterali.*

2) Sia G un gruppo topologico connesso e U un intorno aperto di 1 in G, allora U genera G come gruppo.

3) Sia G un gruppo topologico e H un suo sottogruppo, H è discreto (per la topologia indotta) se e solo se esiste un intorno U di 1 in G per cui $U \cap H = \{1\}$.

DIM. 1) Se $x \in G$ si ha che la classse laterale xU è aperta, ma G è unione disgiunta di tali classi laterali e tutto segue. 2) Sia H il sottogruppo generato da U in G, proviamo che H è aperto. In fatti se $h \in H$ si ha evidentemente che $hU \subset H$ ma hU è un aperto di G, poiché G è connesso da 1) segue che $G = H$.

3) Se H è discreto deve esistere un intorno U di 1 in G per cui $U \cap H = \{1\}$, viceversa se esiste un tale intorno e $x \in H$ si ha che xU è un intorno aperto di x e $xU \cap H = \{x\}$. □

Abbiamo ora vari casi notevoli di questa analisi:

TEOREMA. *Se $f : H \to G$ è un omomorfismo fra due gruppi di Lie e G è connesso e df è suriettivo allora f è suriettivo.*

Se df è iniettivo il nucleo H di f è un sottogruppo discreto di H.

DIM. Se *df* è suriettivo, dal teorema delle funzioni implicite esiste un intorno aperto di 1 in G nell'immagine di f e dalla proposizione precedente f è suriettivo.

Se *df* è iniettivo, dal teorema delle funzioni implicite esiste un intorno aperto V di 1 in H su cui f è iniettivo, in particolare $H \cap V = \{1\}$. □

Un caso particolarmente importante si ha quando *df* è un isomorfismo (di algebre di Lie). Se G è connesso si ha dunque che f è suriettivo ed il nucleo è discreto. In particolare abbiamo un intorno V di 1 in H ed un intorno U di 1 in G per cui $f : V \to U$ è un omeomorfismo. Un tale omomorfismo si chiama dunque un *isomorfismo locale.* In particolare lo possiamo utilizzare per determinare identità formali delle operazioni (purché nell'intorno dato) passando da un gruppo all'altro. Questo è particolarmente importante in quanto come vedremo vale il seguente

Teorema. *Dato comunque un gruppo di Lie G esistono due gruppi di Lie $\tilde{G}$, $\overline{G}$ e omomorfismi locali*

$$\tilde{f} : \tilde{G} \to G, \quad \overline{f} : \overline{G} \to G$$

con la proprietà che G è un **gruppo lineare**.

In altre parole, pur di restare in un intorno piccolo di 1 possiamo trattare qualunque gruppo di Lie come *gruppo di matrici*, anche se come vedremo non tutti i gruppi di Lie si possono rappresentare globalmente come matrici. In particolare verifichiamo le formule (A),(B) che abbiamo provato per le matrici.

Possiamo provare ora le due formule per un gruppo di Lie qualunque come segue, per esempio la (B).

a) Per provare una formula per un gruppo G basta provarla per il rivestimento universale $\tilde{G}$.

b) Per $\tilde{G}$ sappiamo che vi è un omomorfismo iniettivo a livello di algebre di Lie in un gruppo di matrici. Pertanto le due formule valgono purché a, b siano abbastanza vicini a 0 per cui possiamo calcolare con le matrici.

c) Per a, b generali, sia m un intero abbastanza grande per cui le formule valgono per $a/m, b/m$ si ha allora, per ogni n che $n = km + i,\ 0 \leq i < m$ e $[esp(a/n)esp(b/n)]^n =$

$$[esp(a/k(m + i/k))esp(b/k(m + i/k))]^{km}[esp(a/k(m + i/k))esp(b/k(m + i/k))]^i$$

passand al limite si ottiene $esp(\frac{a+b}{m})^m = esp(a + b)$

1.9 Sottogruppi Supponiamo di avere un gruppo di Lie G la cui algebra di Lie L denoteremo per semplicità con L.

Iniziamo con:

Teorema. *Un sottogruppo chiuso H di un gruppo di Lie G è un gruppo di Lie con algebra di Lie*

$$L(H) := \{a \in L | esp(sa) \in H, \forall s\}$$

Dim. Le due formule notevoli A,B mostrano che l'insieme $L(H)$ è in effetti una algebra di Lie. Decomponiamo $L = L(H) \oplus V$ con V un sottospazio e consideriamo il diffeomorfismo locale $j : (x, y) \to esp(x)esp(y),\ x \in L(H),\ y \in V$. Prendiamo un intorno $A \times B$ di $(0, 0)$ in cui j è un diffeomorfismo.

Ora $j(x, y) = esp(x)esp(y) \in H$ se e solo se $esp(y) \in H$ quindi o possiamo trovare un intorno $A \times B$ abbastanza piccolo per cui $j^{-1}(H) = L(H) \cap A \times B = A \times 0$ oppure possiamo trovare una successione di vettori $v_i \in V,\ v_i \neq 0,\ esp(v_i) \in H,\ \lim_{i\to\infty} v_i = 0$. Vogliamo provare che questa seconda ipotesi è assurda.

Prendiamo una metrica euclidea in V per cui l'intorno sferico di raggio 1 è contenuto in B, per compattezza possiamo estrarre da v_i una sottosuccessione tale che $\frac{v_i}{|v_i|}$ sia convergente ad un vettore v

Ora dato comunque un numero reale s si ha $sv = \lim \frac{s}{|v_i|} v_i$ inoltre se n_i è la parte intera di $\frac{s}{|v_i|}$ evidentemente anche $n_i v_i$ è convergente a sv quindi $esp(sv) \in H$ da cui $v \in L(H)$ una contraddizione.

Ma ora abbiamo provato che H è una sottovarietà differenziabile almeno in un intorno di 1, per traslazione questo avviene poi in tutti i suoi punti, l'enunciato sull'algebra di Lie ora dipende dal fatto che l'algebra di Lie si identifica con lo spazio tangente ad 1.

Possiamo ora raffinare l'analisi degli omomorfismi.

Proposizione. *Dato un omomorfismo $f : G_1 \to G_2$ fra due gruppi di Lie, sia K il nucleo di f. K è un sottogruppo di Lie chiuso con algebra di Lie $Ker(df)$.*

Quindi df è iniettivo se e solo se K è discreto.

Dim. Dalla analisi precedente $a \in Lie(K)$ se e solo se $esp(sa) \in K$ ovvero $f(esp(sa)) = 1$. Ora $f(esp(sa)) = esp(sdf(a))$ pertanto $f(esp(sa)) = 1$ se e solo se $df(a) = 0$ ovver $a \in Ker(df)$.

Poichè un gruppo di Lie è discreto se e solo se la sua algebra di Lie è 0, la seconda parte segue. $\square$

Esempi

L'algebra di Lie di:

(1) $SL(n, \mathbb{R})$ è l'algebra delle matrici a traccia 0 ($det(e^A) = e^{tr(A)}$), è denotata con $sl(n, \mathbb{R})$.
(2) $SO(n, \mathbb{R})$ è l'algebra delle matrici antisimmetriche ($e^{-A}e^A = 1$, $e^{A^t} = (e^A)^t$), è denotata con $so(n, \mathbb{R})$.
(3) $U(n, \mathbb{C})$ è l'algebra delle matrici antihermitiane ovvero $A^* = -A$, ($e^{-A}e^A = 1$, $e^{A^*} = (e^A)^*$), è denotata con $u(n, \mathbb{R})$.
(4) $SU(n, \mathbb{C})$ è l'algebra delle matrici antihermitiane a traccia nulla è denotata con $su(n, \mathbb{R})$.
(5) Se B indica il gruppo delle matrici invertibili triangolari superiori la sua algebra di Lie è l'algebra di tutte le matrici triangolari superiori ed è denotata con $\underline{b}$.
(6) Se U indica il gruppo delle matrici invertibili triangolari superiori con 1 sulla diagonale (unipotenti) la sua algebra di Lie è l'algebra di tutte le matrici strettamente triangolari superiori (con 0 sulla diagonale) ed è denotata con $\underline{u}$.
(7) Se T indica il gruppo (abeliano) delle matrici invertibili diagonali la sua algebra di Lie è l'algebra di tutte le matrici diagonali ed è denotata con $\underline{t}$.

Gli ultimi tre esempi si possono fare sia sui reali che sui complessi.

Si noti come, in tutti questi esempi l'esplicitazione dell'algebra di Lie permette sia di calcolare la dimensione del gruppo che di fornire coordinate locali, tramite l'esponenziale.

Nelle discussioni che seguono e molto spesso useremo un semplice principio di equivarianza:

Lemma (prinicio di equivarianza). *Siano N, M due varietà con una azione C^∞ di un gruppo di Lie G. Sia $f : M \to N$ una applicazione equivariante.*

Se $p \in M$ è un ponto in cui f è C^∞ e df_p ha rango r lo stesso avviene in ogni punto gp della sua orbita.

Dim. Basta comporre con i diffeomorfismi $f = g \circ f \circ g^{-1}$ per spostare le proprietà da gp a p. $\square$

Possiamo utilizzare queste idee per definire gli spazi omogenei e studiarli.

Prima di tutto un Lemma importante che ci mostra che, dato un sottogruppo chiuso H esiste un intorno di H che ha la natura di un prodotto $U \times H$.

Più precisamente, siano $L(H), L$ le algebre di Lie di H, G. Prendiamo uno spazio W complementare ad $L(H)$ in L ossia $L = W \oplus L(H)$. Usiamo questa decomposizione per costruire la mappa $f : W \oplus L(H) \to G,\ f(w, h) := esp(w)esp(h)$.

Lemma dell'intorno tubolare. *Esiste un intorno aperto U di 0 in W per cui la applicazione:*

$$F : U \times H \to G, \quad F(u, h) := esp(u)h$$

è un diffeomorfismo (C^ω) sull'aperto $esp(U)H$ di G unione di classi laterali $esp(a)H, a \in U$.

Dim. Prendiamo in un intorno di 1 in H le coordinate $esp(b),\ b \in L(H)$ per il differenziale abbiamo $dF_{0,0}(u, b) = d_{t=0}\, esp(tu) + d\, esp(tb) = u + b$. Quindi il differenziale di questa mappa in $(0, 1)$ è la identità, quindi esistono due aperti U_1, U_2 intorni di 0 in W e di 1 in H per cui $esp : U_2 \to H$ e la mappa $F : U_1 \times U_2 \to G$ sono diffeomorfismi, rispettivamente su un intorno aperto di 1 in H e su un intorno aperto di 1 in G.

Poiché $F(u, kh) = F(u, k)h$ possiamo vedere la F in un intorno di un punto (u, h) come composizione, del diffeomorfismo $(u, h) \to (u, hk^{-1})$ la stessa F in un intorno di $(u, 0)$ in cui il differenziale è invertibile e di nuovo il diffeomorfismo $g \to gk$ di G.

Deduciamo che $F : U_1 \times H \to G$ ha sempre differenziale invertibile.

Vogliamo ora provare che si può restringere U_1 ad un aperto U intorno di 0, in modo tale che su $U \times H$, F è anche iniettiva.

