1 Introduzione alle rappresentazioni

NOTA Discutiamo i fondamenti della teoria.

In questo capitolo assumeremo, a meno di specificare altrimenti, che gli spazi vettoriali siano complessi e le funzioni continue siano a valori complessi.

1.1 Moduli semisemplici

Abbiamo già accennato al fatto che la teoria delle rappresentazioni dei gruppi può essere vista come una parte della teoria dei moduli sugli anelli (o sulle algebre). Questo dipende dal fatto che, dato un gruppo G ed un anell commutativo A di coefficienti (per esempio il campo complesso) si pù definire un'algebra $A[G]$ che è il modulo libero su A con base gli elementi del gruppo G, quindi i suoi elementi sono combinazioni formali:

$$A[G] := \{\sum_{g\in G} a_g g, \quad g \in G\}. \tag{1.1.1}$$

Nella teoria algebrica si assume che tutti gli a_g eccetto al più un numero finito siano 0. La moltiplicazione si effettua moltiplicando gli elementi della base quindi:

$$(\sum_{g\in G} a_g g)(\sum_{h\in G} b_h h) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h gh = \sum_{g\in G}(\sum_{xy=g} a_x b_y)g. \tag{1.1.2}$$

Questo prodotto è anche detto *convoluzione.* Nella teoria analitica in cui G è un gruppo topologico vi è una misura invariante su G e le funzioni a_g si supporranno L^1, la somma si trasforma in un integrale.

Restando nella teoria algebrica abbiamo il fatto fondamentale:

Osservazione. *Dare una rappresentazione lineare di un gruppo G su uno spazio vettoriale su un campo K è equivalente a dare un $K[G]$ modulo.*

Dim. Infatti dare un modulo V su $K[G]$ vuol dire dare uno spazio vettoriale su K e moltiplicazioni $(\sum_{g\in G} a_g g)v = \sum_{g\in G} a_g gv$, le proprietà formali dei moduli coincidonoi con quella delle rappresentazioni. Un morfismo $G-$equivariante di moduli è un morfismo di $K[G]$ moduli. Le nozioni di sottomodulo, quoziente somma diretta seguono in modo analogo.

□

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Definizione. *Una rappresentazione o un modulo M si dice:*
irriducibile *se M non possiede sottomoduli non banali.*
Completamente riducibile (o **semisemplice***) se si può decomporre come somma diretta di rappresentazioni irriducibili (anche in numero infinito).*

All'opposto si dice **indecomponibile** *se non si può spezzare come somma diretta di due sottomoduli.*

Ovviamente irriducibile implica indecomponibile.
Il più semplice esempio di rappresentazione indecomponibile ma non irriducibile è la rappresentazione del gruppo additivo come matrici 2×2 della forma $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Vi è un caso molto importante in cui siamo sicuri che una rappresentazione M di un gruppo G è completamente riducibile, legata all'aggiunzione negli spazi di Hilbert.
Ricordiamo che g^* è definito dall'aggiunzione $(u, gv) = (g^*u, v)$ e che in una base ortonormale, la matrice $g^* = \overline{g}^t$.

Teorema. *Se M è di dimensione finita e ammette una struttura di spazio di Hilbert per cui il gruppo degli operatori indotti da G è autoaggiunto, ovvero $G = G^*$, dove $G^* = \{g^* \mid g \in G\}$, allora M è somma diretta di rappresentazioni irriducibili fra loro ortogonali.*
(Per esempio se G è un gruppo di operatori unitari).

Dim. Infatti in questo caso, se $N \subset M$ è un sottomodulo per G si vede subito che il suo ortogonale $N^\perp$ è ancora un $G-$sottomodulo.

Se partiamo da un sottomodulo N di dimensione minima abbiamo che N è irriducibile e $M = N \oplus N^\perp$ somma ortogonale.

G induce un gruppo autoaggiunto in $N^\perp$ e si può continuare a decomporre.

Il caso più importante per noi è quello di una rappresentazione continua di un gruppo compatto K. Proveremo che una tale rappresentazione è sempre unitaria in una opportuna struttura Hilbertiana (ovvero è unitarizzabile) e quindi è completamente riducibile. □

Vi è una teoria algebrica della semisemplicità che vogliamo illustrare, il teorema è molto astratto e per provarlo nella massima generalità è necessario l'uso dell'assioma della scelta, ad esempio nella forma del *lemma di Zorn.*

Il lemma di Zorn, equivalente all'assioma della scelta, si formula nel modo seguente. Ricordiamo che:

Definizione. *Un insieme parzialmente ordinato Z si dice totalmente ordinato se, dati comunque $a, b \in Z$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$.*
Un insieme parzialmente ordinato Z si dice filtrante se, dato comunque un sottoinsieme $Y \subset Z$ totalmente ordinato esistte un $z \in Z$ con $y \leq z$, $\forall y \in Y$.
Un elemento $x \in Z$ si dice massimale se dato $y \in Z$ con $x \leq y$ si ha $x = y$.

Lemma di Zorn. *Se Z è un inseme parzialmente ordinato filtrante allora Z possiede un elemento massimale.*[1]

Teorema. *Per un modulo M le seguenti asserzioni sono equivalenti:*
i) M è somma diretta di moduli irriducibili.
ii) M è somma di moduli irriducibili.
iii) Dato comunque un sottomodulo P di M esiste un sottomodulo Q con $M = P \oplus Q$.

Un modulo che soddisfa le precedenti proprietà si dice semisemplice.

Dim. i) implica ii) banalmente.

i) $\implies$ ii) Supponiamo di avere un modulo M che sia somma di sottomoduli irriducibili, per semplicità di notazione supponiamo che sia somma numerabile $M = M_1+M_2+M_3+\dots$ (altrimenti dobbiamo fare induzione trasfinita). Vogliamo provare che da tale somma si può estrarre una somma diretta, infatti basta ragionare per induzione, se $i_1, \dots, i_k \leq m$ sono indici per cui i moduli $M_{i_1}, \dots, M_{i_k}$ formano somma diretta e $M_{i_1} \oplus M_{i_2} \cdots \oplus M_{i_k} = M_1 + M_2 + \dots M_m$ si passa a vedere $M_{i_1} \oplus M_{i_2} \cdots \oplus M_{i_k} \cap M_{m+1}$. Data la irriducibilità di M_{m_1} o $M_{i_1} \oplus M_{i_2} \cdots \oplus M_{i_k} \cap M_{m+1} = 0$ e poniamo $i_{k+1} = m_1$ e $M_{i_1} \oplus M_{i_2} \cdots \oplus M_{i_k} \oplus M_{m+1} = M_1 + M_2 + \dots M_m + M_{m+1}$ oppure $M_{m+1} \subset M_{m_1}$ e $M_{i_1} \oplus M_{i_2} \cdots \oplus M_{i_k} = M_1 + M_2 + \dots M_m + M_{m_1}$ e si passa al successivo.

i) $\implies$ iii) Sia P un sottomodulo di M procedendo nello stesso modo di prima si può estrarre dalla successione dei moduli M_i una sottosuccessione di moduli irriducibili N'_j tali che:

$$M = P \oplus N'_1 \oplus N'_2 \oplus N'_3 \oplus \dots$$

ovvero posto $P' := N'_1 \oplus N'_2 \oplus N'_3 \oplus \dots$ si ha $M = P \oplus P'$ ovvero P' è complementare a P in M ed è somma diretta di irriducibili.

iii) $\implies$ i) consideriamo le famiglie N_α di sottomoduli irriducibili di M che formano somma diretta e si verifica che rispetto alla inclusione è filtrante, esiste dunque una famiglia massimale che forma una somma diretta.[2] Sia $P = \oplus_\alpha N_\alpha$, se per assurdo $P \neq M$ esiste un $m \in M$ e $m \notin P$. Sia $\mathcal{N} := \{N\}$ la famiglia dei sottomoduli N di M con $P \subset N$, $m \notin N$ chiaramente questa famiglia è filtrante e quindi esiste un elemento massimale R. Sia $M = R \oplus Q$, affermo che Q è irriducibile, infatti supponiamo che esista un sottomodulo Q' di Q allora sempre per iii) possiamo decomporre $M = (P \oplus Q') \oplus Q$". Per massimalità $m \in P \oplus Q'$ e $m \in P \oplus Q$" da cui $m \in P \oplus Q' \cap P \oplus Q" = P$ una contraddizione. $\square$

Proposizione. *Un sottomodulo ed un quoziente di un modulo semisemplice sono semisemplici.*

Una somma diretta di moduli semisemplici è semisemplice.

---

[1] l'idea della dimostrazione è la seguente, si parte da un elemento se è massimale si finisce se no se ne trova uno maggiore, si continua all'infinito, si usa la proprietà filtrante per procedere per ordinali trasfiniti fino a che ci si ferma ad un elemento massimale.

[2] fino a qui l'argomento è quasi vuoto, potrebbe essere che una famiglia massimale è vuota!

Dim. L'immagine al quoziente di un sottomodulo irriducibile è 0 o irriducibile quindi un quoziente M/P è somma di irriducibili. Ma da iii) esiste P' con $M = P \oplus P'$ e $P \cong M/P'$ e quindi anche ogni sottomodulo di M è somma di irriducibili.

Per una somma diretta l'enunciato è ovvio. $\square$

Definizione. *Un modulo semisemplice M si dice isotipico se è somma diretta di irriducibili tutti isomorfi fra di loro.*

Dato un irriducibile N la **componente isotipica di tipo** N **in** M *è la somma di tutti i sottomoduli irriducibili di M isomorfi ad N.*

In altre parole si ha:

Teorema. *Un modulo semisemplice M si decompone in modo unico in somma diretta di moduli isotipici, tali moduli dette componenti isotipiche sono la somma di tutti i sottomoduli irriducibili di M isomorfi ad un irriducibile dato.*

Dim. Avendo decomposto $M = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus \dots$ in somma diretta di irriducibili abbiamo le varie proiezioni sui fattori N_i. Supponiamo che $N \subset M$ sia un arbitrario sottomodulo irriducibile, restringendo ad N ogni proiezione su un fattore N_i abbiamo un morfismo fra irriducibili che è nullo se N_i non è isomorfo ad N. Segue che N è contenuto nella somma degli addendi N_i che sono isomorfi ad N. Pertanto tale somma diretta è anche la somma di tutti i sottomoduli isomorfi ad N questa somma si chiama componente isotipica di tipo N. La analisi precedente prova che M è somma diretta delle sue componenti isotipiche e una componente isotipica di tipo N è somma diretta di copie di N.

Una ultima osservazione dato un morfismo fra due moduli semisemplici $f : M \to P$ per ogni irriducibile N_α il morfismo f manda la componente isotipica $M(\alpha)$ somma di irriducibili isomorfi ad N_α nella corrispondente componente isotipica $P(\alpha)$. $\square$

Vi è un caso speciale della proposizione precedente che è utile esplicitare.

Proposizione. *i) Se $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k$ è somma diretta di moduli irriducibili a due a due non isomorfi e $p = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in M$ con $n_i \neq 0$ per ogni i allora il sottomodulo generato da p è M.*

ii) Se $M = \oplus_{i \in I} N_i$ è somma diretta di moduli irriducibili a due a due non isomorfi allora i sottomoduli di M sono tutti e soli i moduli $M_J = \oplus_{i \in J} N_i,\ J \subset I$ al variare di J nei sottoinsiemi di I.

Dim. Sia $P \subset M$ un sottomodulo, dal teorema precedente P è somma di componenti isotipiche e tali componenti sono contenute nelle componenti isotipiche di M che, per ipotesi, sono i moduli N_i.

Pertanto ii) è provato da cui segue anche i). $\square$

Lo spazio dei morfismi $G-$lineari fra due rappresentazioni irriducibili è particolarmente semplice:

Lemma di Schur. *Date due rappresentazioni irriducibili V, W se V, W non sono isomorfe allora $Hom_G(V, W) = 0$.*

Per $V = W$ si ha che $Hom_G(V, V)$ è formato dai soli scalari.

Dim. Sia $T : V \to W$ una applicazione $G-$lineare. Il suo nucleo è evidentemente un sottomodulo di V mentre la sua immagine è un sottomodulo di W la prima parte segue immediatamente.

Sia ora $T : V \to V$ sempre $G-$lineare, sia α un autovalore di T e sia V_α il sottospazio di V (non nullo per costruzione) degli autovettori di autovalore α.

Si ha allora che se $v \in V_\alpha$ e $g \in G$, $T(gv) = gTv = \alpha gv$ e quindi V_α è un sottomodulo. Per la irriducibilità di V si ha $V = V_\alpha$ ovvero T è lo scalare α. $\square$

Corollario. *Sia V una rappresentazione irriducibile di G ed unitaria rispetto ad un prodotto Hilbertiano (u, v).*

Se $\langle u, v\rangle$ è un secondo prodotto Hilbertiano per cui la rappresentazione è unitaria si ha che $(u, v) = c\langle u, v\rangle$ per una costante reale positiva c.

Dim. Infatti si ha sempre $(Tu, v) = \langle u, v\rangle$ per un operatore Hermitiano T, ma l'ipotesi di unitarietà implica che T commuta con G per cui, dal Lemma di Schur T è uno scalare, necessariamente reale positivo. $\square$

Teorema di Wedderburn. *Sia $A \subset End(V)$ una $\mathbb{C}-$algebra di operatori su uno spazio vettoriale V di dimensione finita su $\mathbb{C}$. V è irriducibile come A modulo se e solo se $A = End(V)$.*

Dim. Che V sia irriducibile come $End(V)$ modulo è sostanzialmente evidente. Sia V irriducibile come A modulo, fissiamo una base $e_1, \dots, e_n$ di V. Bisogna verificare che, comunque dati vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ esiste un $a \in A$ con $ae_i = v_i$, $\forall i$.

In $V^{\oplus n}$ consideriamo il sottomodulo $P := A(e_1, \dots, e_n) := \{(ae_1, ae_2, \dots, ae_n)\}$, dobbiamo dimostrare che $P = V^{\oplus n}$. Altrimenti esiste una decomposizione $V^{\oplus n} = P \oplus Q$ con $Q \neq 0$ un altro $A-$sottomodulo. Esiste quindi una proiezione $A-$lineare di $V^{\oplus n}$ su Q che si annulla su P. Componendo con almeno una delle proiezioni sui vari fattori V otteniamo una applicazione $A-$lineare non nulla di $T : V^{\oplus n} \to T$ su V che si annulla su P. Restringendo T ad ogni addendo V si ha che, dal Lemma di Schur ogni tale restrizione è uno scalare α_i e quindi $T(v_1, \dots, v_n) = \sum_i \alpha_i v_i$. Per ipotesi $TP = 0$ e quindi $\sum_i \alpha_i e_i = 0$ questo è assurdo a meno che tutti gli α_i non siano 0 e quindi $T = 0$. $\square$

Corollario. *Siano V, W due rappresentazioni irriducibili di dimensione finita su $\mathbb{C}$ di due gruppi G, K allora $V \otimes W$ è una rappresentazione irriducibile di $G \times K$.*

Dim. Basta far vedere che ogni elemento non nullo di $V \otimes W$ genera $V \otimes W$ come $G \times K$ modulo. Presa una base e_i di V ed un elemento $\sum e_i \otimes w_i$ non nullo sia M il sottomodulo che esso genera, almeno un w_i è non nullo, per esempio w_1 dal Teorema di Wedderburn l'algebra generata dagli operatori di G sono tutte le matrici pertanto esiste un operatore A in quell'algebra che manda e_1 in un e_j a piacere e gli altri elemeti della base in 0. Pertanto

$A \otimes 1(\sum e_i \otimes w_i) = e_j \otimes w_i \in M$. Nello stesso modo, presa una base f_i di W possiamo trovare un operatore B generato dagli elementi di K per cui $1 \otimes B(e_j \otimes w_i) = e_j \otimes f_i \in M$ per ogni j, i. $\square$

1.2 Teorema del doppio centralizzatore

Se $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$, $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_h$ sono due moduli decomposti in somma diretta e $T : M \to N$ è un omomorfismo possiamo scrivere in modo unico:

$$T(m_1, m_2, \ldots, m_k) = (\sum_{j=1}^{k} T_{1j}(m_j), \sum_{j=1}^{k} T_{2j}(m_j), \ldots, \sum_{j=1}^{k} T_{kj}(m_j). \tag{1.2.1}$$

Dove $T_{ij} : M_j \to N_i$ è un omomorfismo. Questa è la *rappresentazione a blocchi degli omomorfismi.*

Possiamo pensare ai T_{ij} come agli elementi di una matrice a blocchi. La composizione di omomorfismi scritti a blocchi si effettua moltiplicando le matrici (utilizzando la composizione di omomorfismi). In particolare se i moduli M_i, N_j sono irriducibili non isomorfi la componente T_{ij} è 0, se sono entrambi coincidenti con un dato modulo irriducibile N dal lemma di Schur la componente T_{ij} è uno scalare.

Sia M uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$ e un modulo semisemplice su un'algebra A. Decomponiamo $M = \oplus_{i=1}^{k} M_i$ in componenti isotipiche e sia $M_i = N_i^{\oplus k_i}$ dalla analisi precedente otteniamo:

Teorema.

$$End_A(M) = \oplus_{i=1}^{k} End_A(M_i) = \oplus_{i=1}^{k} M_{k_i}(\mathbb{C}). \tag{1.2.2}$$

$M_i = N_i^{\oplus k_i}$ *come* $M_{k_i}(\mathbb{C})$ *modulo è somma diretta di* $\dim N_i$ *copie del modulo irriducibile* $\mathbb{C}^{k_i}$.

Dim. Fissata una base $v_1, \ldots, v_{h_i}$ di N_i lo spazio $M_i = N_i^{\oplus k_i}$ si decompone come somma diretta degli spazi $P_i := \mathbb{C}v_j^{\oplus k_i}$, $j = 1, \ldots, h_i$ ciascuno di questi è modulo irriducibile per $End(M_i) = M_{k_i}(\mathbb{C})$ $\square$

Nelle ipotesi precedenti supponiamo inoltre $A \subset End(M)$ e sia $B := End_A(M)$ si ha:

Teorema del doppio centralizzatore. *M è semisemplice per B. Le componenti isotipiche di M rispetto ad A sono anche isotipiche rispetto a B e:*

$$End_B(M) = A. \tag{1.2.3}$$

Dim. È chiaro che M è semisemplice per B e che le M_i sono le sue componenti isotipiche. Abbiamo inoltre che $A \subset End_B(M) = \oplus_{i=1}^{k} End_B(M_i) = \oplus_{i=1}^{k} M_{h_i}(\mathbb{C})$. dal teorema di

Wedderburn segue che la proiezione di A su ogni fattore $M_{h_i}(\mathbb{C})$ è suriettiva. Segue che $M_{h_i}(\mathbb{C})$ come A modulo è semisemplice e quindi A come modulo sinistro su se stesso è semisemplice essendo un sottomodulo di una somma diretta di moduli semisemplici. Ora le sue componenti isotipiche sono necessariamente i blocchi $M_{h_i}(\mathbb{C})$, quindi $A = \oplus_{i=1}^{k} M_{h_i}(\mathbb{C})$. $\square$

1.3 Rappresentazioni reali

OSSERVAZIONE Se ci mettiamo nelle ipotesi di studiare rappresentazioni reali e non complesse il Lemma di Schur si modifica. L'enunciato generale del Lemma di Schur è:

Lemma di Schur-forma astratta. *Se M è un modulo irriducibile su un anello A (o su un gruppo), l'algebra dei suoi endomorfismi $End_A(M)$, è un corpo.*

Dim. Sia $a \in End_A(M),\ a \neq 0$. Poiché a è un endomorfismo non nullo abbiamo necessariamente $\ker(a) \neq M,\ Im(a) \neq 0$, poiché entrambi sono sottomoduli ed M è irriducibile deve essere $\ker(a) = 0,\ Im(a) = M$ pertanto a è un isomorfismo ed $a^{-1} \in End_A(M)$ ovvero ogni elemento non nullo di $End_A(M)$ è invertibile. Questa è la definizione di corpo. $\square$

Per rappresentazioni di dimensione finita su $\mathbb{R}$ questo corpo ha necessariamente dimensione finita su $\mathbb{R}$. Vi è un Teorema classico di Frobenius che implica che tale corpo sia necessariamente uno dei seguenti 3:

$$\mathbb{R} \quad \textit{numeri reali}, \qquad \mathbb{C} \quad \textit{numeri complessi}, \qquad \mathbb{H} \quad \textit{quaternioni}.$$

Non è difficile provare il seguente:

ESERCIZIO Se M è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ed un $G-$modulo si ha che:

$$End_G(M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = End_G(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \qquad \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = M_2(\mathbb{C}).$$

Ne segue che, se M è irriducibile come $G-$modulo (e come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$), si ha che $M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è irriducibile come $G-$modulo (e come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$), se e solo se $End_G(M) = \mathbb{R}$. Altrimenti $M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni $M_1 \oplus M_2$.

M_1 ed M_2 sono isomorfe se e solo se $End_G(M) = \mathbb{H}$, in quanto se $M_1 \equiv M_2 = M$ si ha $End_G(M \oplus M) = M_2(\mathbb{C})$ altrimenti $End_G(M_1 \oplus M_2) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Nel caso in cui $M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni $M_1 \oplus M_2$ possiamo dire di più. Consideriamo la composizione della inclusione di M in $M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ con la proiezione su uno degli addendi M_1 ovvero M_2, per irriducibilità abbiamo una inclusione, ad esempio $M \subset M_1$.

Chiaramente $iM \subset M_1$ è una rappresentazione irriducibile di G (su $\mathbb{R}$) isomorfa sempre su $\mathbb{R}$ ad M per moltiplicazione per i. Segue che $M \cap iM$ è o 0 oppure M.

Se $M \cap iM = 0$ si ha che $M_1 = M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ quindi nel caso in considerazione dobbiamo avere $M = iM$ è un sottospazio complesso ed un sottomodulo, infine $M = M_1$. In definitiva

M_1 come spazio vettoriale reale coincide con M ma in più ha una struttura complessa, lo stesso avviene su M_2 che ha la struttura complessa coniugata di M_1.

ESEMPI

Studiare la rappresentazione di $SU(n)$ su $\mathbb{C}^n$ pensato come spazio vettoriale reale. Idem per $SO(n)$.

2 Analisi funzionale

2.1 Spazi di Hilbert e di Banach

Premettiamo alcuni aspetti di analisi funzionale.

Definizione. *Una* **norma** *su uno spazio vettoriale complesso (o reale) V è una funzione $V \to \mathbb{R}$, $\quad v \to |v|$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

i) $|av| = |a||v|, \ \forall a \in \mathbb{C}, v \in V$.

ii) $|v + w| \leq |v| + |w|, \ \forall, v, w \in V$.

iii) $|v| = 0 \iff v = 0$.

Uno spazio con una norma è detto **spazio normato**.

Data una norma su V lo spazio V diviene uno spazio metrico con distanza $|v - w|$ gli assiomi implicano le proprietà della metrica ed inoltre che la somma ed il prodotto per gli scalari sono funzioni continue.

Caso particolare si ha:

Definizone. *Un prodotto scalare Hilbertiano su uno spazio complesso è una funzione $(v, w) \in \mathbb{C}$ lineare in v antilineare in w con:*

$$(v, w) = \overline{(w, v)}, \quad (v, v) \geq 0 \ \forall v, \quad (v, v) = 0 \iff v = 0.$$

La norma associata è $|v| := \sqrt{(v, v)}$.

Uno spazio con un prodotto Hilbertiano e completo per la norma associata è uno spazio di Hilbert.

Esempio fondamentale è lo spazio delle funzioni L^2 su uno spazio con una misura. La diseguaglianza fondamentale per un prodotto Hilbertiano è la:

Teorema Disuguaglianza di Schwarz. *Dati $u, v \in H$ si ha:*

$$|(u, v)| \leq |u||v|$$

Dim. Si usa il fatto che, per λ reale $0 \leq |u + \lambda(u, v)v|^2 = |u|^2 + 2\lambda|(u, v)|^2 + \lambda^2|u|^2$ implica (il discriminante dell'equazione di secondo grado negativo):

$$4|(u, v)|^4 - 4|u|^2|u|^2 \leq 0, \implies |(u, v)| \leq |u||v|.$$

□

Nella nostra trattazione ci limiteremo a *spazi di Hilbert separabili* ovvero in cui esiste un insieme denso numerabile.

Se $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ è una successione di vettori densa, possiamo applicare ad essa induttivamente il procedimento di ortonormalizzazione di Gram Schmidt, otteniamo una successione ortonormale di vettori u_i.

Lemma. *Un vettore v ortogonale a tutti gli u_i è nullo.*

Ogni vettore $v \in H$ si scrive in modo unico come $\sum_{i=1}^{\infty}(v, u_i)u_i$ con

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(v, u_i)|^2, \quad \textit{identità di Parseval} \tag{2.1.1}$$

Dim. Per costruzione se v è ortogonale a tutti gli u_i è anche ortogonale a tutti i v_i che sono densi quindi $v = 0$.

Osserviamo che:

$$(v - \sum_{i=1}^{n}(v, u_i)u_i, \sum_{i=1}^{n}(v, u_i)u_i) = \sum_{i=1}^{n} |(v, u_i)|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(v, u_i)|^2 = 0$$

pertanto

$$|v|^2 = |v - \sum_{i=1}^{n}(v, u_i)u_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |(v, u_i)|^2$$

da cui segue che $\sum_{i=1}^{\infty}(v, u_i)u_i$ converge in media ad un vettore w di norma $\sum_{i=1}^{\infty} |(v, u_i)|^2$. Abbiamo inoltre $(v, u_i) = (w, u_i), \ \forall i$ da cui $v = w$. □

OSSERVAZIONE Dalla identità di Parseval $|v|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(v, u_i)|^2$ si ottiene sia che $|v|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |(v, u_i)|^2$ e dato $\epsilon > 0$ esiste n con $\sum_{i=n}^{\infty} |(v, u_i)|^2 < \epsilon$ *diseguaglianze di Bessel.*

Se H è uno spazio di Hilbert un sottospazio K chiuso è ancora uno spazio di Hilbert detto sottospazio di Hilbert. L'ortogonale $K^{\perp} := \{v \in H \mid (v, u) = 0, \ \forall u \in K\}$ è anche un sottospazio ed abbiamo:

Proposizione. $H = K \oplus K^{\perp}$.

Dim. Sia u_i una base ortonormale di K, per il procedimento di Gram Schmidt possiamo completarla ad una base ortonormale di H con una altra sequenza v_i ogni elemento di $v \in H$ si scrive dunque in modo unico come $\sum_i (v, u_i)u_i + \sum_j (v, v_j)v_j$. □

2.2 Operatori limitati

Definizione. *Un operatore lineare* $T : V \to W$ *fra due spazi di Banach si dice* **limitato** *se esiste una costante* $0 \leq K < \infty$ *con* $|T(v)| \leq K|v|, \ \forall v \in V$.

Il minimo fra tali costanti è per definizione la norma $|T|$ *di* T.