Dalle scelte già fatte $esp(U_2)$ è un intorno aperto di 1 in H e dunque $X := H - esp(U_2)$ è un insieme chiuso con $1 \notin X$. Prendiamo dunque aperti $U_1' \subset U_1, U_2' \subset U_2$ con $F(U_1' \times U_2') \cap X = \emptyset$ e poi prendiamo un aperto $V \subset U_1$ abbastanza piccolo da garantire che $esp(V)^{-1}esp(V) \subset f(U_1' \times U_2') \subset G$, (esiste per continuità).

Affermo ora che la applicazione $\phi : V \times H \to G$ data da $(w, h) \to esp(w)h$ è iniettiva. Se $esp(v_1)h_1 = esp(v_2)h_2$ si ha $esp(v_1)^{-1}esp(v_2) = h_1h_2^{-1} \in H$, abbiamo $H = X \cup esp(U_1)$ e per ipotesi $esp(V)^{-1}esp(V) \cap X = \emptyset$. Si ha dunque $esp(v_1)^{-1}esp(v_2) = esp(a),\ a \in U_1$ da cui $esp(v_2) = esp(v_1)esp(a)$ ovvero $F(v_2, 0) = F(v_1, a)$ da cui per la iniettività di F su $V \times U_2$ si ha $v_1 = v_2, a = 0$.

□

Ricordiamo:

Definizione. *Uno spazio omogeneo su un gruppo di Lie G è una varietà M su cui G opera con una sola orbita.*

Dato uno spazio omogeneo M su G ed un punto $x \in M$, il sottogruppo $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ è evidentemente chiuso e pertanto un gruppo di Lie, se $y = hx$ si ha $G_{hx} = hG_x h^{-1}$. Inoltre l'applicazione $\psi_x : g \to gx$ (detta in inglese *orbit map*), stabilisce una biiezione fra l'insieme delle classi laterali destre $G/G_x := \{gG_x\}$ ed M.

Prima di procedere vediamo qualche utile proprietà di questa applicazione.

i) Se $A \subset G/G_x$ si ha $\psi^{-1}A$ è uninsieme stabile per moltiplicazione a destra per G_x.

ii) Se $B \subset G$ si ha:

$$\psi^{-1}\psi(B) = BG_x$$

Per iniziare la discussione partiamo da una varietà M su cui $G-$opera, dalla azione deduciamo che, per ogni $a \in L$ abbiamo un campo vettoriale X_a su M che genera il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi $esp(sa)p$.

Proposizione. *Dato un punto $p \in M$ lo stabilizzatore G_p è un sottoguppo di Lie chiuso la cui algebra di Lie è $L_p := \{a \in L \mid X_a(p) = 0\}$.*

Dim. Per definizione $a \in L_p$ se e solo se $esp(sa) \in G_p$ se e solo se $esp(sa)p = p$, $\forall s$. Ma questa curva ha velocità in p il vettore $X_a(p)$ e quindi l'enunciato è chiaro. □

Mettiamoci ora nel caso di uno spazio omogeneo $M = G/H$ e sia p il punto corrispondente alla classe di H. Dalla analisi precedente abbiamo che la dimensione di H, uguale alla dimensione di $L_p = L(H)$ è la dimensione di L meno il rango del differenziale della applicazione $g \to gp$ (orbit map). Ne segue in particolare (cosa per altro evidente per equivarianza) che tale mappa $\psi_p : G \to M,\ \psi_p(g) := gp$ ha rango costante $r = \dim G - \dim H$.

Poichè ψ_p è suriettiva ne segue (cap 1, 1.6) che $r = \dim M$ ed inoltre anche localmente ψ_p è suriettiva nel senso del teorema delle funzioni implicite.

Vogliamo fare il viceversa, dato un sottogruppo chiuso H di G vogliamo definire su G/H una struttura di varietà differenziabile per cui G/H diviene uno spazio omogeneo. In particolare la proiezione $p : G \to G/H,\ p(g) := gH$ è C^ω.

La costruzione è canonica nel seguente senso.

Teorema. *Dato un sottogruppo chiuso H di G esiste una unica struttura di varietà differenziabile per cui G/H diviene uno spazio omogeneo.*

Tale struttura soddisfa la proprietà universale:

Se G opera su una varietà differenziabile M e $p \in M$ è tale che $Hp = p$ (ovvero $H \subset G_p$) l'applicazione orbit map $\psi_p : G \to M,\ g \to gp$ si fattorizza tramite $\psi_p : G \xrightarrow{p} G/H \xrightarrow{\overline{\psi}_p} M$.

Se $H = G_p$ la applicazione $\psi_p : G/H \to M$ è una immersione con immagine l'orbita Gp.

Dim. Chiamiamo p la classe di H in G/H. Prima di tutto diamo a G/H la topologia quoziente per la mappa $\psi_p : g \to gp$.

Applichiamo il Lemma dell'intorno tubolare. Prendiamo uno spazio W complementare ad $L(H)$ in L ossia $L = W \oplus L(H)$ ed un intorno aperto U di 0 in W per cui la applicazione:

$$F : U \times H \to G, \quad F(u,h) := esp(u)h$$

è un diffeomorfismo sull'aperto $esp(U)H$ di G unione di classi laterali $esp(a)H, a \in U$.

Sia $V := esp(U)$, poichè l'aperto VH di G è unione di classi laterali $VH, a \in U$ segue facilmente che Vp è aperto in G/H e la applicazione da V a Vp è un omeomorfismo.

Vogliamo usare questa applicazione, e le traslate per elementi di G per dare carte di una struttura differenziabile. Per fare questo basta provare che gli incollamenti di queste carte sono C^ω. per traslazione basta guardare a Vp e gVp per qualche g.

Calcoliamo l'intersezione $vp = gVp$ se e solo se $v^{-1}gw \in H$ ovvero $gw \in vH \subset VH$.

Abbiamo quindi l'aperto $V_0 := \{w \in V \,|\, gw \in VH\}$. Su $VH \cong V \times H$ definiamo $\rho : vh \to v$ è una proiezione e chiaramente una applicazione C^ω e dunque si ha che su V_0 la legge di cambiamento di coordinate è $w \to \rho(gw)$.

In modo analogo si prova che l'azione di G su G/H è C^ω. Se ora H fissa p la applicazione ψ_p ristretta a VH è $(wh)p = wp$ e si fattorizza tramite la proiezione su V che localmente è la proiezione su G/H, segue che $\overline{\psi}_p$ è C^∞ su Vp ma per equivarianza lo è in ogni punto. Se $H = G_p$ sappiamo che il differenziale dell'orbit map ha nucleo $L(H)$ pertanto ristretto al complementare W è iniettivo. $\square$

La descrizione dell'intorno tubolare implica inoltre che l'applicazione $p : G \to G/H$ ha una proprietà ulteriore, quella di essere un *fibrato principale* su H. Spieghiamo il significato di questa definizione.

Sia dato un gruppo topologico G che opera a destra su uno spazio X ed una aplicazione continua $p : X \to B$ costante sulle $G-$orbite.

Definizione. *Diremo che $G \times X \to X$, $p : X \to B$ è un* **fibrato principale** *su G di base B e spazio totale X se, per ogni punto $p \in B$ esiste un aperto U contenente p ed un omeomorfismo G equivariante fra $\phi_U : p^{-1}(U) \to U \times G$, da $p^{-1}(U)$ ad $U \times G$su cui G opera per moltiplicazione a destra con $(u,g)h := (u,gh)$ e per cui il diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & U \times G \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p_1}\downarrow \\ U & \xrightarrow{1_U} & U \end{array}$$

è commutativo $(p_1(u,g) := u)$.

ESERCIZIO Verificare che data l'azione di moltiplicazione a destra per H su G la proiezione $G \to G/H$ è un fibrato principale.
sugg. usare il Lemma dell'intorno tubolare.

Possiamo finire con il seguente:

TEOREMA. *Se nelle ipotesi del Teorema precedente, H è anche normale allora:*
i) $L(H)$ è un ideale di L
ii) G/H è un gruppo di Lie con algebra di Lie $L/L(H)$.
iii) p è un omomorfismo con nucleo H.

DIM. i) Se H è normale $gHg^{-1} \subset H$ da cui segue che $Ad(g)$ manda $L(H)$ in $L(H)$. Essendo $AD(esp(a)) = esp(ad(ad))$ segue che $L(H)$ è stabile per gi endomorfismi $ad(a)$, $a \in L$ e quindi è un ideale.

ii) G/H è una varietà differenziabile e la moltiplicazione $G \times G/H \to G/H$ è C^ω. Poiché H è normale tale moltiplicazione si fattorizza nel prodotto $G/H \to G/H \to G/H$. usando le coordinate locali date dal Lemma dell'intorno tubolare è chiaro che tale prodotto è C^ω. Simile analisi per l'inverso.

iii) Questo viene semplicemente dall'algebra dei gruppi. □

1.10 Automorfismi Una classe di esempi importanti segue dalla seguente discussione: Confrontiamo le nozioni di *derivazioni* e *automorfismi* per una algebra A, che per semplicità supponiamo di dimensione finita su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

La condizione che una trasformazione lineare $T : A \to A$ sia un automorfismo è data da un insieme finito di equazioni algebriche ovvero $T(e_i)T(e_j) = T(e_ie_j)$ per una base e_i di A, pertanto il gruppo degli automorfismi è un sottogruppo algebrico e quindi di Lie del gruppo delle trasformazioni lineari. Ne vogliamo calcolare l'algebra di Lie.

PROPOSIZIONE. *D è una derivazione se e solo se e^{tD} è un gruppo di automorfismi di A.*

DIM. Questa è una variazione del fatto che un vettore v è fissato dal gruppo e^{tD} se e solo se $Dv = 0$, in fatti dire che e^{tD} sono automorfismi significa che:

$$a, b \in A,\ e^{tD}(ab) - e^{tD}(a)e^{tD}(b) = 0.$$

Sviluppando in serie di potenze e prendendo i termini del primo ordine si ha

$$D(ab) - D(a)b - aD(b) = 0$$

la condizione per una derivazione.

Viceversa data una derivazione con una semplice induzione abbiamo, per ogni intero positivo k,

$$D^k(ab) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^{k-i}(a)D^i(b),$$

quindi:

$$e^{tD}(ab) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k(ab)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{k!} D^{k-i}(a) D^i(b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-i)!i!} t^{k-i} D^{k-i}(a) t^i D^i(b) = e^{tD}(a) e^{tD}(b).$$

□

Dalla Teoria svolta ne segue che, la componente connessa dell'identità del gruppo degli automorfismi di A è il sottogruppo generato dagli esponenziali delle derivazioni di A.

Nel caso di una algebra di Lie A fra le derivazioni vi sono le derivazioni interne $ad(x)$ il sottogruppo degli automorfismi, generato da tali derivazioni si dice *gruppo degli automorfismi interni.*

Esercizio Generalizzare la proposizione a derivazioni di algebre non necessariamente di dimensione finita, ma filtrate, ovvero $A = \cup_{i=0}^{\infty} A_i$ con A_i sottospazi per cui $A_i A_j \subset A_{i+j}$.
Come automorfismi e derivazioni bisogna restringersi a quelli che preservano la filtrazione.

Supponiamo ora di avere un automorfismo, $\phi : A \to A$ che, come trasformazione lineare è semisemplice quindi $A = \oplus_{\alpha \in \mathbb{C}} A_a$, dove A_α è l'autospazio di autovalore α per ϕ allora

$$V_\alpha . V_\beta \subset V_{\alpha\beta}$$

infatti da $\phi(u) = \alpha u, \ \phi(v) = \beta v$ e la proprietà di automorfismo $\phi(uv) = \phi(u)\phi(v) = \alpha u \beta v = \alpha\beta uv$.
Per una derivazione D semisemplice con $A = \oplus_{\alpha \in \mathbb{C}} A_a$, dove A_α è l'autospazio di autovalore α per D si ha nello stesso modo che $V_\alpha . V_\beta \subset V_{\alpha+\beta}$.