OSSERVAZIONE:

$$|T| = \sup_{|v|=1} |T(v)|$$

Un caso particolare di operatore limitato è un funzionale lineare $f : V \to \mathbb{C}$ continuo.

La teoria generale di tali funzionali è la teoria della dualità negli spazi di Banach. Il solo caso che utilizzeremo è molto semplice, per uno spazio di Hilbert vale:

Teorema di Riesz. *Un funzionale lineare* $f : H \to \mathbb{C}$ *continuo dove* H *è uno spazio di Hilbert è rappresentato da un vettore* $w \in H$ *per cui* $f(v) = (v, w)$.

Dim. Possiamo ovviamente assumere $f \neq 0$. Sia K il nucleo di f che è un sottospazio di Hilbert, $H = K \oplus K^\perp$ e f ristretto a $K^\perp$ non ha nucleo, questo implica immediatamente che $K^\perp$ è 1-dimensionale. Sia dunque $w_0 \in K^\perp$ con $f(w_0) = 1$ e sia $c := (w_0, w_0)$ si ha allora per $w := c^{-1}w_0$, che:

$$(w, w) = c^{-2}(w_0, w_0) = c^{-1}, \quad f(w) = c^{-1}, \implies f(k+\alpha w) = \alpha(w, w) = (k+\alpha w, w), \, \forall k \in K$$

$\square$

Definizione. *In uno spazio di Hilbert* H *un operatore lineare* T *si dice Hermitiano se* $(Tu, v) = (u, Tv), \ \forall u, v \in H$.

La proprietà principale di un operatore Hermitiano è la seguente:

Proposizione. *Dato un operatore lineare Hermitiano* T *su uno spazio di Hilbert* H *ed un sottospazio* K *preservato da* T *anche* $K^\perp$ *è preservato da* T.

Dim. Se $u \in K^\perp, \ v \in K$ si ha $(Tu, v) = (u, Tv) = 0$ poiché $Tv \in K$. $\square$

Negli spazi di Hilbert si possono studiare varie forme di convergenza noi useremo solo la *convergenza in media* ovvero la convergenza rispetto alla struttura di spazio metrico data dalla norma. Scriveremo usualmente $\lim_i v_i = w$ per tale convergenza.

Un operatore limitato T su uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ si dice *completamente continuo (a volte compatto)* se trasforma insiemi limitati in insiemi relativamente compatti. In altre parole se vale la seguente:

Proprietà di completa continuità Data comunque una successione $v_i \in H$ con $|v_i| = 1$ da questa se ne può estrarre una per cui $\lim_i T(v_i)$ esiste (in media).

Lemma. *Se* T *è limitato ed Hermitiano si ha:*

$$|T| = \sup_{|v|=1} |(T(v), v)|. \tag{2.2.1}$$

Dim. Dalla diseguaglianza di Schwarz si ha se $|v| = 1$ che $|(T(v), v)| \leq |T(v)|$. Quindi $\mu := \sup_{|v|=1} |(T(v), v)| \leq |T(v)|$. Viceversa sia $|v| = 1$ e $T(v) \neq 0$ poniamo $w := T(v)|T(v)|^{-1}$ in modo che $|w| = 1$ ed inoltre $(T(v), w) = |T(v)|$ per hermitianità $(T(v), w) = (v, T(w))$:

$$(T(v + w), v + w) = (T(v), v) + 2|T(v)| + (T(w), w),$$

$$(T(v - w), v - w) = (T(v), v) - 2|T(v)| + (T(w), w),$$

da cui:

$$4|T(v)| = (T(v + w), v + w) - (T(v - w), v - w) \leq$$

$$\leq \mu(v + w, v + w) + \mu(v - w, v - w) = 4\mu$$

$\square$

2.3 Teoria di Fredholm La chiave dello studio degli operatori compatti è il seguente:

Lemma. *Sia T un operatore Hermitiano completamente continuo su uno spazio di Hilbert H. Esiste un autovettore v di T con $|v| = 1$ e autovalore μ con $|\mu| = |T|$.*

Dim. Sia v_i una successione di vettori di modulo 1 per cui $|T| = \lim_i |(T(v_i), v_i)|$. Dalla ipotesi di compattezza possiamo (passando ad una sottosuccessione) supporre che la successione $T(v_i)$ ha un limite v, evidentemente $|T| = |(T(v), v)|,\ |v| = 1$. Sia $\mu := (T(v), v)$ proviamo che v è un autovettore di T di autovalore $\overline{\mu}$. Per questo calcoliamo:

$$0 \leq |T(v) - \overline{\mu}v|^2 = (T(v), T(v)) - |\mu|^2 \geq 0$$

in quanto $|T(v)| \leq |\mu|$. Quindi $T(v) - \overline{\mu}v = 0$ $\square$

Teorema. *Sia T un operatore Hermitiano compatto su uno spazio di Hilbert H. Sia H_0 il suo nucleo e $K := H_0^{\perp}$.*

i) K è T stabile ed ha una base ortonormale di autovettori $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ di autovalori $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$.

ii) Si ha $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots \geq |\mu_n| \geq \ldots$.

iii) $\lim_{i\to\infty} \mu_i = 0$.

iv) Detto H_k lo spazio ortognoale allo spazio generato dai $v_1, \ldots, v_{k-1}$ e T_k l'operatore T ristretto ad H_k si ha $|T_k| = |\mu_k|$.

Dim. Definiamo induttivamente i v_i come segue v_1 è un autovettore di T di autovalore μ_1 con $|\mu_1| = |T|$. Costruiti $v_1, \ldots, v_{k-1}$ sia H_k lo spazio ortognoale allo spazio H^k generato dai $v_1, \ldots, v_{k-1}$ poichè T trasforma H^k in se lo stesso avviene per H_k (poiché è Hermitiano). Detto dunque T_k l'operatore ristretto ad H_k possiamo trovare $v_k \in H_k$ autovettore di T_k con autovalore μ_k e $|T_k| = |\mu_k|$. Poiché $H_k \subset H_{k-1}$ si ha $|\mu_k| = |T_k| \leq |T_{k-1}| \leq |\mu_{k-1}|$.

Proviamo che $\lim_{i\to\infty} \mu_i = 0$. Per compattezza esiste una sottosuccessione v_{i_k} dei v_i per cui $T(v_{i_k})$ è convergente a qualche vettore w di modulo $\lim_k |\mu_{i_k}|$, da cui:

$$(w, w) = (\lim_k v_{i_k}, \lim_k v_{i_{k-1}}) = \lim_k (v_{i_k}, v_{i_{k-1}}) = 0, \implies \lim_{i\to\infty} |\mu_i| = 0.$$

Se K è lo spazio generato dai v_i e $K^\perp$ il suo ortogonale abbiamo che T preserva $K^\perp$ ma la norma di T ritretto a $K^\perp$ è $\leq |\mu_i|$ per ogni i quindi $T = 0$ su $K^\perp$. Su K invece abbiamo chiaramente che T ha nucleo 0 perché $T(\sum_i \alpha_i v_i) = \sum_i \mu_i \alpha_i v_i$. $\square$

In altre parole se T è Hermitiano e completamente continuo la sua decomposizione spettrale è data dalla (Teoria di Fredholm's) che interpreta il Teorema precedente come:

Gli autovalori non nulli formano un insieme discreto $\hat{T}$ convergente a 0 ogni autovalore non nullo λ ha un autospazio $\mathbb{H}_\lambda$ di dimensione finita.

Lo spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ ha la decomposizione $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 \overline{\oplus}_{\lambda\in\hat{T}} \mathbb{H}_\lambda$ i.e. tali sottospazi sono ortogonali ed ogni vettore in $\mathbb{H}$ è una serie convergente formata da vettori in tali sottospazi.

2.4 Esempi di trasformazioni completamente continue

Per avere degli esempi è bene prima di tutto mostrare qualche proprietà:

Teorema. *i) Se T_1, T_2 sono trasformazioni completamente continue lo è anche T_1, T_2.*

ii) Se T è completamente continua e V è un operatore lineare limitato TV, VT sono completamente continue.

iii) Se $T = \lim_i T_i$ (nella norma degli operatori) e le T_i sono trasformazioni completamente continue lo è anche T.

iv) Un operatore lineare limitato T con immagine un sottospazio di dimensione finita è completamente continuo.

Dim. L'unica parte che richiede un minimo di dimostrazione è iii). Sia dunque $v_1, \ldots, v_n, \ldots$ una successione di vettori di norma 1. Possiamo estrarne induttivamente sottosuccessioni $S_j := \{v_{i,j}\}$ per cui $\lim_j T_i(v_{i,j})$ esiste. Prendiamo la sottosuccessione diagonale $v_{i,i}$ e mostriamo che $T(v_{i,i})$ è una successione di Cauchy, dato $\epsilon > 0$:

$$|T(v_{i,i}) - T(v_{h,h})| \leq |T(v_{i,i}) - T_j(v_{i,i})| + |T_j(v_{i,i}) - T_j(v_{h,h})| + |T_j(v_{h,h}) - T(v_{h,h})|$$

se $|T - T_j| < \epsilon$ e $i, h >> 0$ per cui $|T_j(v_{i,i}) - T_j(v_{h,h})| < \epsilon$ abbiamo $|T(v_{i,i}) - T(v_{h,h})| < 3\epsilon$. $\square$

Un operatore lineare limitato T con immagine un sottospazio di dimensione finita è anchge detto *operatore di rango finito*.

In particolare abbiamo dunque:

Corollario. *Se $T = \lim_i T_i$ (nella norma degli operatori) e le T_i sono operatori di rango finito T è completamente continuo.*

Uno degli esempi principali di operatore compatto è un operatore sullo spazio delle funzioni L^2 su uno spazio misurabile X e con nucleo integrale $K(x,y)$ esso stesso in L^2. Per il teorema di Fubini l'integrale $\int_X |K(x,y)|^2 dy$ esiste per quasi tutti gli x e:

$$\int_X \int_X |K(x,y)|^2 dy dx = |K|^2.$$

La funzione $k(x) := (\int_X |K(x,y)|^2 dy)^{1/2}$ è dunque in L^2 di modulo $|K|$. Più in generale per una funzione $f \in L^2$ poniamo:

$$T_K(f)(x) := \int_X K(x,y) f(y) d\, y.$$

Teorema. *Questa funzione è ben definita per tutti i valori per cui $k(x)$ è ben definita ed è in L^2.*

L'operatore T_K definito dal nucleo integrale $K(x,y)$ ha norma come operatore $\leq |K|$ (norma L^2).

Dim. Infatti, per la disuguaglianza di Schwarz:

$$|T_K(f)(x)|^2 = |\int_X K(x,y) f(y) d\, y|^2 \leq \int_X |K(x,y)|^2 d\, y \int_X |f(y)|^2 d\, y = k(x)^2 |f|^2.$$

Pertanto $T(f)(x)$ è in L^2 (per il teorema di Fubini). Ora calcoliamo la norma di T:

$$|T_K(f)|^2 = \int_X |\int_X K(x,y) f(y) d\, y|^2 d\, x \leq \int_X |\int_X k(x)^2 |f|^2 d\, x = |K|^2 |f|^2. \tag{2.4.1}$$

□

Un esempio particolare si ha quando $K(x,y) = \sum_{i=1}^m f_i(x) g_i(y)$ in questo caso evidentemente l'immagine di T_K è lo spazio generato dalle funzioni f_i e quindi T_K ha rango finito.

Teorema. *Sia $u_i(x)$, $i = 1, \ldots, \infty$ una base ortonormale di $L^2(X)$.*

i) Le funzioni $u_i(x) u_j(y)$ sono una base ortonormale di $L^2(X \times X)$.

ii) Sia $K(x,y)$ in $L^2(X \times X)$ e sia $K(x,y) = \sum_{i,j} c_{i,j} u_i(x) u_j(y)$, l'operatore T_K è limite degli operatori di rango finito ottenuti dai nuclei $\sum_{i \leq N, j \leq N} c_{i,j} u_i(x) u_j(y)$.

Pertanto T_K è completamente continuo.

Se T è dato da un nucleo integrale $K(y,x) = \overline{K(x,y)}$, in L^2 è Hermitiano e completamente continuo.

Per un operatore integrale $T(f) := \int_X K(x,y) f(y) d\, y$ e $K(x,y)$ continua a supporto compatto $A \times A$, vediamo immediatamente che, se $f(x)$ è un autovettore di autovalore $\lambda \neq 0$ si ha:

$$f(x) = \lambda^{-1} \int_X K(x,y) f(y) d\, y$$

Quindi $f(x)$ è continua a supporto compatto contenuto in A.

Poiché dobbiamo lavorare sia con la norma uniforme che con la norma L^2 per una funzione continua f a supporto compatto scriviamo:

$$\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|, \qquad |f|^2 := \int_X |f(x)|^2 d\,x$$

Se $g(y)$ è una funzione continua poniamo $\|g\|_A := \sup_{x\in A} |f(x)|$.

Lemma. *Sia $K(x,y)$ continua a supporto compatto $A\times A$, $K(y,x) = \overline{K(x,y)}$.*

i) Esiste una costante positiva C per cui, data f continua in L^2 si ha:

$$\|T(f)\| \leq C|f|.$$

ii) Ogni elemento dell'immagine $T(f)$ è limite uniforme di combinazioni lineari finite di autovettori.

Dim. i) Sia $\|K\|$ la norma di K si ha:

$$|T(f)(x)| = |\int_X K(x,y)f(y)d\,y| \leq \|K\| \int_A |f(y)|d\,y \leq \|K\|\mu(A)|f|$$

dove $\mu(A)$ è la misura di A (dalla disuguaglianza di Schwarz).

ii) Sia u_i una base ortonormale di autovettori per la chiusura di $T(H)$. Sappiamo che $T(f) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ in norma L^2. Sia $f_n := T(\sum_{i=1}^{n}(f,u_i)u_i)$ vogliamo provare che la successione f_n tende uniformemente ad f.