Naturalmente se D è una derivazione con autovalori α_i si ha che e^D è un'automorfismo con autovalori e^{α_i}.

Notiamo che in generale non è possibile estrarre il logaritmo di un automorfismo ϕ (fare un esempio), ma lo è nel caso in cui ϕ sia semisemplice con autovalori reali positivi. In questo caso si pone $log(\phi)$ l'operatore che ha autovalore $log(\alpha)$ sull'autospazio di ϕ di autovalore α.

ESERCIZIO (Per fare questo esercizio è necessario vedere le definizioni di prodotto tensoriale di rappresentazioni del prossimo capitolo).
Prima di tutto interpretare una struttura di algebre su uno spazio vettoriale V come un tensore $m \in V^* \otimes V^* \otimes V$, usando le azioni indotte del gruppo $GL(V)$ risp. dell'alegebra di Lie $gl(V)$ sui tensori provare che gli automorfismi sono lo stabilizzatore del tensore e le derivazioni gli operatori di $gl(V)$ che annullano m.

§2 Semplice connessione

2.1 Semplice connessione Nella teoria globale in generale il gruppo di Lie G associato ad una algebra di Lie L non è unico, anche se supponiamo che sia connesso, l'esempio più semplice è dato da $\mathbb{R}$, S^1 che hanno come algebra di Lie $\mathbb{R}$ con moltiplicazione 0.

Un esempio più interessante è $SO(3,\mathbb{R})$ che ha la stessa algebra di Lie di $SU(2,\mathbb{C})$. In questo esempio abbiamo un omomorfismo $\pi : SU(2,\mathbb{C}) \to SO(3,\mathbb{R})$ con nucleo ± 1 il gruppo con due elementi.

Altro esempio è il legame fra $SL(2,\mathbb{C})$ ed il gruppo di Lorentz.
Esplicitamente sia

$$H := \left\{ A = \begin{vmatrix} x_0 + x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_0 - x_1 \end{vmatrix}, \quad x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

lo spazio delle matrici A complesse 2×2 ed Hermitiane ovvero $A = \overline{A}^t := A^*$. Per una tale A si ha

$$\det(A) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

per definizione il *gruppo di Lorentz* $O(1,3)$ è il gruppo delle trasformazioni lineari dello spazio a 4 dimensioni che preservano la forma quadratica $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Poiché $(AB)^* = B^*A^*$, se $X \in SL(2,\mathbb{C})$, $A \in H$ si ha $XAX^* \in H$, inoltre $\det(XAX^*) = \det(A)$.
Otteniamo dunque un omomorfismo:

$$\pi : SL(2,\mathbb{C}) \to O(1,3)$$

ESERCIZIO 1) π ha nucleo ± 1.
2) L'immagine di π è la componente connessa di 1 in $O(1,3)$.
3) $O(1,3)$ contiene il gruppo ortogonale $O(3,\mathbb{R})$.
4) $\pi(SU(2,\mathbb{C}) = SO(3,\mathbb{R})$.

Nella discussione di quali gruppi abbiano una data algebra di Lie interviene un punto interessante di tipo topologico.

Ricordiamo alcune nozioni fondamentali.

PROPOSIZIONE. *Se G è un gruppo topologico connesso per archi e H un sottogruppo normale discreto allora H è nel centro di G.*

DIM. Sia $x \in G$ e $x(t)$ un arco con $x(0) = 1$, $x(1) = x$ consideriamo l'automorfismo $y \to y(t) := x(t)yx(t)^{-1}$. Se $y \in H$ si ha che $y(t) \in H$ per ipotesi di normalità. Poichè H è discreto dsi deve avere $y(t)$ costante, ma $y(1) = y$ e l'enunciato segue. □

Dato uno spazio topologico X ed un suo punto x_0 si definisce $\pi_1(X, x_0)$ il gruppo di omotopia di X di base x_0, X è semplicemente connesso se $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Se X è connesso e localmente semplicemente connesso (ad esempio se X è una varietà differenziabile connessa) abbiamo il suo rivestimento universale $p : \tilde{X} \to X$ su cui opera il gruppo di omotopia.

Supponiamo ora che $X = G$ sia un gruppo topologico e prendiamo come punto base 1.

Assumiamo che X sia connesso e localmente connesso e semplicemente connesso per archi.

Prendiamo ora un punto base $y_0 \in \tilde{X}$ e tale che $p(y_0) = 1$.

TEOREMA. *1) Esiste una unica struttura di gruppo topologico su $\tilde{X}$ tale che.*
i) y_0 sia l'elemento neutro.
ii) p sia un omomorfismo.

Per tale struttura si ha che il nucleo H di p si identifica a $\pi_1(X, 1)$ che è un gruppo abeliano.

Se X è un gruppo di Lie anche $\tilde{X}$ lo è con p una mappa C^ω.

Le stesse proprietà valgono per un qualunque rivestimento X' di$X$.

2) Se $f : X \to Y$ è un omomorfismo di gruppi topologici f si solleva ad un omomorfismo $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ dei gruppi semplicemente connessi.

DIM. La validità di questo teorema è sostanzialmente banale se si usa la proprità universale del sollevamento delle applicazioni continue ai rivestimenti universali si ottiene

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \times \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{m}} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle p\times p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ X \times X & \xrightarrow{m} & X \end{array}, \qquad \tilde{m}(x_0, x_0) := x_0$$

e le varie proprietà si possono provare per unicità dei sollevamenti. In alternativa possiamo dare una dimostrazione intrinseca (senza riferimento ad x_0):

Prima di tutto possiamo considerare G come identificato al gruppo delle trasformazioni che induce per moltiplicazione a sinistra $L_g : x \to gx$. Definiamo $\tilde{G}$ come l'insieme delle trasformazioni $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ che sollevano le moltiplicazioni L_g ovvero:

$$\tilde{G} := \{f : \tilde{X} \to \tilde{X} \mid \exists g \in G, p \circ f = L_g \circ p\}$$

ovvero il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ X & \xrightarrow{L_g} & X \end{array}$$

è commutativo.

Poiché L_g è un omeomorfismo segue immediatamente che f è anche un omeomorfismo, e l'inversa di f verifica $p \circ f^{-1} = L_{g^{-1}} \circ p$.

Poniamo $g := \rho(f)$ abbiamo immediatamente che $\tilde{G}$ è chiuso per composizione ed inverso, quindi è un gruppo di trasformazioni. L'applicazione $f \to \rho(f)$ è un omomorfismo da $\tilde{G}$ a G.

Ora verifichiamo che $\tilde{G}$ opera in modo semplicemente transitivo su $\tilde{X}$.

Infatti fissato un punto x_0 per esempio con $p(x_0) = 1$, dato un punto y con $p(y) = g$ esiste una unica trasformazione $f \in \tilde{G}$ con $f(x_0) = y$ che solleva la moltiplicazione per g.

Pertanto usando la azione semplicemente transitiva identifichiamo f con $f(x_0)$ e quindi $\tilde{G}$ con $\tilde{X}$. Con questa identificazione p è un omomorfismo di gruppi.

Il nucleo è l'insieme delle trasformazioni del rivestimento che coprono l'identità. Dalla teoria dei rivestimenti questo gruppo, il gruppo delle *covering transformations* è isomorfo al gruppo d'omotopia di X.

In particolare dalla Proposizione precedente, segue che $\pi_1(1, X)$ è abeliano.

Resta solo da dimostrare che le operazioni di gruppo su $\tilde{X}$ sono continue. Basta farlo in un intorno della unità. Ma dato un intorno V ben ricoperto di 1, vi è un unico intorno U di x_0 che, tramite p si manda in V in modo omeomorfo. Se prendiamo un intorno A abbastanza piccolo di 1 per cui $A^2 \subset V$, $A^{-1} \subset V$ e se $\tilde{A} \subset U$ corrisponde ad A abbiamo per la unicità del sollevamento, il diagramma commutativo in cui i morfismi verticali sono omeomorfismi, m è la moltiplicazione in X,d $\tilde{m}$ la moltiplicazione in $\tilde{X}$, i l'inverso in X e $\tilde{i}$ l'inverso in $\tilde{X}$:

$$
\begin{array}{ccc}
\tilde{A} \times \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{m}} & U \\
p\big\downarrow & & p\big\downarrow \\
A \times A & \xrightarrow{\tilde{m}} & V
\end{array}
,\qquad
\begin{array}{ccc}
\tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{i}} & U \\
p\big\downarrow & & p\big\downarrow \\
A & \xrightarrow{i} & V
\end{array}
$$

Se ora X è una varietà differenziabile, la struttura differenziabile su $\tilde{X}$ si deduce dalle carte locali su cui il rivestimento diviene triviale e gli enunciati seguono facilmente e li lasciamo al lettore.

Dato un rivestimento X' questo si ottiene da $\tilde{X}$ facendo un quoziente rispetto ad un sottogruppo di H, poiché H è discreto e centrale ogni tale sottogruppo è normale ed il quoziente è un gruppo topologico (risp. di Lie).

2) Sia $f : X \to Y$ sia x_0, y_0 srispettivamente gli elementi neutri di $\tilde{X}, \tilde{Y}$. dalla teoria dei rivestimenti esiste una unica applicazione continua $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ per cui $\tilde{f}(x_0) = y_0$ affermo che è un omomorfismo di gruppi. Infatti se $p_X : \tilde{X} \to X$, $p_Y : \tilde{Y} \to Y$ sono i rivestimenti universali si ha, per $y, z \in \tilde{X}$ che:

$$p_Y(\tilde{f}(y.z)) = p_Y(\tilde{f}(L_y(z))) = f(p_X(L_y(z))) = f(p_X(y)p_X(z)) = f(p_X(y))f(p_X(z)) =$$

$$= p_Y(\tilde{f}(y))p_Y(\tilde{f}(z)) = p_Y(\tilde{f}(y).\tilde{f}(z)))$$

pertanto per la unicità del sollevamento, per provare che $\tilde{f}(y.z) = \tilde{f}(y).\tilde{f}(z)$ basta provarlo per $z = y_0$ ed osservare che $\tilde{f}(y.y_0) = \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y).z_0 = \tilde{f}(y).f(\tilde{y}_0)$ $\square$

2.2 Esempio $\tilde{S}L(n,\mathbb{R})$ Un poco di topologia Sia G un gruppo di Lie ed H un sottogruppo chiuso, formiamo la varietà quoziente G/H (connessa). Abbiamo una *fibrazione*:

$$H \to G \to G/H$$

che induce una successione esatta lunga di omotopia, ci concentriamo su:

$$\pi_2(G/H) \to \pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H) \to \pi_0(H) \to \pi_0(G),$$

Se G è connesso in particolare:

$$\cdots \to \pi_2(H) \to \pi_2(G) \to \pi_2(G/H) \to \pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H) \to \pi_0(H) \to 0$$

TEOREMA. *Se G è connesso e semplicemente connesso:*
i) $\pi_2(G/H) \to \pi_1(H)$ è suriettivo.
ii) $\pi_1(G/H) \cong \pi_0(H)$, in particolare H è connesso se e solo se G/H è seplicemente connesso.

DIM. Poiché $\pi_1(G) = \pi_0(G) = 0$ si ha la successione esatta

$$\pi_2(G/H) \to \pi_1(H) \to 0 \to \pi_1(G/H) \to \pi_0(H) \to 0$$

□

Esempio Calcoliamo il gruppo di omotopia di $SL(n,\mathbb{R})$, $n \geq 2$ utilizzando la successione esatta della fibrazioni.

Il gruppo $SL(n,\mathbb{R})$ opera sullo spazio $\mathbb{R}^n - 0$ dei vettori non nulli in modo transitivo, abbiamo una fibrazione

$$H \to SL(n,\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^n - 0)$$

dove H è il gruppo stabilizzatore del vettore $(1,0,0,\ldots,0)$ e quindi

$$H := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

con $B \in SL(n-1,\mathbb{R})$ ed $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ un vettore, dalla fibrazione

$$\mathbb{R}^{n-1} \to H \to SL(n-1,\mathbb{R})$$

otteniamo $\pi_i(H) = \pi_i(SL(n-1,\mathbb{R})$ per ogni i.

$\mathbb{R}^n - 0$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{n-1} e quindi $\pi_i(\mathbb{R}^n - 0) = 0$, $\forall i < n-1$, $\pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - 0) = \mathbb{Z}$ se $n > 3$ ne segue che

$$\pi_1(SL(n,\mathbb{R})) = \pi_1(SL(n-1,\mathbb{R}))$$

per $n = 2$ abbiamo
$$\pi_1(SL(2,\mathbb{R})) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

Per $n = 3$ infine abbiamo la successione lunga

$$\ldots \pi_2(\mathbb{R}^3 - 0) = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} = \pi_1(SL(2,\mathbb{R})) \to \pi_1(SL(3,\mathbb{R})) \to 0 = \pi_1(\mathbb{R}^3 - 0).$$

Mostreremo in seguito che la mappa $\pi_2(\mathbb{R}^3 - 0) = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} = \pi_1(SL(2,\mathbb{R}))$ manda il generatore del primo $\mathbb{Z}$ in 2 e che $\pi_1(SL(n,\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2$ per $n > 2$.

Dunque per il rivestimento universale abbiamo la successione esatta

$$1 \to \mathbb{Z} \to \tilde{SL}(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R}) \to 1$$

In alternativa si usi il Teorema della decomosizione polare (3.7) per provare che la inclusione $SO(n,\mathbb{R}) \to SL(n,\mathbb{R})$ è una equivalenza omotopica.

Se invece calcoliamo $\pi_1(SL(n,\mathbb{C}))$ possiamo utilizzare il fatto che $\mathbb{C}^n - 0$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{2n-1} e quindi $\pi_i(\mathbb{C}^n - 0) = 0,\ \forall i < 2n-1,\ \pi_{2n-1}(\mathbb{C}^n - 0) = \mathbb{Z}$. Segue facilmente che $SL(n,\mathbb{C})$ è semplicemente connesso.

Teorema. *$\tilde{SL}(n,\mathbb{R})$ è un tipico esempio di gruppo di Lie che non si può realizzare come gruppo di matrici in quanto una qualunque rappresentazione lineare di dimensione finita di tale gruppo si fattorizza tramite $SL(n,\mathbb{R})$.*

Dim. Sia $L := sl(n,\mathbb{R})$ l'algebra di Lie di $SL(n,\mathbb{R})$.

Anticipiamo un fatto che proveremo in seguito. Sia $f : \tilde{SL}(n,\mathbb{R}) \to GL(N,\mathbb{R})$ un omomorfismo e $df : L \to gl(N,\mathbb{R})$ il morfismo di algebre di Lie. Estendiamolo ad un morfismo da $sl(n,\mathbb{C}) \to gl(N,\mathbb{C})$ dato da $df(a+ib) := df(a) + idf(b)$. Abbiamo quindi un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi di Lie:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{SL}(n,\mathbb{R}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & GL(N,\mathbb{R}) \arrow[r, "i"] & GL(N,\mathbb{C}) \\
SL(n,\mathbb{R}) \arrow[rr] & & SL(n,\mathbb{C}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

poichè i è iniettivo è chiaro che $\ker p \subset \ker f$. $\square$

Ricordiamo che un insieme K di uno spazio topologico X è discreto se la topologia indotta su K è la topologia discreta.

Esercizio Se K è un sottogruppo chiuso di un gruppo topologico G allora K è discreto se e solo se 1 è un punto isolato in K.

Esercizio Se G è un gruppo di Lie $\pi_1(G,1)$ è un gruppo abeliano che si identifica con il nucleo dell'omomorfismo dato dal rivestimento universale $\tilde{G} \to G$, tale nucleo è un sottogruppo centrale.

Viceversa se H è un gruppo di Lie connesso, $K \subset H$ è un sottogruppo chiuso e discreto allora K è nel centro di H e $H \to H/K$ è un rivestimento.

Sugg. Dato $x \in K$ la funzione $g \to gxg^{-1}$ è continua a valori in K pertanto costante.

2.3 Il teorema di esistenza Ora possiamo precisare il Teorema di esistenza di un gruppo di Lie con data algebra di Lie.

Teorema 1. *Data un'algebra di Lie di dimensione finita L esiste un unico gruppo di Lie $G(L)$ connesso e semplicemente connesso con $L(G) = L$.*
Se H è un gruppo di Lie connesso con $L(H) = L$ allora $G(L)$ è rivestimento univerale di H.
Dato un omomorfismo $\phi : L_1 \to L_2$ fra due algebre di Lie esiste un unico omomorfismo fra $G(L_1) \to G(L_2)$ il cui differenziale in 1 sia ϕ.

Iniziamo provando un lemma.

Lemma. *Sia G un gruppo di Lie, L la sua algebra di Lie e M una sottoalgebra di Lie di L.*
Esiste un gruppo di Lie H con algebra di Lie M ed una immersione C^ω, $i : H \to L$ tale che $d\,i : M \to L$ sia l'inclusione di M in L.

Dim. Sia G un gruppo di Lie ed $L(G)$ la sua algebra di Lie formata da campi vettoriali invarianti a sinistra. Una sottoalgebra di Lie L di dimensione k fornisce k campi vettoriali su G linearmente indipendenti in ogni punto e che soddisfano le condizioni di generare una distribuzione integrabile, in ogni punto g di G il sottospazio della distribuzione è $dL_g(M) \subset T_g(G)$ dove $L_g : h \to gh$. In particolare ogni moltiplicazione a sinistra per un elemento di G preserva tale distribuzione. Ne segue facilmente che:

(1) La foglia massimale H passante per 1 è un sottogruppo di G (non necessariamente chiuso).
(2) Le altre foglie sono le classi laterali gH.
(3) La struttura di varietà differenziabile sulla foglia di 1 è compatibile con la struttura di gruppo e H ha una struttura di gruppo di Lie per cui la inclusione $i : H \to G$ è sia una immersione di varietà che un omomorfismo.
(4) La immersione i induce un isomorfismo fra l'algebra di Lie su H ed L.

Infatti se $g \in G$ la moltiplicazione per g a sinistra preserva la distribuzione e pertanto preserva le foglie, che per ipotesi sono connesse. Se $h \in H$ ssi ha $h1 = h$ quindi hH essendo la foglia per 1 deve coincidere con H, similmente per h^{-1} e si ottiene che H è un sottogruppo. Ragionamento simile per le classi laterali. Il fatto che H sia una varietà differenziabile immersa in L è parte della teoria generale e da questo segue che la struttura di gruppo è quella di gruppo di Lie, finalmentte la proprietà della inclusione fra algebre di Lie è data dalla costruzione stessa, in quanto per costruzione lo spazio tangenete ad H in 1 è M. $\square$

Il Teorema si può mettere nella forma delle equazioni di Lie Meyer, in questa forma supponiamo che localmente gli spazi della $k-$distribuzione siano dati con equazioni lineari tramite l'annullamento di $n-k$ differenziali $\psi_i = \sum_j f_{ij}(x)dx_j$, allora una foglia della distribuzione è data parametricamente da funzioni

$$F(t_1, \dots, t_k) := (x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k))$$

soddisfacenti le equazioni differenziali

$$0 = F^*\psi_i = \sum_j f_{ij}(x) \sum_s \frac{\partial x_j}{\partial t_s}, \quad \sum_j f_{ij}(x) \frac{\partial x_j}{\partial t_s} = 0$$

in questo linguaggio le condizione di integrabilità sono date dall'esistenza di differenziali $\psi_{i,j}$ con:

$$d\psi_i = \sum_k \psi_{i,k} \wedge \psi_k$$

Ora per completare il Teorema di esistenza dei gruppi di Lie basta usare il Teorema di Ado (cf. Cap. 5)

Teorema di Ado. *Ogni algebra di Lie di dimensione finita L è isomorfa ad una sottoalgebra di una algebra di matrici.*

Questo teorema di carattere algebrico richiede alcuni teoremi di struttura delle algebre di Lie e verrà provato in seguito.

Da questo Teorema segue che per ogni algebra di Lie L esiste un gruppo di Lie connesso G che la ammette come algebra di Lie e tale che G si immerge come sottogruppo del gruppo di tutte le matrici invertibili di un qualche ordine.

Il rivestimento universale di G lo denoteremo con $G(L)$ è semplicemente connesso con la stessa algebra di Lie.

Per completare il quadro bisogna provare che:

Teorema 2. *$G(L)$ è univocamente determinato e funtoriale in L.*

Dim. Le due cose si provano insieme facilmente.

Siano date due algebre di Lie L_1, L_2 ed un omomorfismo $f : L_1 \to L_2$. Siano $G(L_1), G(L_2)$ due gruppi connessi e semplicemente connessi di algebre di Lie L_1, L_2 (per esempio costriti in base alla precedente strategia).

$L_1 \oplus L_2$ è l'algebra di Lie del prodotto $G(L_1) \times G(L_2)$.

Consideriamo il grafico del morfismo f ossia

$$M := \{(x, f(x)) \in L_1 \oplus L_2 | x \subset L_1\}.$$

Evidentemente M è una sottoalgebra di Lie di $L_1 \oplus L_2$ e quindi possiamo costruire un gruppo semplicemente connesso $G(M)$ di algebra di Lie M ed un morfismo $j : G(M) \to G(L_1) \times G(L_2)$ che a livello di algebere di Lie induca l'inclusione $M \subset L_1 \oplus L_2$.

Possiamo comporre j con le due proiezioni sui due fattori $G(L_1), G(L_2)$ e otteniamo due omomorfismi $i_1 : G(M) \to G(L_1), \quad i_2 : G(M) \to G(L_2)$ corrispondenti a livello di algebre di Lie alle due proiezioni di M su L_1, L_2.

Ne segue che i_1 induce un isomorfismo di algebre di Lie e quindi è un rivestimento, siccome però $G(L_1)$ è semplicemente connesso e $G(M)$ è connesso ne segue che i_1 è un isomorfismo e che $G(L_1) \xrightarrow{i_1^{-1}} G(M) \xrightarrow{i_2} G(L_2)$ è un omomorfismo che induce f sulle algebre di Lie.