Prima di tutto proviamo che le f_n sono una successione di Cauchy per la norma uniforme:

$$n \leq m, \quad \|f_n - f_m\| \leq C|f_n - f_m| \leq C|T|| \sum_{i=n+1}^{m} (f,u_i)u_i| = (\sum_{i=n+1}^{m} |(f,u_i)|^2)^{1/2} < \epsilon$$

per n abbastanza grande dalla diseguaglianza di Bessel. Sia g la funzione a cui tendono uniformemente proviamo che $g = T(f)$. Se completiamo la u_i ad una base ortonormale di H con altri elementi v_j nel nucleo di T abbiamo $f = \sum_i (f,u_i)u_i + \sum_j (f,v_j)u_j$, $T(f) = \sum_i (f,u_i)T(u_i)$ quindi $T(f) = \lim_n f_n$ in media. Avendo provato che le f_n convergono uniformemente si deve avere che $g = T(f)$ ovvero le f_n convergono uniformemente a $T(f)$. $\square$

3 Analisi sui gruppi topologici

3.1 Analisi sui gruppi topologici

Ricordiamo alcuni elementi di teoria della misura (per i dettagli si veda ad es. Rudin). Dato un insieme X una $\sigma-$algebra $\mathcal{B}$ di insiemi di X è un insieme $B \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi chiuso per unione numerabile e per complementare (e quindi chiuso anche per intersezione numerabile) e che contenga X e $\emptyset$.

Data comunque una famiglia di insiemi di X esiste una minima $\sigma-$algebra di insiemi di X che la contiene e che è detta generata dalla famiglia data.

Una misura su una $\sigma-$algebra è una funzione μ che ad ogni insieme $A \in \mathcal{B}$ associa un numero in $\mu(A) \in \mathbb{R}^+ \cup \infty$ con la proprietà che, se $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ è una unione disgiunta si ha $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Dato uno spazio topologico X si definisce la $\sigma-$algebra $\mathcal{B}$ degli insiemi Boreliani di X come la $\sigma-$algebra generata dagli aoperti (o dai chiusi) della topologia. Una misura su tale $\sigma-$algebra è detta Boreliana. Nel caso in cui X sia localmente compatto possiamo restringerci alle misure Boreliane per cui i compatti abbiamo misura finta.

Se G è un gruppo locamente compatto una invariante a sinistra è una misura Boreliana per cui per ogni compatto A si abbia $\mu(A) = \mu(gA)$, $\forall g \in G$. Idem per invarianza a destra.

Teorema. *Se G è un gruppo locamente compatto separabile, G possiede una misura invariante a sinistra unica a meno di costante positiva moltiplicativa, detta misura di Haar $\mu = dg$.*

Un modo di introdurre una misura Boreliana è di definirla tramite l'integrale che essa definisce sullo spazio delle funzioni continue a supporto compatto.

Si può iniziare con una trattazione assiomatica.

Per questo denotiamo con C^0_+ l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto non negative.

Un integrale di Daniell è una applicazione:

$$I : C^0_+ \to \mathbb{R}^+$$

che soddisfi le seguenti proprietà.

$$I(f+g) = I(f) + I(g), \qquad I(cf) = cI(f),\ \forall f, g \in C^0_+,\ c \in \mathbb{R}^+.$$

Nella definizione generale di integrale di Daniell si sggiunge l'ipotesi $f_n \downarrow 0 \implies I(f_n) \downarrow 0$ dove $f_n \downarrow 0$ vuol dire che la succcessione f_n convege a 0 puntualmente in modo decrescente, nel nostro caso si vede facilmente che questa condizione è conseguenza delle altre prendendo ad esempio una funzione g a supporto compatto e $g(x) = 1$ sul supporto di f_1, e sfruttando il fatto che f_n tende a zero uniformemente.

La applicazione data si estende a tutte le funzioni ponendo $I(f-g) := I(f) - I(g)$ se f, g sono positive, la definizione è chiaramente ben posta e definisce una applicazione lineare $I : C^0 \to \mathbb{R}$.

La teoria di Daniell permette di estendere l'integrale ad una classe di funzioni più generali come ad esempio le funzioni L^1 fra cui vi sono in particolare le funzioni caratteristiche degli insiemi Boreliani, in questo modo si ottiene un approccio alla integrazione del tipo integrale di Lebesgue.

Nel caso di un gruppo topologico localmente compatto abbiamo un *integrale di Haar destro risp. sinistro* se inoltre si ha:

$$I(f^h) = I(f),\ f^h(x) := f(xh),\ \forall h \in G, \qquad \text{risp} \quad I({}^h f) = I(f),\ {}^h f(x) := f(h^{-1}x),\ \forall h \in G.$$

Nel caso dei gruppi di Lie alla fine di questo capitolo mostreremo come costruire la misura di Haar tramite una forma differenziale invariante.

L'esistenza di un integrale di Haar (a destra per esempio) si prova nel modo seguente. Iniziamo con un ragionamento euristico, fissiamo una funzione $g \in C^0_+$ non nulla che pensiamo come unità di misura, cercando un integrale normalizzato con $I(g) = 1$.

Se f è una qualunque funzione in C^0_+ è chiaro che esistono dei traslati $g^{h_1}, \dots, g^{h_k}$ di g e delle costanti $c_1, \dots, c_k$ per cui si abbia $\sum c_i g^{h_i} \geq f$. Pertanto se I esiste si deve avere che $I(f) \leq \sum_i c_i$. Possiamo quindi iniziare col prendere come approssimazione superiore per l'integrale cercato il numero:

$$(f : g) := \inf(\sum_i c_i) \mid \sum c_i g^{h_i} \geq f. \tag{3.1.1}$$

b Il numero $(g : f)$ va pensato come una approssimazione del tipo integrale di Riemann, usando la g come se fosse ad esempio la funzione caratteristica di un intervallo.

Vediamo qualche proprietà del numero $(f : g)$ che si verifica immediatamente.

$$(f : g) = (f^h : g), \forall h \in G, \tag{1}$$

$$(af : g) = a(f : g), \forall a \in \mathbb{R}^+, \tag{2}$$

$$(f_1 + f_2 : g) \leq (f_1 : g) + (f_2 : g), \tag{3}$$

$$f_1 \leq f_2 \implies (f_1 : g) \leq (f_2 : g), \tag{4}$$

$$(f : h) \leq (f : g)(g : h) \tag{5}$$

$$(f : g) \geq m_f / m_g, \tag{6}$$

Verifichiamo 5,6, qui m_f indica il massimo di una funzione f.

Per 5 se $\sum c_i g^{h_i} \geq f, \sum d_j h^{k_j} \geq g$ si ha:

$$\sum d_j h^{h_i k_j} \geq g^{h_i} \implies \sum c_i d_j h^{h_i k_j} \geq f.$$

Quindi $(\sum_i c_i)(\sum_j d_j) \geq (f : h)$ da cui passando agli estremi inferiori l'asserto.

Per 6 invece sia x per cui $f(x) = m_f$ abbiamo $m_f \leq \sum_i c_i g(xh_i) \leq (\sum_i c_i) m_g$ da cui $(f : g) \geq m_f/m_g$.

Per approssimare sempre meglio l'integrale con queste *somme parziali* dobbiamo confrontare f con funzioni ϕ a supporto sempre più piccolo, ma dobbiamo mantenere una unità di scala e quindi poniamo:

$$I_\phi(f) := (f : \phi)/(g : \phi). \tag{3.1.2}$$

Dalle proprietà precedenti abbiamo che:

$$1/(g : f) \leq I_\phi(f) \leq (f : g) \tag{3.1.3}$$

pertanto $I_\phi(f)$ è in un intervallo limitato indipendente da ϕ.

Dalle altre proprietà deduciamo inoltre che $f \to I_\phi(f)$ è *invariante a destra, subadittivo ed omogeneo.*

Per poter passare al limite occorre provare che $I_\phi(f)$ è *quasi addittivo* quando ϕ è abbastanza piccola. In altre parole:

Lemma. *Date $f_1, f_2 \in C^0_+$ ed $\epsilon > 0$ esiste un intorno V di 1 tale che:*

$$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq I_\phi(f_1 + f_2) + \epsilon$$

Per tutte le funzioni ϕ a supporto in V.

Dim. Fissiamo prima di tutto una funzione ausiliaria $u \in C^0_+$ che valga 1 sull'insieme su cui $f_1 + f_2 > 0$. Per un δ da determinare poniamo $f := f_1 + f_2 + \delta u$. Possiamo inoltre definire due funzioni positive h_1, h_2 per cui $h_i f = f_i$ e $h_i = 0$ dove $f = 0$. Osserviamo che $h_1 + h_2 \leq 1$. Per un η da determinare scegliamo V in modo che $|h_i(x) - h_i(y)| < \eta$ se $xy^{-1} \in V$.

Fissata una ϕ positiva a supporto in V calcoliamo $(f : \phi)$. Supponiamo che $\sum c_j \phi(xs_i) \geq f(x)$ e quindi $\sum c_j \geq (f : \phi)$. Se $\phi(xs_i) \neq 0$ abbiamo $|h_i(x) - h_i(s_i^{-1})| < \eta$ quindi:

$$f_i(x) = f(x)h_i(x) \leq \sum_j c_j \phi(xs_j) h_i(x) \leq \sum_j c_j \phi(xs_j)(h_i(s_j^{-1}) + \eta) \implies$$

$$(f_i : \phi) \leq \sum c_j (h_i(s_j^{-1}) + \eta) \qquad i = 1, 2$$

$$(f_1 : \phi) + (f_2 : \phi) \leq \sum c_j(h_1(s_j^{-1}) + h_2(s_j^{-1}) + 2\eta) \leq \sum c_j(1 + 2\eta)$$

Passando all $\inf(\sum_j c_j)$ si ha ancora:

$$(f_1 : \phi) + (f_2 : \phi) \leq (f : \phi)(1 + 2\eta) \implies$$

$$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq I_\phi(f)(1 + 2\eta) \leq [I_\phi(f_1 + f_2) + \delta I_\phi(u)](1 + 2\eta)$$

Fissando δ ed η in modo che

$$2\eta I_\phi(f_1 + f_2) + \delta I_\phi(u)(1 + 2\eta) < \epsilon$$

possiamo concludere la dimostrazione del Lemma. $\square$

Possiamo ora provare l'esistenza di una misura di Haar.

Dim. Per ogni funzione positiva a supporto compatto f consideriamo l'intervallo $S_f := (1/(g : f), (f : g))$ e prendiamo lo spazio compatto $\prod_f S_f$. Per ogni ϕ a supporto compatto $I_\phi(f)$ è un punto di tale spazio (3.1.3). Per ogni intorno V di 1 sia C_V la chiusura dell'insieme dei punti $I_\phi,\ \phi \in V$. Per compattezza abbiamo che la intersezione di tutti gli insiemi C_V è non vuota e sia $I(f)$ un punto nella intersezione.

Per continuità vediamo che I è un integrale di Haar. (da completare) $\square$

3.2 Convoluzione Fissando su G una misura di Haar sinistra ci permette di definire la *convoluzione* sullo spazio delle funzioni L^1 con la formula

$$(f * g)(x) := \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy \tag{3.2.1}$$

L'uguaglianza fra le due formule segue dalla invarianza a sinistra $\int_G f(y)g(y^{-1}x)dy = \int_G f(xy)g((xy)^{-1}x)dy = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy$.

Con la usuale norma $|f| := \int_G |f(g)|dg$ lo spazio $L^1(G)$ è un' algebra di Banach ovvero la convoluzione definisce una struttura di algebra associativa (verificare) e $|f * g| \leq |f|.|g|$.

Quando G è compatto si assume sempre che la misura sia normalizzata $\mu(G) := \int_G 1dg = 1$ abbiamo le inclusioni

$$C^0(G) \subset L^2(G) \subset L^1(G)$$

i 3 spazi hanno le norme L^∞, L^2, L^1 le inclusioni diminuiscono la norma. $|f|_1 \leq |f|_2 \leq |f|_\infty$ per la diseguaglianza di Schwarz, quindi sono operatori limitati fra spazi di Banach e dunque continui.

Definizione. Un gruppo localmente compatto G si dice unimodulare se una misura di Haar sinistra è anche destra.

Per capire questo importante concetto dobbiamo fare la seguente osservazione.

Sia $d\mu$ una misura invariante a destra e sia $h \in G$ definiamo una nuova misura $dh\mu$ dalla formula

$$\int f(x)dh\mu := \int f(h^{-1}x)d\mu$$

è evidente che.

1. $dh\mu$ è ancora invariante a destra e
2. $d(hk)\mu = dh(k\mu)$

Dalla unicità a meno di scala della misura di Haar segue che esiste un numero positivo $\chi(h)$ per cui $dh\mu = \chi(h)d\mu$ ed inoltre $\chi(hk) = \chi(h)\chi(k)$. Applicando le misure ad una funzione test continua a supporto compatto vediamo facilmente che questo omomorfismo $h \to \chi(h)$ dal gruppo G al gruppo moltiplicativo dei numeri reali positivi, è continuo.

In particolare se G è compatto, l'immagine è un sottogruppo compatto di $\mathbb{R}^+$ e quindi necessariamente $\chi(h) = 1$ per ogni h.