In particolare se f è un isomorfismo si ha che $i_2 \circ i_1^{-1}$ è un rivestimento e quindi un isomorfismo, questo prova in particolare che il gruppo $G(L)$ non dipende dalla costruzione ed anche la funtorialità della costruzione di $G(L)$. $\square$

È anche utile notare il seguente:

Corollario. *Se $\rho : G_1 \to G_2$ è un omomorfismo continuo fra gruppi di Lie, ρ è automaticamente C^ω.*

Dim. Abbiamo che ρ si fattorizza tramite la inclusione $g \to (g, \rho(g))$ di G_1 in $G_1 \times G_2$ e la proiezione. Abbiamo visto che un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie è un gruppo di Lie con inclusione C^ω e quindi il corollario segue. $\square$

A questo punto possiamo applicare la teoria alle rappresentazioni lineari di un gruppo di Lie.

Per definizione una rappresentazione lineare reale, risp. complessa di dimensione n di G è un omomorfismo continuo (da cui segue che è C^ω):

$$\rho : G \to GL(n, \mathbb{R}), \quad \text{risp.} \quad \rho : G \to GL(n, \mathbb{C}).$$

I due gruppi $GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C})$ hanno come algebre di Lie le due algebre di matrici $gl(n, \mathbb{R}), gl(n, \mathbb{C})$. Abbiamo quindi due idee in teoria delle rappresentazioni. L'idea di rappresentazione di un gruppo e quella di rappresentazione di un'algebra di Lie, la seconda è la versione infinitesimale della prima.

Per un gruppo abbiamo un omomorfismo fra il gruppo dato G ed il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili di uno spazio vettoriale V mentre per una algebra di Lie $\mathfrak{g}$ abbiamo un omomorfismo da $\mathfrak{g}$ all'algebra di Lie degli operatori lineari.

Dal Teorema 1 (o 2) se G è connesso e semplicemente connesso le due nozioni sono equivalenti.

Dare una rappresentazione continua nelle matrici $GL(n, \mathbb{C})$ di G è equivalente a dare una rappresentazione della sua algebra di Lie $L(G)$ nell'algebra di Lie $gl(n, \mathbb{C})$ (idem per $\mathbb{R}$).

La teoria si può sviluppare anche per rappresentazioni di dimensione infinita. In questo caso l'analisi è molto più sottile e passa attraverso la nozione di vettori C^∞, la accenneremo in seguito.

2.4 Coordinate logaritmiche Visto che esp è un diffeomorfismo locale fra $L(G)$ e G si può usare tale diffeomorfismo per descrivere G in coordinate, usando coordinate lineari su $L(G)$ queste coordinate si chiamano *coordinate logaritmiche.*

Poiché, dal teorema di Ado ogni gruppo di Lie è localmente isomorfo ad un gruppo di Lie lineare, si può inoltre pensare che tali coordinate lineari siano le coordinate di una sottoalgebra di Lie di matrici in cui l'esponenziale è l'usuale esponenziale di matrici.

In aprticolare in tali coordinate abbiamo le formule:

$$esp(sa)esp(sb) = 1 + s(a+b) + \frac{s^2}{2}(a^2+b^2) + s^2ab + O(s^3)$$

$$esp(sa)esp(sb)esp(-sa)esp(-sb) = 1 + s^2[a,b] + O(s^3)$$

§3 Classi notevoli di gruppi

3.1 Componente connessa Uno studio sistematico dei gruppi di Lie passa attraverso la identificazione di classi notevoli di gruppi il loro studio ed eventuale classificazione.

Prima di tutto conviene isolare un aspetto topologico. Dato un gruppo di Lie G si vede facilmente che:

Proposizione. *La componente connessa della identità G_0 è un sottogruppo normale chiuso ed aperto ed il quoziente è un gruppo discreto.*

I metodi infinitesimali non danno informazione sui gruppi discreti e quindi una attenzione particolare andrà ai gruppi connessi (anche se non sempre ci si può ridurre a questi soli gruppi).

Sempre dal punto di vista topologico un ruolo essenziale rivestono i gruppi di Lie compatti e connessi, come vedremo per questa classe di gruppi esistono teoremi molto precisi di classificazione di struttura dei gruppi e delle loro rappresentazioni. Gran parte della teoria cerca di sfruttare in qualche modo la conoscenza precisa che abbiamo dei gruppi compatti.

Un'altro punto di vista importante è quello di studiare i gruppi a partire da proprietà speciali della loro algebra di Lie. In altri termini si studiano prima le algebre di Lie e poi se ne deducono proprietà per i gruppi.

Da questo punto di vista le nozioni principali sono quelle di: Algebre nilpotenti, risolubili e semisemplici. Per la teoria si veda H. o J. rivedremo solo i concetti che ci servono di più.

Vi è un'altra classe importante che ammette una teoria a parte e cioè quella dei gruppi lineari algebrici. Vi sono legami profondi fra queste classi che metteremo in evidenza.

3.2 Gruppi abeliani Sia G un gruppo di Lie abeliano e connesso, la sua algebra di Lie è dunque abeliana ossia ha prodotto di Lie nullo (dal Cap. 1, 1.7) consideriamo la applicazione esponenziale $esp : L(G) \to G$ che, dall'analisi di Cap. 1, 1.7 è un omomorfismo.

Premettiamo

Esercizio Un sottogruppo di di un gruppo topologico connesso G che contiene un aperto di G coincide con G.

TEOREMA. *Un grupppo di Lie G connesso è abeliano se e solo se $L(G)$ è abeliana. In questo caso, esp è un omomorfismo, il nucleo K di esp è un sottogruppo discreto di $L(G)$ e esp è suriettiva.*

Esiste una base $e_i,\ i = 1, \dots, n$ ed un numero $k \leq n$ tale che $K = \sum_{i=1}^{k} m_i e_i,\ m_i \in \mathbb{Z}$ e G è isomorfo a $L(G)/K$ isomorfo ad $(S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

DIM. Se G è abeliano anche $L(G)$ è abeliana (cf.). Viceversa se $L(G)$ è abeliana i gruppi as un parametro $esp(sa)$ coomutano e esp è un omomorfismo. Poiché esp è un diffeomorfismo locale in 1 si ha che il nucleo è discreto e l'immagine un sottogruppo di G che contiene un aperto e quindi coincide con G.

Per la seconda parte si fa per induzione su n per $n = 1$ se $K \subset \mathbb{R}$ è un sottogruppo non nullo discreto di $\mathbb{R}$ si prenda il minimo $r \in K \cap \mathbb{R}^+$ che esiste per le ipotesi fatte dato comunque $x \in K$ scriviamo $x = mr + s,\ m \in \mathbb{Z},\ 0 \leq s < r$. Segue che $s = x - mr \in K$ e quindi $s = 0$ e $K = \mathbb{Z}r$.

In generale presa una base qualunque identifichiamo $L(G) = \mathbb{R}^n$. Prendiamo un elemento x non nullo di K e possiamo supporre (dal passo precedente) che generi il sottogruppo $K \cap \mathbb{R}x$.

Cambiando base possiamo assumere che $x = e_1$ il primo elemento della base.

Basta provare che l'immagine $\overline{K}$ di K in $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n/\mathbb{R}e_1$ è ancora un gruppo discreto ed applicare l'induzione.

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che vi sia una successione di vettori non nulli $v_i \in \overline{K}$ che tende a 0, ossia vi è una successione di vettori $(k_i, v_i) \in K$ con $v_i \neq 0$, $\lim v_i = 0$.

Ora poiché $e_1 \in K$ per ipotesi anche $(\{k_i\}, v_i) \in K$ dove $\{k_i\}$ è la parte frazionaria di k_i in modulo minore di $1/2$. Da questa sottosuccessione ne possiamo estrarre una convergente (per compattezza) ad un vettore $(h, 0)$ con $|h| \leq 1/2$ e questo contraddice l'ipotesi su e_1 a meno che $h = 0$ e questo contraddice la discretezza di K. $\square$

Se G è un gruppo di Lie e A un gruppo di Lie abeliano è evidente che gli omomorfismi da G ad A formano un gruppo per moltiplicazione dei valori.

Possiamo ora determinare gli omomorfismi fra due gruppi abeliani connessi $\mathbb{R}^m/\Lambda_1$, $\mathbb{R}^n/\Lambda_2$. Un tale omomorfismo si solleva in un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle esp}\big\downarrow & & {\scriptstyle esp}\big\downarrow \\ \mathbb{R}^m/\Lambda_1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n/\Lambda_2 \end{array}$$

necessariamente $\tilde{f}$ è una applicazione lineare e vediamo immediatamente che:

Proposizione. *Una applicazione lineare $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{R}^n$ solleva un morfismo $\mathbb{R}^m/\Lambda_1 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n/\Lambda_2$ se e solo se $\tilde{f}(\Lambda_1) \subset \Lambda_2$.*

Vediamo in particolare cosa vuole dire questo enunciato per i tori.

Una applicazione lineare $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{R}^n$ solleva un morfismo $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ se e solo se $\tilde{f}(\mathbb{Z}^m) \subset \mathbb{Z}^n$.

Questo vulo dire che la matrice di $\tilde{f}$ è una matrice di numeri interi. In particolare otteniamo il:

Corollario. *i) Il gruppo degli automorfismi del toro $T^m := \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ si identifica al gruppo $GL(m, \mathbb{Z})$ delle matrici intere invertibili.*

ii) Il gruppo dei morfismi di un toro $m-$dimensionale T in S^1 è un gruppo libero di rango m detto **gruppo dei caratteri**, *denotato $\check{T}$.*

iii) Il gruppo dei morfismi di S^1 in un toro $m-$dimensionale T è un gruppo libero di rango m detto **gruppo dei gruppi ad un parametro** *e denotato $\hat{T}$.*

iv) Il gruppo dei morfismi di S^1 in S^1 è $\mathbb{Z}$ ($z \to z^m$).

v) La composizione di morfismi:

$$S^1 \to T \to S^1, \qquad \hat{T} \times \check{T} \to \mathbb{Z}$$

induce un isomorfismo fra $\hat{T}$ ed il duale $hom_{\mathbb{Z}}(\check{T}, \mathbb{Z})$.

3.3 Azione aggiunta Consideriamo prima di tutto la rappresentazione aggiunta di un gruppo G sulla sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Questa si ottiene come la azione infinitesimale di G sulla sua algebra di Lie associata alla azione di G su G stesso per coniugazione.

Dato $g \in G$ si considera *l'automorfismo interno* $AD(g)(h) := ghg^{-1}$. Essendo un omomorfismo di gruppi induce un omomorfismo di algebre di Lie che denotiamo con $Ad(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ed è il differenziale in 1 del diffeomorfismo $x \to gxg^{-1}$.

Inoltre poichè evidentemente $AD(gh) = AD(g)AD(h)$ si ha $Ad(gh) = Ad(g)Ad(h)$ ovvero:

Teorema. *$g \to Ad(g)$ è una rappresentazione lineare C^ω di G sulla sua algebra di Lie come gruppo di automorfismi della struttura di Lie.*
La corrispondente rappresentazione infinitesimale è $a \to ad(a)$.