Lemma. *Un gruppo compatto è unimodulare.*

Non discuteremo la misura di Haar in generale, il nostro interesse è nei gruppi di Lie e vedremo come in tal caso la misura abbia una espressione esplicita. Per ora sviluppiamo alcuni aspetti del formalismo. Ricordiamo che una funzione misurabile f è essenzialmente limitata se $|f| < c < \infty$ a meno di un insieme di misura nulla. La norma L^∞ è l'inf delle costanti c precedentemente descritte. Le funzioni essenzialmente limitate con la norma L^∞ sono uno spazio di Banach fra C^0 ed L^1.

Proposizione. *Se G è un gruppo unimodulare e $f, g \in L^2$ si ha che $f * g$ è essenzialmente limitata e $|f * g|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.*

Dim. La formula $(f * g)(x) := \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$ fissato x si può pensare come il prodotto scalare fra $f(x)$ e $\overline{g}(y^{-1}x)$ quindi dalla disuguaglianza di Schwarz e dal fatto che $g(x)$ e $\overline{g}(y^{-1}x)$ hanno la stessa norma L^2 segue la proposizione.

□

Nel caso dei gruppi compatti abbiamo varie proprietà. Prima di tutto osserviamo che una funzione continua $f(x)$ è *uniformemente continua* nel senso seguente:

Proposizione. *Data una funzione continua $f(x)$ su un gruppo compatto G per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno U di 1 tale che:*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad se \quad xy^{-1} \in U. \tag{3.2.2}$$

Dim. Consideriamo la funzione continua $f(x) - f(y)$ su $G \times G$ che si annulla su $\Delta := \{(g, g)\},\ g \in G$. Per continuità esiste un intorno V di Δ in $G \times G$ su cui $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Consideriamo l'omeomorfismo $p : G \times G \to G \times G,\ p(x, y) := (xy^{-1}, y)$ con inverso $(u, v) \to (uv, v)$. Si ha $p(\Delta) = 1 \times G$. Per la compattezza di G possiamo trovare un intorno U di 1 per cui $p(V) \supset U \times G$. Per tanto dati (x, y) con $xy^{-1} \in U$ si ha che $(x, y) \in V$ da cui la disuguaglianza richiesta. $\square$

Lemma. *i) Se G è compatto lo spazio delle funzioni L^2 è un algebra di Banach sotto la convoluzione.*

ii) Se f è continua e $u \in L^1$ si ha che $f * u$ è continua.

iii) Similmente $C^0(G)$ è un algebra sotto la convoluzione.

Dim. i) Segue dalla proposizione precedente e dalla continuità della inclusione $L^\infty \subset L^2$.

ii) Dato $\epsilon > 0$ sia U intorno di 1 tale che: $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ se $xy^{-1} \in U$. Si ha allora:

$$|f*u(x)-f*u(y)| = |\int_G (f(xh)-f(yh))u(h^{-1})dh| \leq \int_G |f(xh)-f(yh)|\,|u(h^{-1})|dh < \epsilon|u|_1$$

iii) Segue. $\square$

Prenderemo come definizione di rappresentazione di G una azione lineare $G \times V \to V$ continua su uno spazio vettoriale topologico (usualmente sui complessi).

Un primo esempio importante sono la rappresentazione destra e sinistra di G su $L^1(G)$, e $L^2(G)$ definite da

$$(L(h)f)(g) := f(h^{-1}g), \quad (R(h)f)(g) := f(gh). \tag{3.2.3}$$

In effetti saremo principalmente interessati al caso in cui V sia uno spazio di Hilbert e G operi in modo unitario ovvero $\|gv\| = \|v\|, \forall g \in G, v \in V$.

Evidentemente le rappresentazioni destra e sinistra su $L^2(G)$ sono unitarie per la misura invariante a destra ed a sinistra rispettivamente.

Dati comunque due vettori $v, w \in V$ la funzione su G, data da $\langle gv, w\rangle = \langle v, g^{-1}w\rangle$ è una funzione continua su G ed è detta un coefficiente matriciale, queste funzioni giocano un ruolo essenziale nella teoria.

Nel caso non unitario si prendono $v \in V, \phi \in V^*$ e $\langle\phi|gv\rangle$.

Anche se la prossima Proposizione vale in maggiore generalità proviamola nel caso unitario.

La convoluzione permette, data una rappresentazione lineare ρ di G come operatori unitari su uno spazio di Hilbert V di definire una azione di $L^1(G)$ su V tramite

$$fv := \int_G f(g)gvdg.$$

La definizione formale è la seguente. Si parte da una funzione $f \in C_0(G)$ continua ed a supporto compatto. Dato $v \in V$ per ogni $w \in V$ consideriamo

$$\phi(w) := \int_G f(g)\langle gv, w\rangle dg$$

Ovviamente $\phi(w)$ è un funzionale antilineare in w inoltre

$$|\phi(w)| \leq \int_G |f(g)||\langle gv, w\rangle|dg \leq \int_G |f(g)|\|v\|\dot{\|}w\|dg = |f|_1\|v\|\dot{\|}w\|.$$

Ne segue quindi che $\phi(w)$ è un funzionale continuo ed è quindi rappresentato (per il teorema di Riesz) da un vettore, che per definizione chiameremo fv ovvero

$$\langle fv, w\rangle = \int_G f(g)\langle gv, w\rangle dg$$

Per costruzione $\|fv\| \leq |f|_1\|v\|$ quindi l'applicazione $f \to fv$ si estende per continuità ad una applicazione da $L^1(G)$ a V.

Valgono le seguenti proprietà che si verificano direttamente sulle funzioni continue (usando l'invarianza della misura di Haar) e poi per continuità.

Proposizione. *Siano $f \in L^1(G),\ v \in V,\ h \in G$ allora:*

$$h.(fv) = (L(h)f)v.$$

$f.hv = (R(h^{-1})f)v$, *se la misura di Haar sinistra è anche destra.*
$(f * g)v = f(gv)$.

In particolare V è un modulo sull'algebra $L^1(G)$.

Una tecnica importante di approssimazione è la seguente. Si consideri una successione U_i decrescente di intorni compatti di 1 in G tali che $\cap_i U_i = 1$.

Per ogni U_i si costruisca una funzione continua f_i a supporto in U_i e con le proprietà seguenti

$$\text{(A)} \qquad f_i(g) \geq 0, \quad f_i(g) = f_i(g^{-1}), \quad \int_G f_i(g)dg = 1.$$

La idea è che, debolmente, la successione f_i tende alla δ *di Dirac in 1.*

Proposizione. *Data una rappresentazione V ed un vettore $v \in V$ si ha:*

$$\lim_{i\to\infty} f_i v = v,$$

Dim.
Per la continuità della azione di G, per $i >> 0$ $|gv - v| < \epsilon,\ g \in U_i$ da cui

$$|\int f_i(g)gvdg - v| = |\int f_i(g)gvdg - \int f_i(g)vdg| < \int f_i(g)|gv - v|dg < \epsilon.$$

Definizione. Una successione f_i che soddisfa alle proprietà A) è detta una unità approssimata.

Possiamo applicare questa teoria alla convoluzione nel caso di un gruppo G compatto, in questo caso le ipotesi di supporto compatto sono sempre automaticamente verificate.

Per studiare alcuni operatori completamente continui ci serve una definizione ed un Teorema sulle funzioni.

Definizione. *Una famiglia $f_i(x)$ di funzioni complesse su un insieme X si dice equilimitato se esiste una costante positiva Ce $|f_i(x)| < C, \ \forall i, \ \forall x \in X$.*

Una famiglia $f_i(x)$ di funzioni complesse su un gruppo topologico X si dice equicontinua se, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno U_ϵ di 1 in X con:

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon, \quad \forall i, \quad \forall x, y \,|\, xy^{-1} \in U_\epsilon. \tag{3.2.4}$$

Teorema di Ascoli Arzelà. *Data una successione $S := f_i(x)$ di funzioni complesse su un gruppo topologico compatto X equicontinua ed equilimitata possiamo estrarne una sottosuccessione uniformemente convergente.*

Dim. Sia $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ una successione di punti di X densa in X.

Estraiamo per induzione dalla successione data successioni $S_i := f_{i,j}, \ j = 1, \ldots \infty$ in modo che S_i è una sottosuccessione di S_{i-1} ed inoltre la successione $f_{i,j}(p_i)$ sia convergente.

Questo si può fare per il teorema di Weierstrass poiché tutte le funzioni sono equilimitate.

Ora applichiamo il *metodo diagonale* e costruiamo la successione $f_{i,i}$, per costruzione $f_{i,i}(p_j)$ converge per ogni j.

Proviamo ora che, per la equicontinuità, si ha che la successione di funzioni $f_{i,i}$ è uniformemente convergente.

Dato $\epsilon > 0$ sia U_ϵ intorno di 1 in X con: $|f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon, \quad \forall i, \quad \forall x, y \,|\, xy^{-1} \in U_\epsilon$. Esiste un intorno aperto V_ϵ di 1 per cui $V_\epsilon = V_\epsilon^{-1}, \ V_\epsilon^5 \subset U_\epsilon$ e prendiamo (per compattezza) un ricoprimento finito $V_\epsilon g_i, \ i = 1, \ldots, k$ di X e, per ogni $i = 1, \ldots, k$ un punto $p_i \in V_\epsilon g_i$.

Sia $N >> 0$ tale che $|f_{i,i}(p_j) - f_{h,h}(p_j| < \epsilon, \ \forall i, h > N, \ j = 1, \ldots, k$.

Dati $x, y \,|\, xy^{-1} \in V_\epsilon$ esistono j, h tale che $x \in V_\epsilon g_j, \ y \in V_\epsilon g_h$ da cui $p_j p_h^{-1} \in V_\epsilon^5 \subset U_\epsilon$ e:

$$|f_{i,i}(x) - f_{h,h}(y)| = |f_{i,i}(x) - f_{i,i}(p_j) + f_{i,i}(p_j) - f_{h,h}(p_h) + f_{h,h}(p_h) - f_{h,h}(y)| \leq$$

$$|f_{i,i}(x) - f_{i,i}(p_j)| + |f_{i,i}(p_j) - f_{h,h}(p_h)| + |f_{h,h}(p_h) - f_{h,h}(y)| \leq$$

$$|f_{i,i}(x) - f_{i,i}(p_j)| + |f_{i,i}(p_j) - f_{i,i}(p_h)| + |f_{i,i}(p_h) - f_{h,h}(p_h)| + |f_{h,h}(p_h) - f_{h,h}(y)| \leq$$

$$\leq 4\epsilon, \qquad \forall i, h > N$$

□

3.3 Funzioni rappresentative

Lemma-Definizione. Per una funzione continua $f \in C^0(G)$ sono equivalenti:

(1) Lo spazio generato dai traslati sinistri $f(gx),\ g \in G$ è di dimensione finita.
(2) Lo spazio generato dai traslati destri $f(xg),\ g \in G$ è di dimensione finita.
(3) Lo spazio generato dai traslati doppi $f(gxh),\ g, h \in G$ è di dimensione finita.
(4) Vi è una espansione finita $f(xy) := \sum_{i=1}^k u_i(x)v_i(y)$.

Una funzione che soddisfa alle ipotesi precedenti è detta funzione rappresentativa.

(5) Nelle espansioni 4) le funzioni u_i, v_i si possono assumere funzioni rappresentative.

Dim. Assumiamo 1) e sia $u_i(x),\ i = 1, \dots, m$ una base dello spazio generato dalle funzioni $f(gx),\ g \in G$.

Essendo le u_i indipendenti esistono m punti p_j tali che il determinante della matrice $u_i(p_j)$ è diverso da 0.

Da $f(gx) = \sum_i v_i(g)u_i(x)$, calcolando x nei p_j e risolvendo, segue che i coefficienti $v_i(g)$ sono funzioni continue e quindi 4) segue. 4) è simmetrica ed implica 1), 2).

In $f(xy) := \sum_{i=1}^k u_i(x)v_i(y)$ possiamo prendere le funzioni v_i come base dello spazio generato dai traslati sinistri di f quindi funzioni rappresentative, gli u_i sono nel sottospazio generato dai traslati destri e quindi funzioni rappresentative. Applicando la parte precedente abbiamo $u_i(xg) = \sum_j c_{ji}(g)w_j(x)$ per opportune funzioni w_j.

Per 3) abbiamo

$$f(gxh) = \sum_i v_i(g)u_i(xh) = \sum_i v_i(g) \sum_j c_{ji}(h)w_j(x)$$

□

Un modo canonico di ottenere funzioni rappresentative viene dai *coefficienti matriciali.* Presa una rappresentazione V di un gruppo G e due elementi $v \in V, \phi \in V^*$ definiamo il coefficiente matriciale:

$$c_{v,\phi}(g) := \langle \phi \,|\, gv \rangle = \langle g^{-1}\phi \,|\, v \rangle. \tag{3.3.1}$$

Abbiamo le seguenti ovvie proprietà:

$$c_{hv,\phi}(g) = c_{v,\phi}(gh), \quad c_{v,h\phi}(g) = c_{v,\phi}(h^{-1}g). \tag{3.3.2}$$

Inoltre $c_{v,\phi}(g)$ è una applicazione bilineare nelle variabili v e ϕ.