Dim. Resta solo da vedere la proprietà C^ω che è comunque chiara in quanto la applicazione $G \times G \times G \to G$, $(x, y, z) \to xyz^{-1}$ è C^ω. $\square$

Proposizione. *Dato $g \in G$ ed $a \in \mathfrak{g}$ si ha:*

$$g\, esp(ta)g^{-1} = esp(t\, Ad(g)(a)). \tag{3.3.1}$$

Dim. Sia $g\, esp(ta)g^{-1}$ che $esp(t\, Ad(g)(a))$ sono gruppi ad un parametro quindi basta provare che hanno lo stesso generatore ma questa è la definizione di $Ad(g)$. $\square$

Dalle formule sugli esponenziali segue che la azione infinitesimale di $\mathfrak{g}$ su $\mathfrak{g}$ associata alla azione aggiunta di G è data dagli operatori $ad(x)y \to [x, y]$ in altre parole il gruppo ad un paramtro $Ad(esp(tx)$ è il gruppo $esp(tad(x))$. Si noti che, gli operatori $ad(x)$ sono derivazioni del prodotto di Lie (identità di Jacobi) mentre gli $Ad(g)$ sono automorfismi, questi automorfismi, nel caso G connesso sono detti *automorfismi interni* di $\mathfrak{g}$.
Ora studiamo più in generale il centro. Per un'algebra di Lie L il centro è

$$Z(L) := \{a \in L \mid [a, L] = 0\}$$

Teorema. *Se G è un gruppo di Lie connesso il suo centro Z è il nucleo della rappresentazione aggiunta.*
L'algebra di Lie di Z è $Z(L)$.

Da 3.3.1 $g \in G$ commuta con $esp(sa)$ se e solo se $Ad(g)(a) = a$, quindi se g è nel centro $Ad(g) = 1$. viceversa se $Ad(g) = 1$ g commuta con gli esponenziali che generano il gruppo G.
L'algebra di Lie di Z è il nucleo della rappresentazione aggiunta dell'algebra di Lie.

ESEMPIO

$$U := \left\{ \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}, \quad L(U) := \left\{ \begin{vmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right\}, \quad Z := \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

è facile da questo esempio dedurre un gruppo non lineare. Basta prendere il sottogruppo discreto K del centro con $c \in \mathbb{Z}$. Per ora non lo proviamo ma invitiamo il lettore a dimostrare che dal successivo teorema di Lie sulle algebre risolubili segue che U/K non è un gruppo lineare.
Ovviamente questo esempio si generalizza.

3.4 Gruppi ed algebre risolubili, nilpotenti e semisemplici Prima di tutto una semplice osservazione:
Dati due sottospazi H, K di un algebra di Lie L definiamo $[H, K]$ come il sottospazio generato dagli elementi $[h, k]$, $h \in H$, $k \in K$.

Lemma. *Se H, K sono due ideali di L anche $[H, K]$ è un ideale.*

Dim. e $a \in L$ e $[h, k] \in [H, K]$ si ha $[a, [h, k]] = [[a, h], k] + [h, [a, k]]$. $\square$

Proposizione. *Siano $H \subset G$ gruppi di Lie connessi e $L(H) \subset L(G)$ la corrispondente inclusione di algebre di Lie.*

H è normale in G se e solo se $L(H)$ è un ideale di $L(G)$.

In questo caso G/H è gruppo di Lie con algebra di Lie $L(G)/L(H)$.

Viceversa, se $L \subset L(G)$ è un ideale e G è semplicemente connesso, si ha che $L = L(H)$ per un sottogruppo normale chiuso.

Dim. Se H è normale e $a \in L(G)$ si ha $esp(ta)Hepx(-ta) \subset H$ da cui $ad(a)(L(H)) \subset L(H)$. Viceversa sia L un ideale di $L(G)$ con G semplicemente connesso e sia M un gruppo di Lie di algebra di Lie $L(G)/L$. Sia $\rho : G \to M$ l'omomorfismo indotto e K il suo nucleo. Si ha che K è un sottogruppo di Lie chiuso con algebra di Lie L. Sia ora G gruppo di Lie e H sottogruppo connesso con $L(H)$ un ideale. Sia $\pi : \tilde{G} \to G$ il rivestimento universale di G, evidentemente H è sottogruppo normale di G se e solo se $\pi^{-1}(H)$ è sottogruppo normale di $\tilde{G}$. Ma ora possiamo usare il fatto che la componente connessa di $\pi^{-1}(H)$ è il sottogruppo normale K dedotto precedentemente che è normale. In quanto a $\pi^{-1}(H)$ questo è KZ con Z il nucleo di π un sottogruppo centrale. $\square$

La nozione di risolubilità di un gruppo viene dalla teoria di Galois e per Lie dovrebbe corrispondere ad una condizione di *completa integrabilità* delle corrispondnti equazioni differenziali.

Ricordiamo le definizioni usuali che si basano sulle idee di serie derivata e serie centrale. Prima di tutto una notazione, se G è un gruppo e $h, k \in G$ denotiamo con:

$$\{h, k\} := hkh^{-1}k^{-1}, \quad \text{il commutatore.}$$

Se H, K due sottogruppi si denota con $\{H, K\}$ il sottogruppo generato da tutti i commutatori $\{h, k\},\ h \in H,\ k \in K$.

In un gruppo topologico definiremo con $\{H, K\}$ il sottogruppo chiuso generato da tutti i commutatori $\{h, k\},\ h \in H,\ k \in K$.

Se K è normale si ha evidentemente che $\{H, K\} \subset K$.

In particolare $\{G, G\}$ è normale in G si ha $G/\{G, G\}$ è abeliano ed inoltre ogni sottogruppo normale K per cui G/K è abeliano contiene $\{G, G\}$

In modo simile per le algebre di Lie se H, K sono sottoalgebre di L si denota $[H, K]$ la sottoalgebra generata dai commutatori. Di nuovo $[L, L]$ è un ideale di L e $L/[L, L]$ è il massimo quoziente abeliano.

Definizione. *La serie discendente centrale di un gruppo, risp. di un'algebra di Lie si definisce per induzione:*

$$C^k(G) := \{G, C^{k-1}(G)\}, \quad C^k(L) := [L, C^{k-1}(L)]$$

La serie derivata di un gruppo, risp. di un'algebra di Lie si definisce per induzione:

$$D^k(G) := \{D^{k-1}G, D^{k-1}(G)\}, \quad D^k(L) := [D^{k-1}(L), C^{k-1}(L)]$$

Si dice che un gruppo G è risolubile, risp, nilpotente se per qualche k si ha $C^k(G) = 1$ risp. $D^k(G) = 1$. Definizione simile per le algebre di Lie.

Si ha evidentemente $D^k(G) \subset C^k(G)$, $D^k(L) \subset C^k(L)$ in particolare un gruppo nilpotente è risolubile. Simile analisi per le algebre di Lie.

ESEMPIO ESSENZIALE (Esercizio):

Sia B_n il sottogruppo delle matrici $n \times n$ triangolari superiori complesse, ovvero le matrici $(a_{i,j}) \,|\, a_{i,j} = 0$, se $i > j$. Sia U_n il sottogruppo di B_n formato dalle matrici unipotenti, ovvero con 1 sulla diagonale.

B è risolubile ma non nilpotente (se $n > 1$). U è nilpotente, inoltre $U = \{B, B\}$.

Calcolare la serie centrale e derivata di B_n e di U_n.

Per fare questo esercizio si noti ad esempio:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u(a^2-1) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

OSSERVAZIONE $\pi_1(B_n) = \mathbb{Z}^n$, si studi il rivestimento universale di B_n.

Per procedere ci serve un:

Lemma. *Dato un gruppo di Lie G e due elementi $a, b \in L(G)$ esiste un cammino C^1, $f(t)$ con $f(1) = 1$, $\dot{f}(1) = [a, b]$ e $f(t)$ è un commutatore per ogni t.*

Dim. Mettamoci in coordinate locali di matrici, ovvero logaritmiche. Consideriamo $g(s) := esp(sa)esp(sb)esp(-sa)esp(-sb) = 1 + s^2[a, b] + O(s^3)$, quindi posto $t = s^2$, abbiamo che

$$f(t) := \begin{cases} g(\sqrt{t}), & t \geq 0 \\ -g(\sqrt{-t}), & t \leq 0 \end{cases}$$

soddisfa le condizioni $\square$

Proposizione. *Sia G un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie L.*

Per ogni k si ha che $C^k(G)$ (risp. $D^k(G)$) è un sottogruppo chiuso connesso e semplicemente connesso, di algebra di Lie $C^k(L)$ (risp. $D^k(L)$) e $G/C^k(G)$ (risp. $G/D^k(G)$) è diffeomorfo allo spazio affine.

Dim. Per $D^k(G)$ ci si riduce immediatamente a $k = 1$. Abbiamo che $L/[L, L]$ è algebra di Lie abeliana che si identifica al proprio gruppo di Lie semplicemente connesso, abbiamo dunque un omomorfismo suriettivo $G \to L/[L, L]$, il cui nucleo K è un sottogruppo normale e $K \supset \{G, G\}$. Da 3.4 segue, essendo $L/[L, L]$ contraibile che $\pi_i(G) = \pi_i(K)$ per ogni i, in particolare K è semplicemente connesso. Per vedere che $K = \{G, G\}$ basta far vedere che vi è un intorno di 1 in K contenuto in $\{G, G\}$. Siano $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$ una base di $[L, L]$ e siano $g_i(t)$ i cammini previsti dal lemma precedente per questi elementi.

Lo jacobiano del morfismo C^1 dato da:

$$(t_1, \ldots, t_k) \to g_1(t_1) \ldots g_k(t_k)$$

manda la base canonica di $\mathbb{R}^k$ nella base $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$ ed è quindi un diffeomorfismo locale, questo basta.

Sia ora M un sottospazio complementare a $[L, L]$ in L, si vede facilmente che l'applicazione $M \to L/[L, L]$ è un diffeomorfismo da cui segue che anche l'applicazione $M \times K \to G$ data da $(m, k) \to esp(m)k$ è un diffeomorfismo C^ω.

Passiamo ora a $C^k(G)$ supponendo gli enunciati per $C^i(G),\ i < k$.

Come prima sia G_k il gruppo di Lie semplicemente connesso associato a $L/C^k(L)$, $\pi : G \to G_k$ l'omomorfismo indotto e C_k il suo nucleo, un sottogruppo normale connesso dalle ipotesi e da 3.4.

Per induzione il nucleo dell'analogo omomorfismo sul gruppo associato a $L/C_{k-1}(L)$ è $C^{k-1}(G)$ e in $L/C^k(L)$ l'ideale $C^{k-1}L/C^k(L)$ è contenuto nel centro. Dallo studio del centro segue che $C^{k-1}(G)/C^k(G)$ è contenuto nel centro di $G/C^k(G)$ ne segue che $\{G, C^{k-1}G\} \subset C^k(G)$, per il viceversa si ragiona come prima prendendo una base $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k],\ b_i \in C^{k-1}(L)$ di $C^k(L)$. $\square$

3.5 Forma di Killing Consideriamo prima di tutto la rappresentazione aggiunta di un gruppo G sulla sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Questa si ottiene come la azione infinitesimale di G sulla sua algebra di Lie associata alla azione di G su G stesso per coniugazione. L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è pensata come spazio tangente ad 1 che è un punto fisso per tale azione da cui la azione infinitesimale.

In formule si scrive $Ad(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ come il differenziale in 1 del diffeomorfismo $x \to gxg^{-1}$.

Dalle formule sugli esponenziali segue che la azione infinitesimale di $\mathfrak{g}$ su $\mathfrak{g}$ associata alla azione aggiunta di G è data dagli operatori $ad(x)y \to [x, y]$ in altre parole il gruppo ad un paramtro $Ad(esp(tx)$ è il gruppo $esp(tad(x))$. Si noti che, gli operatori $ad(x)$ sono derivazioni del prodotto di Lie (identità di Jacobi) mentre gli $Ad(g)$ sono automorfismi, questi automorfismi, nel caso G connesso sono detti *automorfismi interni* di $\mathfrak{g}$.

Introduciamo a questo punto un'altra costruzione generale nella teoria la *Forma di Killing.*

Definizione. *Su un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *la forma di Killing è la forma bilineare simmetrica definita dalla formula:*

$$(a, b)_K := tr(ad(a)ad(b))$$

Osservazione La forma di Killing è *associativa* ovvero

$$([x,y],z) = (x,[y,z]), \quad \text{ovvero} \quad (-ad(y)(x),z) = (x, ad(y)(z))$$

in altre parole gli operatori $ad(y),\ y \in \mathfrak{g}$ son antisimmetrici per la forma di Killing.

Sia $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ un automorfismo di algebre di Lie ovvero $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$.

Questa identità si può anche scrivere come

$$ad(\phi(x)) = \phi \circ ad(x) \circ \phi^{-1}$$

ne segue che

COROLLARIO. *Qualunque automorfismo della algebra di Lie $\mathfrak{g}$ preserva la forma di Killing.*

Notiamo che questa definizione si applica sia nel caso di algebre reali che complesse, nei due casi la forma è rispettivamente reale o complessa.

DEFINIZIONE. *Diremo che un algebra di Lie L è semisemplice se ogni rappresentazione lineare di L è semisemplice, ovvero è somma diretta di moduli irriducibili.*
Un gruppo di Lie G è semisemplice se $L(G)$ è semisemplice.

OSSERVAZIONE Se prendiamo il gruppo compatto S^1 ogni sua rappresentazione lineare è semisemplice, ma questo non è valido per la sua algebra di Lie $\mathbb{R}$.
Il punto è che S^1 non è semisemplice e vi sono rappresentazioni lineari della sua algebra di Lie che si integrano solo al rivestimento universale $\mathbb{R}$.

Il Teorema fondamentale sulla forma di Killing è il seguente:

TEOREMA. *Una algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e solo se la sua forma di Killing è non degenere.*

(cf. H p. 22)

3.6 Gruppi compatti La teoria dei gruppi compatti è legata in modo stretto a quella dei gruppi semplici ossia senza sottogruppi normali. I passi fondamentali sono i seguenti.
1. Classificazione dei gruppi semplici compatti.
Il prodotto della classificazione è il seguente.
I gruppi semplici compatti sono classificati dai diagrammi di Dynkin, vi sono le 4 serie classiche A_n, B_n, C_n, D_n e i 5 gruppi eccezionali $E_k,\ k = 6,7,8,\ F_4,\ G_2$
2. Il gruppo di omotopia di un gruppo semplice compatto G è finito e quindi il suo rivestimento universale $\tilde{G}$ è ancora compatto. Il centro Z di $\tilde{G}$ è il gruppo di omotopia di G e $G = \tilde{G}/Z$.
3. Ogni gruppo compatto è della forma $[(S^1)^k \times \prod \tilde{G}_i]/\Gamma$ dove i gruppi $\tilde{G}_i$ sono ciascuno il rivestimento universale di un gruppo semplice e Γ è un gruppo finito contenuto nel centro $(S^1)^k \times \prod Z_i$ (Z_i centro di $\tilde{G}_i$).

Esplicitamente.

A_n Si considera il gruppo $SU(n+1,\mathbb{C})$. Ragionando come nel caso di $SL(n,\mathbb{R})$ si prova per induzione e usando le fibrazioni sulle sfere che è un gruppo semplicemente connesso. Il suo centro è formato dalle matrici scalari $\zeta 1 \in SU(n+1,\mathbb{C})$.

La condizione impone $\zeta^{n+1} = 1$ quindi il centro Z di $SU(n+1,\mathbb{C})$ è isomorfo al gruppo ciclico su $n+1$ elementi delle readici $n+1-$esime di 1.

Il quoziente $SU(n+1,\mathbb{C})/Z$ viene indicato con $PSU(n+1,\mathbb{C})$ e detto gruppo proiettivo unitario, è un gruppo semplice compatto.

B_n, D_n Si considerano i gruppi $SO(m,\mathbb{R})$. Abbiamo le fibrazioni

$$SO(m,\mathbb{R}) \to SO(m+1,\mathbb{R}) \to S^m$$

da cui $\pi_1(SO(m,\mathbb{R})) = \pi_1(SO(m+1,\mathbb{R})$ per $m > 2$.

Per $SO(3,\mathbb{R})$ possiamo usare la teoria dei quaternioni.

I quaternioni sono l'algebra associativa

$$\mathbb{H} := \{a + b\underline{i} + c\underline{j} + d\underline{k} | a,b,c,d \in \mathbb{R}\}, \underline{i}^2 = \underline{j}^2 = \underline{k}^2 = -1,\ \underline{i}\underline{j} = \underline{k},\ \underline{j}\underline{k} = \underline{i},\ \underline{k}\underline{i} = \underline{j}.$$

È utile pensare $\mathbb{H}$ come spazio vettoriale *destro* sui complessi con base 1, $\underline{j}$:

$$a + b\underline{i} + c\underline{j} + d\underline{k} = 1(a + b\underline{i}) + \underline{j}(c - d\underline{i})$$

allora ogni quaternione induce per moltiplicazione a sinistra una matrice, ovvero otteniamo la rappresentazione dei quaternioni come matrici 2×2 complesse

$$\begin{pmatrix} a+bi & -c-di) \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Indicheremo sempre con $A^* := \overline{A}^t$ la aggiunta ovvero la coniugata trasposta di una matrtice complessa. Si noti che

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$$

In termini di quaternioni $(a + b\underline{i} + c\underline{j} + d\underline{k})^* = a - (b\underline{i} + c\underline{j} + d\underline{k})$.

Inoltre

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}^* = (\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta})1,\ (\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta}) = det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

In termini di quaternioni si parla di *norma*

$$N(q) := qq^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Il gruppo dei quaternioni a norma 1, $S := \{q := a+b\underline{i}+c\underline{j}+d\underline{k} | N(q) = a^2+b^2+c^2+d^2 = 1\}$ è topologicamente la sfera S^3 e quindi semplicemente connesso.

Dalla rappresentazione matriciale dei quaternioni vediamo che $S = SU(2, \mathbb{C})$.

Operiamo ora con S per coniugazione sui quaternioni e per restrizione sui quaternioni con $a = 0$ ovvero come matrici, a traccia nulla.

Questo è uno spazio euclideo 3-dimensionale (rispetto alla norma) e si verifica facilmente che ogni elemento di S induce un elemento di $SO(3, \mathbb{R})$ e che l'omomorfismo

$$SU(2, \mathbb{C}) = S \to SO(3, \mathbb{R})$$

è suriettivo con nucleo ± 1.

Segue che S è il rivestimento universale di $SO(3, \mathbb{R})$ il cui gruppo di omotopia è dunque $\mathbb{Z}/(2)$.

Quindi $\pi_1(SO(m, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}/(2)$ per $m > 2$. Il rivestimento universale di $SO(m, \mathbb{R})$ viene detto *gruppo spinoriale*, un modo concreto di costruirlo è tramite le algebre di Clifford.

Calcoliamo il centro di $SO(m, \mathbb{R})$ non è difficile vedere che è ancora formato da matrici scalari $\zeta 1_m$ ma ora la condizione di ortogonalità e sul determinante danno $\zeta^2 = 1,\ \zeta^m = 1$ da cui $\zeta = \pm 1$ se $m = 2n$ è pari e $\zeta = 1$ se $m = 2n + 1$ è dispari.

Riassumendo il caso B_n corrisponde a $SO(2n + 1)$ che è un gruppo semplice ($n \geq 1$) e D_n corrisponde a $SO(2n)$ a cui è associato il gruppo semplice $PSO(2n) := SO(2n)/(\pm 1)$ per $n > 2$

C_n Per questo consideriamo le matrici $M(n, \mathbb{H})$, $n \times n$ sui quaternioni $A := (q_{ij}),\ q_{ij} \in \mathbb{H}$ e poniamo $A^* := (\overline{q}_{ji})$. Si vede facilmente che $(AB)^* = B^* A^*$. Poniamo

$$Sp(n, \mathbb{H}) := \{A \in M(n, \mathbb{H}) | AA^* = 1\}$$

Si verifica facilmente che questo è un gruppo o, detto gruppo simplettico, usando le fibrazioni sulle sfere nello spazio dei quaternioni vediamo che questi gruppi sono tutti semplicemente connessi. Il centro di un tale gruppo è formato da matrici scalari reali e la condizione imposta dà di nuovo come centro $\pm 1 = \mathbb{Z}/(2)$ da cui il gruppo semplice $PSp(n, \mathbb{H})$, questo è il gruppo semplice di tipo C_n.

Gli altri 5 gruppi semplici compatti sono più difficili da descrivere e non lo facciamo.
Notiamo Vi sono casi speciali in cui i gruppi coincidono.

$$PSU(2, \mathbb{C}) = SO(3, \mathbb{R}),\ Sp(1, \mathbb{H}) = SU(2, \mathbb{C}),$$
$$Sp(2, \mathbb{H}) = \tilde{SO}(5, \mathbb{R}), PSU(2, \mathbb{C}) \times PSU(2, \mathbb{C}) = SO(4, \mathbb{R})$$

Vediamo ora alcuni di questi punti:

Consideriamo prima di tutto la rappresentazione aggiunta di un gruppo compatto G sulla sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Consideriamo un prodotto scalare euclideo su $\mathfrak{g}$ per cui l'azione aggiunta sia ortogonale e decomponiamo l'algebra di Lie in sottorappresentazioni irriducibili. Per costruzione una sottorappresentazione dell'algebra di Lie è un ideale e quindi $\mathfrak{g}$ viene decomposta in somma diretta di algebre di Lie semplici $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$.

Fra tali algebre di Lie quelle 1 dimensionali sono abeliane e la loro somma diretta costituisce il centro $\mathfrak{z}$ di $\mathfrak{g}$, il sottogruppo di Lie Z di G di algebra di Lie $\mathfrak{z}$ è nel centro di G e quindi la sua chiusura $\overline{Z}$ è ancora centrale, ne segue che l'algebra di Lie di $\overline{Z}$ deve coincidere con $\mathfrak{z}$ e quindi $\overline{Z} = Z$. Il sottogruppo Z è il toro centrale di G.

Per gli addendi semplici $\mathfrak{g}_i$ non 1 dimensionali va provato un risultato che per ora non dimostriamo ovvero che il gruppo semplicemente connesso ad essi associato G_i è ancora compatto.

Fatto questo abbiamo la richiesta isogenia $Z \times \prod_i G_i \to G$ e restano da analizzare i gruppi compatti con algebra di Lie semplice.

Mettiamoci ora in questo caso e cioè che $\mathfrak{g}$ sia semplice e non abeliana.

Vediamo subito una proprietà importante della forma di Killing nel caso compatto, osserviamo per questo che , se X è una matrice reale antisimmetrica e non nulla si ha $tr(X^2) < 0$. Ne deduciamo

PROPOSIZIONE. *Per l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di un gruppo compatto la forma di Killing è semidefinita negativa con nucleo il centro di $\mathfrak{g}$.*

Viceversa, se la forma di Killing di una algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è definita negativa allora il suo gruppo aggiunto G è semisemplice e compatto.