Se prendiamo due rappresentazioni V_1, V_2 e vettori:

$$v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2, \quad \phi_1 \in V^*, \quad \phi_2 \in V^*$$

possiamo formare le operazioni di somma diretta e di prodotto tensoriale, abbiamo:

$$c_{v_1 \oplus v_2, \phi_1 \oplus \phi_2}(g) = c_{v_1,\phi_1}(g) + c_{v_2,\phi_2}(g), \quad c_{v_1 \otimes v_2, \phi_1 \otimes \phi_2}(g) = c_{v_1,\phi_1}(g)c_{v_2,\phi_2}(g)$$

Infine per bidualità $V = (V^*)^*$ e:

$$c_{\phi,v}(g) = \langle v \,|\, g\phi \rangle = \langle g\phi \,|\, v \rangle = c_{v,\phi}(g^{-1})$$

Se V è una rappresentazione continua di dimensione finita di G abbiamo dunque:

Proposizione. *L'applicazione lineare:*

$$c_{V,V^*} : V \otimes V^* \to C^0(G),\ v \otimes \phi \to c_{v,\phi}(g)$$

è $G \times G$ equivariante. Dove $G \times G$ opera su $V \otimes V^*$ in modo ovvio e su $C^0(G)$ con le azioni destra e sinistra rispettivamente.

OSSERVAZIONE Abbiamo una identificazione $V \otimes V^* = End(V)$ per cui la identità 1_V corrisponde a $\sum_i e_i \otimes e^i$ dove e_i è una base data ed e^i la base duale.

Abbiamo allora che $\sum_i c_{e^i,e_i}(g) = \sum_i \langle e^i | g e_i \rangle = tr(\rho_V(g))$.

Definizione. *La funzione $\sum_i c_{e^i,e_i}(g) = \sum_i \langle e^i | g e_i \rangle = tr(\rho_V(g))$ è detta il* **carattere** *della rappresentazione V ed indicata con $\chi_V(g) := tr(\rho_V(g))$.*

I caratteri sono oggetti fondamentali come vedremo nei prossimi paragrafi. In particolare $\chi_V(1) = \dim V$.

In particolare se V è irriducibile come G modulo si ha (Corollario 1.1) che $V \otimes V^*$ è irriducibile come $G \times G$ modulo e quindi c_{V,V^*} essendo non 0 è iniettiva. Possiamo quindi identificare $V \otimes V^*$ ad uno spazio di funzioni continue su G.

Teorema. *L'insieme $\mathcal{T}_G$ delle funzioni rappresentative è an algebra (rispetto al prodotto di funzioni) generata dai coefficienti matriciali delle rappresentazioni continue di dimensione finita di G.*

Dim. Che la somma ed il prodotto di funzioni rappresentative siano rappresentative è evidente. Sia $f(x)$ una funzione rappresentativa e sia V lo spazio di funzioni generato dalle funzioni $f^h(g) := f(gh)$. Tale spazio è di dimensione finita per ipotesi ed è una rappresentazione rispetto alla azione destra. Sia $v := f(g) \in V$ e sia ϕ la funzione lineare data dalla valutazione di una funzione in 1, $\langle \phi \,|\, h(g) \rangle := h(1)$, si ha:

$$f(x) = f^x(1) = \langle \phi \,|\, f^x(g) \rangle = c_{v,\phi}(x)$$

□

ESEMPIO 1) Prendiamo per $G = \mathbb{R}$ il gruppo addittivo dei reali, una rappresentazione di dimensione finita è del tipo $x \to e^{Ax}$ per una qualche matrice A. Per calcolare i coefficienti matriciali ci possiamo ridurre al caso in cui A sia un *blocco di Jordan*, per esempio:

$$A = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}, \quad e^{Ax} = e^{ax} e^{Bx}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Proposizione. *Per $G = \mathbb{R}$ lo spazio delle funzioni rappresentative è generato dalle funzioni coefficienti matriciali:*

$$e^{ax}x^m, \quad a \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}$$

ESEMPIO 2) Prendiamo il gruppo $S^1 := \{\alpha \in \mathbb{C} \,|\, |\alpha| = 1\}$, il gruppo dei numeri complessi di modulo 1.

Tramite l'omomorfismo $x \to e^{2\pi x}$ tale gruppo è isomorfo ad $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. una rappresentazione di S^1 è dunque una rappresentazione di $\mathbb{R}$ che abbia $\mathbb{Z}$ nel nucleo. Nel caso precedente di una matrice A si ha che $\mathbb{Z}$ è nel nucleo se e solo se $e^A = 1$, questo avviene se e solo se A è semisemplice e tutti gli autovalori sono numeri interi, se ne deduce facilmente che le funzioni rappresentative di S^1 sono generate dalle funzioni $\alpha^m,\ m \in \mathbb{Z}$.

ESEMPIO 3) Se G è un gruppo finito ogni funzione è rappresentativa.

Se G, K sono 2 gruppi topologici abbiamo che

Proposizione. *Tramite la moltiplicazione $f(x)g(y)$ abbiamo un isomorfismo*

$$\mathcal{T}_G \otimes \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_{G\times K}$$

Dim. La moltiplicazione di funzioni su due spazi distinti allo spazio prodotto è sempre un isomorfismo del prodotto tensoriale degli spazi di funzioni alla sua immagine. Basta provare che lo spazio delle funzioni rappresentative di $G \times K$ è generato dalle funzioni $\psi(x, y) := f(x)g(y)$ con $f(x) \in \mathcal{T}_G$, $g(y) \in \mathcal{T}_K$.

Usando la proprietà 4) della definizione di funzione rappresentativa abbiamo che se $f(x_1x_2) = \sum_i u_i(x_1)v_i(x_2),\ g(y_1y_2) = \sum_k w_k(y_1)z_k(y_2)$ si ha

$$\psi((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = \sum_{i,k} u_i(x_1)w_k(y_1)v_i(x_2)z_k(y_2)$$

viceversa $\psi(x, y)$ è rappresentativa scrivendo $(x, y) = (x, 1)(1, y)$ vediamo che ψ è nello spazio generato dal prodotto di funzioni rappresentative. $\square$

3.4 Il caso G compatto Vogliamo provare che, nel caso compatto, le funzioni rappresentative sono dense (nella norma uniforme). Per questo scegliamo una funzione reale continua $\phi(x)$ con $\phi(x) = \phi(x^{-1})$. Da $\phi(x)$ costruiamo il nucleo integrale $K(x, y) = \phi(y^{-1}x)$. La ipotesi su $\phi(x)$ implica che $K(x, y)$ è simmetrico.

Lemma. *La convoluzione $R_\phi : f \to f * \phi := \int_G f(y)\phi(y^{-1}x)dy$ è un operatore completamente continuo la cui immagine è nella chiusura di $\mathcal{T}$.*

Dim. Il fatto che tale operatore è completamente continuo segue da 2.4.

Per costruzione la convoluzione è G equivariante per la azione sinistra e di conseguenza gli autospazi di questo operatore sono G stabili.

Dal teorema 2.4 citato, tali autospazi sono di dimensione finita, formati da funzioni rappresentative e quindi la immagine di R_ϕ (generata dagli autovettori relativi agli autovalori non nulli) è nella chiusura uniforme di $\mathcal{T}$ dall'ultimo Lemma 2.4. $\square$

Il passo successivo consiste nel provare che,

Proposizione. *Data una funzione continua f, al variare di ϕ possiamo approssimare uniformemente f con elementi nell'immagine di R_ϕ.*

Dato $\epsilon > 0$ prendiamo un intorno aperto U di 1 tale che $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ se $xy^{-1} \in U$ e prendiamo ϕ con supporto in U e positiva con integrale 1, allora $|f - f * \phi| < \epsilon$ dato che

$$|f(x) - (f * \phi)(x)| = |\int_G f(x)\phi(y^{-1}x)dy - \int_G f(y)\phi(y^{-1}x)dy| =$$

$$|\int_{y^{-1}x \in U} (f(x) - f(y))\phi(y^{-1}x)dy| \leq \int_{y^{-1}x \in U} |f(x) - f(y)|\phi(y^{-1}x)dy \leq \epsilon$$

Deduciamo infine:

Teorema. *In un gruppo compatto le funzioni rappresentative sono dense nelle funzioni continue per la norma uniforme.*

4 Caratteri

4.1 Caratteri. Prima di tutto discutiamo alcune costruzioni formali che si possono fare sulle rappresentazioni di un gruppo. Per il momento la discussione è puramente algebrica.

La nozione di sottorappresentazione e di quoziente, segue come nella teoria generale dei moduli.

La nozione di morfismo $G-$lineare fra due rappresentazioni M, N vuol dire una trasformazione lineare $T : M \to N$ con $T(gm) = gT(m), \ \forall m \in M, \forall g \in G$.

L'insieme delle trasformazioni $G-$lineari (dette anche *intertwiners*) è un sottospazio vettoriale dello spazio di tutte le trasformazioni lineari e si indica con:

$$hom_G(M, N).$$

Lo spazio dei vettori invarianti M^G di una rappresentazione M è

$$M^G := \{m \in M | gm = m, \ \forall g \in G\}.$$

Date due rappresentazioni M, N di G se ne può formare la somma diretta $M \oplus N$ dove G opera come $g(m, n) := (gm, gn)$.

Si possono fare due ulteriori costruzioni proprie della teoria dei gruppi (o più in generale delle algebre di Hopf).

La rappresentazione duale M^* di una data, è una rappresentazione sullo spazio duale. La definizione è

$$\phi \in M^*,\ v \in M,\ g \in G: \quad \langle g\phi|v\rangle := \langle \phi|g^{-1}v\rangle$$

Il prodotto tensoriale $M \otimes N$ di due rappresentazioni dove $g(m \otimes n) := gm \otimes gn$.

Naturalmente $M \otimes N$ è anche una rappresentazione di $G \times G$, con

$$(g_1, g_2)m \otimes n := g_1 m \otimes g_2 n.$$

Lo spazio delle trasformazioni lineari fra due rappresentazioni è una rappresentazione:

$$hom(M, N),\ (gT)(m) := g(T(g^{-1}m)) <\ m \in M,\ T \in hom(M, N),\ g \in G.$$

In altre parole, se $\rho_M : G \to GL(M),\ \rho_N : G \to GL(N)$ sono i due omomorfismi definenti le due rappresentazioni, si ha che

$$gT := \rho_N(g) \circ T \circ \rho_M(g)^{-1}.$$

NOTA BENE Con questa definizione si ha che $hom_G(M, N) = hom(M, N)^G$ è lo spazio delle trasformazioni lineari $G-$invarianti.

Di nuovo $hom(M, N)$ è anche una rappresentazione di $G \times G$ tramite la formula

$$(g_1, g_2)(T) : m \to g_1(T(g_2^{-1}m)).$$

Vi è un legame fra prodottto tensoriale e spazio di trasformazioni lineari abbiamo una trasformazione lineare:

$$N \otimes M^* \xrightarrow{i} hom(M, N),\ i(n \otimes \phi)(m) := n\langle \phi|m\rangle.$$

NOTA BENE i è un morfismo $G \times G-$lineare, per le strutture date. In particolare se M, N sono di dimensione finita, i è un isomorfismo di rappresentazioni.

4.2 Dimensione finita Discutiamo la teoria dei caratteri per le rappresentazioni di dimensione finita

Definizione. *Data una rappresentazione lineare $\rho : G \to GL(V)$ di un gruppo G, in uno spazio vettoriale di dimensione finita V il suo carattere è la funzione su G.*

$$\chi_\rho(g) := tr(\rho(g)).$$

Qui tr è la traccia.[3]

Diciamo che un carattere è irriducibile se proviene da una representazione irriducibile.

Proprietà immediate.

[3] È importante definire il carattere anche per rappresentazioni di dimensione infinita, ma questo comporta alcune modifiche che spiegheremo in seguito.

Proposizione. *1)* $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(aga^{-1}),\ \forall a, g \in G.$

Il carattere è costante sulle classi coniugate. Una tale funzione si chiama **funzione di classe**.

2) Date due rappresentazioni ρ_1, ρ_2 *abbiamo:*

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2},\ \chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2},$$

3) Se ρ *è unitarizzabile abbiamo che il carattere della rappresentazione duale* ρ^* *è il coniugato di* χ_ρ*:*

$$\rho^* = \overline{\rho}.$$

Dim. Mostriamo 3) le altre parti sono chiare. Se ρ è unitarizzabile vi è una base in cui le matrici $\rho(g)$ sono unitarie, per la rappresentazione duale nella base duale abbiamo l'inversa transposta uguale alla coniugata e $tr(\rho^*(g)) = tr(\overline{\rho(g)}) = \overline{tr(\rho(g))}$.

5 Gruppi compatti

NOTA Discutiamo il formalismo dei caratteri per i gruppi compatti.

5.1 Rappresentazioni di gruppi compatti In questo paragrafo assumiamo sempre che G sia un gruppo compatto, le rappresentazioni saranno su spazi vettoriali complessi. La prima osservazione consiste nel provare che le rappresentazioni unitarie esauriscono le possibili rappresentazioni.

Teorema. *Data una rappresentazione continua di* G *compatto in uno spazio di dimensione finita* V *esiste una metrica Hermitiana per cui la rappresentazione è unitaria.*

Dim. Si parte da una metrica arbitraria (u, v) e se ne definisce una nuova *mediando* sul gruppo G:

$$\langle u, v \rangle := \int_G (gu, gv)dg$$

si verifica facilmente che si ottiene una metrica per cui la rappresentazione è unitaria. □

Osservazione in effetti la dimostrazione data funziona anche se V è uno spazio di Hilbert non necessariamente di dimensione finita.

Proposizione. *Sia* $\rho : G \to GL(V)$ *rappresentazione di dimensione finita di* G *(compatto), si ha:*

$$dim_{\mathbb{C}} V^G = \int \chi_\rho(g)dg.$$

Dim. Consideriamo l'operatore $\pi := \int \rho(g)dg$, proviamo che π è la proiezione $G-$equivariante su V^G. Infatti se $v \in V^G$:

$$\pi(v) = \int \rho(g)(v)dg = \int vdg = v.$$

Altrimenti:

$$\rho(h)\pi(v) = \int \rho(h)\rho(g)vdg = \int \rho(hg)vdg = \pi(v)$$

per l'invarianza della misura di Haar.

Quindi $dim_{\mathbb{C}} V^G = tr(\pi) = tr(\int \rho(g)dg) = \int tr(\rho(g))dg = \int \chi_\rho(g)dg$ dalla linearità della traccia e dell'integrale.

La proposizione precedente ha una conseguenza importante.

Teorema (Ortogonalità dei caratteri). *Siano χ_1, χ_2 i caratteri di due rappresentazioni ρ_1, ρ_2 irriducibili:*

$$\int \chi_1(g)\overline{\chi}_2(g)dg = \begin{cases} 0 & se\ \rho_1 \neq \rho_2 \\ 1 & se\ \rho_1 = \rho_2 \end{cases}.$$

Dim. Siano $V_1,\ V_2$ gli spazi delle due rappresentazioni consideriamo $hom(V_2, V_1) = V_1 \otimes V_2^*$.

Come rappresentazione ha carattere $\chi_1(g)\overline{\chi}_2(g)$.

Abbiamo che $hom_G(V_2, V_1) = (V_1 \otimes V_2^*)^G$ e $dim_{\mathbb{C}} hom_G(V_2, V_1) = \int \chi_1(g)\overline{\chi}_2(g)dg$ dalla proposizione precedente.

Dal lemma di Schur e dal fatto che $V_1,\ V_2$ sono irreducibili, segue il teorema.

6 Il Teorema di Peter-Weyl.

6.1 Teorema di Peter-Weyl

Lemma. *Data una rappresentazione unitaria di un gruppo G due sottomoduli irriducibili non isomorfi sono ortogonali*

Dim. Siano V_1, V_2 i due sottomoduli, la forma Hermitiana induce una applicazione G lineare $j : V_1 \to (\overline{V}_2)^*$ tramite la formula $j(v)(w) := (v, w)$, per la unitarietà $V_2 = (\overline{V}_2)^*$ le ipotesi fatte implicano dunque che $j = 0$. $\square$

Per ogni rappresentazione irriducibile di dimensione finita V di G lo spazio dei coefficienti matriciali $V^* \otimes V$ appare nello spazio $C^0(G)$ delle funzioni continue su G e, per rappresentazioni irriducibili distinte V_1, V_2 i correspondenti spazi di coefficienti matriciali sono ortogonali in L^2.

Se lo spazio di Hilbert $L^2(G)$ è separabile (ad esempio se G è un gruppo di Lie) segue ancora che abbiamo una infinità numerabile di spazi $V_i^* \otimes V_i$ con V_i irriducibile e affermiamo

Teorema Peter-Weyl. *La somma diretta $\oplus_i V_i^* \otimes V_i$ è densa in $C^0(G)$ per la norma uniforme.*

Ogni funzione f di classe L^2, su G si sviluppa univocamente (in serie di Fourier) come $f = \sum_i u_i$ con $u_i \in V_i^* \otimes V_i$ fra loro ortogonali.

Dim. Prima di tutto identifichiamo la somma diretta $\mathcal{T} := \oplus_i V_i^* \otimes V_i$ con lo spazio delle funzioni rappresentative dal Teorema 1.2 e dal Lemma precedente.

Il fatto che le funzioni rappresentative sono dense è il Teorema 3.3.

Ora sappiamo che la somma $\oplus_i V_i^* \otimes V_i$ è ortogonale, la sua chiusura nella norma L^2 è l'insieme delle serie di Fourier $f = \sum_i u_i,\ u_i \in V_i^* \otimes V_i$. Poichè l'inclusione $C^0(G) \to L^2(G)$ è continua (per le due norme) e $C^0(G)$ è denso in $L^2(G)$ il teorema segue. $\square$

6.2 Consequenze del Teorema di Peter Weyl.

In questa sezione G è un gruppo compatto.

FORMULE ESPLICITE.

Per uno spazio di Hilbert V denotiamo con $\overline{V}$ il coniugato di V con prodotto Hermitiano il coniugato di quello di V (e la stessa norma). Se V è lo spazio di una rappresentazione unitaria di un gruppo K allora $\overline{V}$ è lo spazio della rappresentazione duale di K.

Sia V di dimensione finita. Dati $a, b \in V$ la funzione $t^V_{a\otimes b}(g) := (a, gb)$ è lineare in a e antilineare in b e definisce una applicazione lineare $K \times K$ equivariante da $V \otimes \overline{V}$ allo spazio dei coefficienti matriciali di V.

Omettiamo V se chiaro dal contesto.

Teorema. *Abbiamo*

$$\int_K t^V_{a\otimes b}(g)\bar{t}^V_{c\otimes d}(g) = \int_K (a, gb)(gd, c)dg = \frac{1}{dim(V)}(a, c)(b, d).$$

Dim. Il prodotto Hermitiano $(a \otimes b, c \otimes d) = (a, c)(d, b)$ su $V \otimes \overline{V}$ è $K \times K$ invariante, e dal Lemma di Schur, è quindi univocamente determinato a meno di costante. Quindi $\int_K t^V_{a\otimes b}(g)\bar{t}^V_{c\otimes d}(g) = A(a, c)(b, d)$ per qualche costante A.

Per determinare A scegliamo una base ortonormale $e_i,\ i = 1, \ldots, n = dim(V)$ e sviluppiamo $ga + \sum_i (ga, e_i)e_i$ e $\|ga\|^2 = \|a\|^2 = \sum_{i=1}^n |(ga, e_i)|^2$. Integrando entrambi i termini otteniamo il risultato.

Come corollario abbiamo che:

Serie di Fourier su K Scegliendo per ogni rappresentazione irriducibile V_α di dimensione d_α una base ortonormale $e_i^\alpha,\ i = 1, \ldots, d_\alpha$ gli elementi $\sqrt{d_\alpha} t_{e_i^\alpha \otimes e_j^\alpha}$ sono una base ortonormale di $L^2(K)$.

Vogliamo ora studiare la convoluzione dei coefficienti matriciali.

Per calcolarla ne formiamo il prodotto scalare con un terzo coefficiente.

$$\int_K \left(\int_K (e_i^\alpha, gh^{-1}e_j^\alpha)(e_s^\beta, he_t^\beta)dh\right)\overline{(e_u^\gamma, ge_v^\gamma)}dg =$$

$$\int_K \left(\int_K (e_i^\alpha, gh^{-1}e_j^\alpha)(g)\overline{(e_u^\gamma, ge_v^\gamma)}dg\right)(e_s^\beta, he_t^\beta)dh =$$

0 se $\alpha \neq \gamma$, se $\alpha = \gamma$ abbiamo

$$\frac{1}{d_\alpha}\int_K ((e_i^\alpha, e_u^\alpha)\overline{(h^{-1}e_j^\alpha, e_v^\alpha)})(e_s^\beta, he_t^\beta)dh$$

$$= \frac{1}{d_\alpha}(e_i^\alpha, e_u^\alpha)\int_K (e_s^\beta, he_t^\beta)\overline{(e_j^\alpha, he_v^\alpha)}dh$$

$$=$$

0 se $\beta \neq \alpha$, mentre se $\beta = \alpha$

$$\frac{1}{d_\alpha^2}(e_i^\alpha, e_u^\alpha)(e_s^\beta, e_j^\alpha)(e_v^\alpha, e_t^\beta)$$

$$= \frac{1}{d_\alpha}(e_s^\beta, e_j^\alpha)\int_K (e_i^\alpha, ge_t^\beta)\overline{(e_u^\alpha, ge_v^\alpha)}dg.$$

Dalla proprietà della base ortonormale segue che

$$(e_i^\alpha, ge_j^\alpha) * (e_s^\beta, ge_t^\beta) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha \neq \beta \\ (e_s^\alpha, e_j^\alpha)(e_i^\alpha, ge_t^\alpha) & \text{se} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

Questa formula si interpreta al modo seguente.

Teorema. *$V \otimes \overline{V} = End(V)$ è un algebra rispetto alla composizione di endomorfismi. La identificazione di tale algebra con lo spazio dei suoi coefficienti matriciali trasforma il prodotto di endomorfismi nella convoluzione.*

Lo spazio delle funzioni rappresentative $\oplus_{V\in\hat{G}}End(V)$ è chiuso rispetto alla convoluzione, il prodotto di due sottoalgebre $End(V)$, $End(W)$ relative a due irriducibili distinti è 0 e quindi tale algebra di convoluzione è la somma diretta (come algebre) delle algebre $End(V)$.

In particolare l'identità $\sum_i e_i \otimes e_i$ corresponde a

$$\sum_i (e_i, ge_i) = \chi_V(g)$$

ossia il carattere della rappresentazione irriducibile.

Pertanto rispetto alla convoluzione $\chi_V(g)$ è un idempotente. Inoltre date due rappresentazioni irriducibili distinte V, W si ha $\chi_V(g) * \chi_W(g) = 0$ da cui si ottiene che $\chi_V(g)$ opera come l'identità su V e come 0 su W.

Infine $\int_K (a, hb)dh = 0$ se V non è la rappresentazione banale. Infatti per equivarianza la funzione $\int_K (a, ghb)dh$ coincide con $(a, g(\int_K hb))dh = 0$ se V non è banale.

Definizione. Data una rappresentazione di G in un spazio di Hilbert M. Un vettore v per cui gli elementi $gv,\ g \in G$ generano un sottospazio di dimensione finita è detto vettore finito.

Questa è una ovvia generalizzazione della nozione di funzione rappresentativa.

L'insieme M_G dei vettori $G-$finiti è evidentemente un sottospazio vettoriale ed anche un sotto $G-$modulo.

Data una rappresentazione unitaria di G lo spazio $\langle Gv \rangle$ si può decomporre in somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Ne segue dalla teoria della semiseplicità che $M_G = \oplus_{\alpha \in \hat{G}} M(\alpha)$ dove $M(\alpha)$ è la componente isotipica di tipo α.

Teorema.

(1) *I vettori finiti in M sono $\oplus_{\alpha \in \hat{G}} End(V_\alpha)M$ e sono densi in M.*
(2) *$End(V_\alpha)M = M(\alpha)$ è la componente isotipica di tipo α.*
(3) *Per ogni rappresentazione M l'operatore $v \to \int \chi_V(g)gvdg = \chi_V v$ è la proiezione (ortogonale) equivariante sulla componente isotipica di tipo V. In particolare tale componente isotipica è chiusa in M.*
(4) *$M = \overline{M}(\alpha)$ è la somma Hilbertiana delle componenti isotipiche.*

Dim. 1) Dato comunque un vettore $v \in M$ a applicazione $f \to fv,\ L^2(G) \to M$ è G equivariante e pertanto manda le funzioni rappresentative in vettori finiti ovvero i vettori $\oplus_{\alpha \in \hat{G}} End(V_\alpha)M$ sono finiti.

Poiché $v = \lim_{i=1}^{\infty} f_i v$ per una unità approssimata f_i segue che $\oplus_{\alpha \in \hat{G}} End(V_\alpha)M$ è denso in $L^2(G)M$ che è denso in M.

2) Chiaramente $End(V_\alpha)$ è la componente isotipica di tipo α di $\oplus_{\alpha \in \hat{G}} End(V_\alpha)$.

Poiché la mappa $f \to fv,\ End(V_\alpha) \to M$ è equivariante segue che $End(V_\alpha)M$ è contenuta nella componente $M(\alpha)$ isotipica di tipo α, d'altra parte poiché $\chi_{V_\alpha} \in End(V_\alpha)$ opera come l'identità su $M(\alpha)$ abbiamo $M(\alpha) = M(\alpha) \subset End(V_\alpha)M$.

3) 4) χ_{V_α} è un idempotente centrale e comuta con il gruppo poiché le componenti isotipiche sono ortogonali con somma densa i due enunciati seguono.

Passiamo ora a considerare, nello spazio di Hilbert delle funzioni L^2 su G, il sottospazio $L^2_c(G)$ delle funzioni di classe, si ha.

Teorema. *I caratteri irriducibili sono una base ortonormale di $L^2_c(G)$.*

Dim. Una funzione di classe è una funzione per cui $f(x) = f(g^{-1}xg)$ per ogni $g \in G$.

Sviluppiamo in serie $f = \sum_i f_i$ con $f_i \in V_i^* \otimes V_i$. Poichè gli spazi $V_i^* \otimes V_i$ sono stabili per le azioni del gruppo, per la unicità della espansione in serie segue che ogni f_i è invariante, i.e. una funzione di classe.

In $V_i^* \otimes V_i$ i soli invarianti per coniugazione sono i multipli dell'identità che corrisponde al carattere irriducibile.

Esercizio *Lo spazio delle funzioni di classe è il centro di $L^2(G)$.*

Per un gruppo G finito si ha la decomposizione $\mathbb{C}[G] = \oplus_i^m M_{h_i}(\mathbb{C})$.

Gli m blocchi corrispondono alle m rappresentazioni irriducibili.

Come corollario abbiamo i Teoremi di Burnside:

Corollario-Esercizio. *Il numero delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito G è uguale al numero delle classi coniugate in G.*

Se $m_1, \ldots, m_k$ sono le dimensioni delle rappresentazioni irriducibili di G si ha $|G| = \sum_i m_i^2$.

6.3 Esempi e corollari.

Abbiamo visto che le funzioni rappresentative di un prodotto $G \times K$ di due gruppi sono i prodotti delle rispettive funzioni rappresentative, se ne deduce che

Corollario. *Una rappresentazione irriducibile di dimensione finita di $G \times K$ è della forma $U \otimes V$ con U rappresentazione irriducibile di G e V di K.*

Un esempio essenziale è il seguente;

Sia G un sottogruppo compatto del gruppo delle matrici unitarie $U(n, \mathbb{C})$ ossia un gruppo compatto lineare (vedremo che è un gruppo di Lie). Consideriamo le inclusioni $U(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C}) \subset M(n, \mathbb{C})$ dove $GL(n, \mathbb{C})$ è il gruppo di tutte le matrici invertibili e $M(n, \mathbb{C})$ lo spazio di tutte le matrici.