DIM. Abbiamo visto che esiste un prodotto scalare euclideo per cui gli elementi di G sono ortogonali nella rappresentazione aggiunta e quindi quelli $ad(x)$ di $\mathfrak{g}$ sono antisimmetrici.

Ne segue che $tr(ad(x)^2) < 0$ a meno che $ad(x) = 0$ ossia x è nel centro.

Viceversa se la forma è definita negativa il centro è 0 e il gruppo aggiunto è formato da elementi ortogonali, quindi la sua chiusura K è compatta, applicando la teoria precedente a K si vede facilmente che $G = K$.

In particolare per una algebra di Lie $\mathfrak{g}$ semplice di un gruppo compatto la forma $-tr(ad(x)^2) = -(x,x)_K$ è una struttura euclidea per cui l'azione aggiunta è ortogonale. Esercizio Provare (usando il Lemma di Schur) che, nelle ipotesi precedenti, una forma per cui l'azione aggiunta è ortogonale è univocamente determinata a meno di scala.

A questo punto resta da capire il passaggio da gruppi compatti ad algebre di Lie semplici.

Per questo è necessario capire cosa succede complessificando una algebra di Lie reale semplice $\mathfrak{g}$.

In particolare vogliamo capire se è possibile che $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ non sia semplice.

Osserviamo che se partiamo da uno spazio vettoriale reale V e lo complessifichiamo gli elementi di $V_{\mathbb{C}}$ sono del tipo $a + ib,\ a, b \in V$ e abbiamo la coniugazione $\overline{a + ib} := a - ib$ inoltre un sottospazio vettoriale U (su $\mathbb{C}$) di $V_{\mathbb{C}}$ è della forma $W_{\mathbb{C}}$ per W sottospazio reale di V se e solo se $U = \overline{U}$, in questo caso $W = U \cap V$.

Supponiamo dunque che $I \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sia un ideale minimale, per ipotesi proprio e non zero, poichè $I \cap \overline{I}$ e $I + \overline{I}$ sono ideali chiusi per coniugazione si deve avere, dalle osservazioni precedenti, che entrambi sono della forma $W_{\mathbb{C}}$ con W ideale in $\mathfrak{g}$ da cui segue che

$$I \cap \overline{I} = 0,\ I + \overline{I} = \mathfrak{g}$$

inoltre si verifica immediatamente che la composizione $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\overline{I} = I$ è un isomorfismo da cui segue che in realtà $\mathfrak{g}$ ha una struttura di algebra di Lie sui complessi (da cui la struttura reale segue dimenticando i complessi).

Viceversa se partiamo da uno spazio vettoriale U sui complessi possiamo definire lo spazio $\overline{U}$ come U stesso come gruppo mentre l'azione dei complessi è attraverso la coniugazione. Segue facilmente che $U_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$ e se U è una algebra di Lie tale decomposizione è una somma diretta di algebre di Lie. In definitiva abbiamo provato.

TEOREMA. *Data una algebra di Lie reale $\mathfrak{g}$ semplice allora avviene una ed una sola delle due seguenti possibilità.*

(1) *$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ è una algebra semplice.*
(2) *$\mathfrak{g}$ è una algebra complessa, nel qual caso $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus \overline{\mathfrak{g}}$ è una somma diretta di due algebre semplici.*

Se $\mathfrak{g}$ è semplice e algebra di Lie di un gruppo compatto allora $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ è semplice.

DIM. Va solo provato l'ultimo enunciato. Va dunque escluso che $\mathfrak{g}$ sia una algebra complessa. Supponiamo dunque che sia complessa in questo caso abbiamo due possibili forme di Killing, la prima in cui la traccia di $ad(x)^2$ viene presa come operatore reale, mentre nella seconda viene considerato come operatore complesso. Ora data una matrice complessa X la traccia $tr_{\mathbb{R}}(X)$ di X come matrice reale è $2Re(tr_{\mathbb{C}}X)$ (due volte la parte reale della traccia complessa). Ne segue che la forma di Killing reale è due volte la parte reale della forma di Killing complessa.

Una forma simmetrica complessa si può sempre scrivere in una base opportuna come $\sum z_j^2$ e se $z_j = x_j + iy_j$ si ha che $Re(\sum z_j^2) = \sum x_j^2 - y_j^2$ in definitiva la parte reale di una forma complessa non è mai definita anzi ha segnatura nulla, questo esclude che l'algebra di Lie di un gruppo compatto semisemplice sia complessa.

Per continuare è necessario vedere la teoria delle algebre di Lie semisemplici.
Va provato in particolare:

TEOREMA. *Data una algebra di Lie semplice complessa $\mathfrak{g}$ esiste una algebra di Lie semplice compatta $\mathfrak{k}$ (unica a meno di isomorfismo) per cui $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$.*

Per i casi speciali si possono anche esibire in modo esplicito gli isomorfismi.

Possiamo ritornare ai gruppi di omotopia di $SL(m,\mathbb{R})$ introducendo un'altra utile considerazione.

3.7 Decomposizione polare Sia $X \in GL(m,\mathbb{R})$, la matrice XX^t è una matrice simmetrica positiva e quindi esiste una unica matrice simmetrica positiva B con $B^2 = XX^t$.

Ne segue che $1 = (B^{-1}X)(X^tB^{-1}) = (B^{-1}X)(B^{-1}X)^t$ e quindi $C := B^{-1}X \in O(m,\mathbb{R})$ e $X = CB$.

La analisi precedente si inverte facilmente mostrando che C, B sono univocamente determinate. Inoltre $B = e^A$ per una unica matrice simmetrica A finalmente la espressione $X = Ce^A$ è detta *decomposizione polare*.

Indichiamo con $M(n,\mathbb{R})^+$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali.

L'applicazione $(C,A) \to Ce^A$ è un diffeomorfismo fra $O(m,\mathbb{R}) \times M(n,\mathbb{R})^+$ e $GL(m,\mathbb{R})$. Si vede facilmente che, in questo diffeomorfismo, $SO(m,\mathbb{R}) \times M(n,\mathbb{R})^+$ corrisponde alla componente connessa $GL^+(m,\mathbb{R})$ di $GL(m,\mathbb{R})$ formata dalle matrici a determinante positivo mentre $SL(m,\mathbb{R})$ corrisponde a $SO(m,\mathbb{R}) \times M(n,\mathbb{R})^{+,0}$. Avendo indicato con $M(n,\mathbb{R})^{+,0}$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali a traccia nulla.

Possiamo in particolare tornare sul calcolo del gruppo di omotopia di $SL(m,\mathbb{R})$. Poiché ogni spazio vettoriale è contraibile segue che $SL(m,\mathbb{R})$ è omotopicamente equivalente a $SO(m,\mathbb{R})$ di cui abbiamo già calcolato il gruppo di omotopia. Il risultato precedentemente annunciato segue.

È importante considerare la decomposizione polare nel caso complesso, una analoga analisi mostra che:

L'applicazione $(C,A) \to Ce^A$ è un diffeomorfismo fra $U(m,\mathbb{C}) \times M(n,\mathbb{C})^+$ e $GL(m,\mathbb{C})$. $M(n,\mathbb{C})^+$ indica lo spazio delle matrici Hermitiane, di nuovo per $SL(m,\mathbb{C})$ si ha $C \in SU(m,\mathbb{C}),\ tr(A) = 0$.

Altre decomposizioni polari.

Il gruppo $SO(n,\mathbb{C})$ delle matrici ortogonali complesse, provare che per tale gruppo la decomposizione polare è Ce^A con $C \in SO(n,\mathbb{R})$ e A Hermitiana ed antisimmetrica, ovvero $B = iA$ è reale ed antisimmetrica.

Il gruppo simplettico complesso.

Il gruppo $Sp(2n,\mathbb{C})$ è il gruppo delle matrici $2n \times 2n$ complesse che lasciano invariante la forma simplettica (antisimmetrica) x^tJy (x, y due vettori colonna di $\mathbb{C}^{2n}$ e J la matrice diagonale a blocchi $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.) Ovvero le matrici invertibili X per cui $X^tJX = J$.

Il gruppo simplettico complesso è strettamente legato al gruppo quaternionico. Infatti pensiamo ad $\mathbb{H}^n$ come spazio vettoriale (dei vettori colonna ad elementi quaternionici) destro sui quaternioni ed alle matrici quaternioniche come ad operatori $\mathbb{H}$ lineari (rispetto alla moltiplicazione a destra). Identifichiamo $\mathbb{H} = \mathbb{C} + \underline{j}\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^{2n}$. Le matrici quaternioniche sono le matrici complesse che commutano con la moltiplicazione a destra per $\underline{j}$ che è però una trasformazione antilineare rispetto a $\mathbb{C}$ la matrice che la esprime nella base data è la matrice J, quindi la legge di commutazione con una matrice X essendo $\underline{j}$ antilineare si esprime matricialmente dicendo che $XJ = J\overline{X}$. Bisogna interpretare la involuzione quaternionica. Nel nostro linguaggio preservare la forma quaternionica è la stesssa cosa di essere una matrice unitaria $X^t = \overline{X}^{-1}$. Le due condizioni danno che $XJX^t = J$ che è equivalente a $X^tJX = J$ essendo $J^2 = -1$.

In definitiva abbiamo che $Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n, \mathbb{C}) = Sp(n, \mathbb{H})$

Provare che per $Sp(2n, \mathbb{C})$ la forma polare è Ce^{iB} con $C \in Sp(n, \mathbb{H})$ e $B \in M(n, \mathbb{H})$, $\overline{B}^t = -B$.

La decomposizione polare non è solo importante per la topologia, come vedremo gioca un ruolo anche nella teoria delle rappresentazioni.

Mettiamo in evidenza un legame (che si mostrerà del tutto generale).

Abbiamo i tre gruppi lineari algebrici:

$$SL(n, \mathbb{C}),\ SO(n, \mathbb{C}),\ Sp(2n, \mathbb{C})$$

Questi gruppi sono stabili rispetto alla involuzione (automorfismo di ordine 2) $X \to (X^*)^{-1}$.

I punti fissi di tale involuzione sono l'intersezione di tali gruppi con il corrispondente gruppo unitario e sono gruppi compatti:

$$SU(n, \mathbb{C}) = SL(n, \mathbb{C}) \cap U(n, \mathbb{C}),\ SO(n, \mathbb{R}) = \cap U(n, \mathbb{C}),\ Sp(n, \mathbb{H}) = Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n, \mathbb{C})$$

Le algebre di Lie di tali gruppi sono stabili per l'involuzione (automorfismo di ordine 2 di algebre di Lie) $X \to -X^*$.

Detta $\underline{k}$ l'algebra di Lie di ciascuno dei 3 gruppi compatti, $\underline{k}$ è formata di matrici antihermitiane mentre l'algebra di Lie dei corrispondenti gruppi algebrici è

$$\underline{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \underline{k} + i\underline{k}$$

Infine per ciascuno dei 3 gruppi G in questione detto K il corrispondente gruppo compatto si ha un diffeomorfismo $K \times i\underline{k} \to G,\ (x, A) \to xe^A$.

Vedremo che un teorema generale di questo tipo lega i gruppi di Lie compatti con una classe di gruppi algebrici detti *riduttivi*.