Le due azioni (destra e sinistra) del gruppo lineare su $M(n, \mathbb{C})$ inducono azioni, per ogni k sullo spazio P^k dei polinomi omogenei di grado k su $M(n, \mathbb{C})$ ed anche sullo spazio P^k/d^h delle funzioni razionali del tipo descritto ed in cui d è il determinante (della matrice). La somma $\sum_{k,h} P^k/d^h$ è un algebra di funzioni somma di spazi di dimensione finita stabili per le due azioni.

Pertanto se restringiamo tali funzioni al gruppo compatto G abbiamo un'algebra B di funzioni rappresentative.

Teorema. *B è l'algebra di tutte le funzioni rappresentative.*

Dim. Basta provare che B è densa nell'algebra delle funzioni continue, perchè se lo proviamo ogni funzione rappresentativa è limite di funzioni in B. Ma prendendo tale funzione in una componente isotipica abbiamo lo stesso enunciato sulla componente. Siccome le componenti isotipiche sono di dimensione finita i soli sottospazi densi sono lo spazio stesso.

Per provare la densità basta usare il teorema di Stone Weierstrass e verificare che B è un'algebra che separa i punti ed è autoconiugata.

Ora B come algebra è generata dalle coordinate delle matrici e dall'inverso del determinante, le coordinate certamente separano i punti e le loro coniugate sono coordinate della aggiunta che per ipotesi è l'inversa e quindi sono polinomi nelle coordinate delle matrici e nell'inverso del determinante.

Prenderemo questo teorema come base per la relazione fra gruppi compatti e gruppi algebrici riduttivi.

Corollario Serie di Fourier. *Le funzioni rappresentative di* $S^1 := \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$ *sono i polinomi di Laurent* $\sum_{i=-h}^{k} a_i z^i$*. Si identifica il duale* $\hat{S}^1 = \mathbb{Z}$*, i caratteri irriducibili sono 1-dimensionali e sono i monomi* $z^i, \ i \in \mathbb{Z}$*.*

Più in generale per $(S^1)^k$ abbiamo come caratteri irriducibili i monomi $z_1^{h_1} \dots z_k^{h_k}$.

ESEMPIO $SU(2, \mathbb{C})$ questo gruppo opera per ogni n sullo spazio vettoriale V_n dei polinomi omogenei di grado n in due variabli x, y pensate come funzioni su $\mathbb{C}^2$ agendo per sostituzione lineare sulle variabili ovvero

$$(Af)(v) := f(A^{-1}v).$$

Lemma. V_n *è una rappresentazione irriducibile.*

Dim. Invece di provare la irriducibilità rispetto ad $SU(2, \mathbb{C})$ possiamo farlo per la sua algebra di Lie $su(2, \mathbb{C})$. Per quasta possiamo complessificarla e ridurci a provare la irriducibilità rispetto alla algebra di Lie $sl(2, \mathbb{C})$ che ha base:

$$e := \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad f := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad h := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

Dalle definizioni si verifica facilmente che questi operatori agiscono sui polinomi come gli operatori differenziali:

$$h = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \ e = -y\frac{\partial}{\partial x}, \ f = -x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Sui polinomi omogenei di grado n, con base i monomi $u_i := (-1)^i y^{n-i} x^i$ abbiamo:

$$hu_i = (n - 2i)u_i \quad fu_i = (n - i)u_{i+1} \quad eu_i = iu_{i-1}.$$

Segue facilmente che il modulo è irriducibile e lo lasciamo per esercizio. $\square$

Ogni matrice di $SU(2, \mathbb{C})$ è coniugata ad una matrice diagonale del tipo

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{vmatrix}, \ |\alpha| = 1$$

inoltre

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \overline{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix},$$

sono coniugate pertanto le funzioni su $SU(2, \mathbb{C})$ invarianti per coniugazione si restringono sulle matrici diagonali alle funzioni $f(\alpha) = f(\overline{\alpha})$.

La matrice $\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{vmatrix}$ opera trasformando $x \to \overline{\alpha}x, \quad y \to \alpha y$ pertanto un monomio $x^h y^k$ si trasforma in $\alpha^{k-h} x^h y^k$ pertanto la traccia di tale operatore sullo spazio dei polinomi omogenei di grado n è:

$$t_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-2k}.$$

È evidente che i polinomi t_n sono una base lineare dei polinomi di Laurent in α che sono invarianti rispetto allo scambio di α con α^{-1}.

Questi polinomi sono densi nelle funzioni invarianti per tale scambio e ne segue quindi che i caratteri t_n generano uno spazio denso nelle funzioni di classe. Segue che le rappresentazioni V_n esauriscono la lista delle rappresentazioni irriducibili di $SU(2, \mathbb{C})$.

OSSERVAZIONE. $Gl(2, \mathbb{C})$.

L'algebra di Lie dei campi vettoriali associati alla azione lineare di $Gl(2, \mathbb{C})$ sullo spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ è isomorfa all'algebra delle matrici 2×2 e si decompone come somma dirtta die un'algebra di dimensione 1 generata da $D = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ e l'algebra tridimensionale $sl(2, \mathcal{C})$.

7 Dualità di Tannaka

Vogliamo spiegare in vari modi il legame profondo che vi è fra gruppi compatti ed una classe particolare di gruppi algebrici, i gruppi riduttivi. Vi sono vari modi di procedere, dipendenti da cosa si voglia mettere in evidenza, il modo più generale passa attraverso una forma di dualità. la dualità di cui stiamo parlando è quella fra spazi topologici o varietà ed algebre di funzioni. L'idea generale è che sotto opportune ipotesi, una opportuna algebra A di funzioni su uno spazio X permette di ricostruire X come suo *spettro.* In altre parole, dato un punto $x \in X$ la valutazione delle funzioni $f \to f(x)$ fornisce un omomorfismo da A ai numeri complessi o reali a seconda che l'algebra sia formata da funzioni complesse o reali. Sotto ipotesi opportune, viceversa un omomorfismo di A nei numeri corrisponde ad un unico punto, inoltre la struttura dello spazio X si ricostruisce da A.

Un esempio generale è la *trasformata di Gelfand* fra spazi localmente compatti e C^*algebre. Un'altra classe generale si ha con le varietà algebriche affini e le loro algebre di funzioni regolari.

Il terzo esempio, che ci concerne direttamente, è la ricostruzione di un gruppo compatto a partire dalle funzioni rappresentative.

7.1 Algebre di Hopf. Seguendo le idee prima accnnate vogliamo ricostruire un gruppo compatto a partire dall'algebra delle funzioni rappresentative. per fare questo dobbiamo sfruttare il fatto che tale algebra ha una struttura più ricca, quella di *algebra di Hopf*, vogliamo iniziare ad illustrarla.

Preso un gruppo topologico G ed una funzione rappresentativa $f(g)$ abbiamo visto che $f(xy) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(y)$ e, se scegliamo le a_i linearmente indipendenti abbiamo che sia le a_i che le b_i sono funzioni rappresentative. Poniamo $\Delta f(x,y) := f(xy)$.
Inoltre la presa la funzione $f^s(g) := f(g^{-1})$ abbiamo

$$f^s(xy) = f(y^{-1}x^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(y^{-1})b_i(x^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^s(y)b_i^s(x). \tag{7.1.1}$$

Abbiamo visto inoltre in 1.2 che, dati due gruppi topologici G_1, G_2 l'algebra delle funzioni rappresentative $\mathcal{T}_{G_1 \times G_2}$ si identifica al prodotto tensoriale $\mathcal{T}_{G_1} \otimes \mathcal{T}_{G_2}$. Inoltre, se $\rho : G_1 \to G_2$ è un omomorfismo esso induce un omomorfismo di algebre di funzioni:

$$\rho^* f(u) := f(\rho(u)). \tag{7.1.2}$$

Se $f(g)$ è una funzione rappresentativa di G_2 abbiamo $f(xy) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(y)$ e:

$$\rho^* f(uv) = f(\rho(uv)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\rho(u))b_i(\rho(v)) = \sum_{i=1}^{n} \rho^* a_i(u)\rho^* b_i(v)$$

L'algebra $A := \mathcal{T}_G$ possiede per definizione una moltiplicazione $m : A \otimes A \to A, \quad m(f(x) \otimes g(x)) := f(x)g(x)$ associativa (e commutativa) e varie ulteriori strutture algebriche:

(7.1.3) Una comoltiplicazione $\quad \Delta : A \to A \otimes A, \quad \Delta f(x,y) := f(xy).$

(7.1.4) Un antipodo $\quad S : A \to A, \quad Sf(x) := f(x^{-1}).$

(7.1.5) Una counità $\quad \eta : A \to \mathbb{C}, \quad \eta(f) := f(1).$

(7.1.6) Una unità $\quad \epsilon : \mathbb{C} \to A, \quad \epsilon(1) := 1.$

queste strutture verificano varie proprietà formali di compatibilità che, nella teoria generale, vengono prese come assiomi delle *algebre di Hopf*.

Per capire questi assiomi prima di tutto pensiamo ad una algebra come ad uno spazio A con una moltiplicazione $m : A \otimes A \to A$. La proprietà associativa si esprime con la commutatività del diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m\otimes 1} & A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & & & {\scriptstyle 1}\downarrow \\ A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{1\otimes m} & A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

Date due algebre A, B $A \otimes B$ è un algebra con la moltiplicazione:

$$A \otimes B \otimes A \otimes B \xrightarrow{1\otimes\tau\otimes 1} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{m\otimes m} A \otimes B, \quad \tau(b \otimes a) := a \otimes b.$$

Una *coalgebra* si definisce per dualità come un morfismo $\Delta : A \to A \otimes A$.

In alcuni casi questa dualità non è solo formale.

Ad esempio se A è un'algebra di dimensione finita possiamo identificare $(A \otimes A)^* = A^* \otimes A^*$, se $m : A \otimes A \to A$ è una moltiplicazione la duale $m^* : A^* \to A^* \otimes A^*$ è una comoltiplicazione, m è associativa se e solo se m^* è coassociativa.

ESEMPIO Le matrici con coordinate x_{ij}, base duale delle matrici elementari e_{ij} e comoltiplicazione:

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_h x_{ih} \otimes x_{hj}$$

Come nel caso delle algebre, date due coalgebre ne possiamo fare il prodotto tensoriale:

$$A \otimes B \xrightarrow{\Delta\otimes\Delta} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{1\otimes\tau\otimes 1} A \otimes B \otimes A \otimes B, \quad \tau(b \otimes a) := a \otimes b.$$

1) Δ è un omomorfismo di algebre ed è *coassociativa*, ovvero è commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A & \xrightarrow{\Delta\otimes 1} & A \otimes A \otimes A \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & & & {\scriptstyle 1}\downarrow \\ A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A & \xrightarrow{1\otimes\Delta} & A \otimes A \otimes A \end{array}$$

2) m è un omomorfismo di coalgebre, infatti $\Delta fg = f(xy)g(xy) = \Delta f \Delta g$.

$A \otimes A$ è una coalgebra tramite $1 \otimes \tau \otimes 1 \circ \Delta \otimes \Delta$ ed è commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ {\scriptstyle 1\otimes\tau\otimes 1\circ\Delta\otimes\Delta}\downarrow & & {\scriptstyle\Delta}\downarrow \\ (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) & \xrightarrow{m\otimes m} & A \otimes A \end{array}$$

3) L'antipodo S è un antiomomorfismo di algebre[4], $fg(x^{-1}) = f(x^{-1})g(x^{-1})$, e di coalgebre (cf 5.1.1) ovvero sono commutativi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ {\scriptstyle\tau\circ S\otimes S}\downarrow & & {\scriptstyle S}\downarrow \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau\circ S\otimes S} \\ A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \end{array}$$

[4]nel caso delle funzioni la moltiplicazione è commutativa e non si distingue fra omomorfismo ed anti omomorfismo

4) L'antipodo fornisce una specie di inverso, nel senso che $f(xx^{-1}) = f(x^{-1}x) = f(1)$ che diagrammaticamente si legge:

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{1 \otimes S} A \otimes A \xrightarrow{m} A, \quad m \circ 1 \otimes S \circ \Delta = \epsilon \circ \eta$$

Ugualmente $m \circ S \otimes 1 \circ \Delta = \epsilon \circ \eta$.

5) La proprietà dell'unità si esprime con i diagrammi commutativi:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes A & \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} & A \otimes A \\ 1 \big\downarrow & & m \big\downarrow \\ A & \xrightarrow{1} & A \end{array} , \qquad \begin{array}{ccc} A \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{1 \otimes \epsilon} & A \otimes A \\ 1 \big\downarrow & & m \big\downarrow \\ A & \xrightarrow{1} & A \end{array}$$

6) La counità è duale della unità ed il diagramma duale:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes A & \xleftarrow{\eta \otimes 1} & A \otimes A \\ 1 \big\uparrow & & \Delta \big\uparrow \\ A & \xleftarrow{1} & A \end{array} , \qquad \begin{array}{ccc} A \otimes \mathbb{C} & \xleftarrow{1 \otimes \eta} & A \otimes A \\ 1 \big\uparrow & & \Delta \big\uparrow \\ A & \xleftarrow{1} & A \end{array}$$

7) La compatibilità fra antipodo, unità e counità si esprimono con:

(7.1.7) $$S \circ \epsilon = \epsilon, \quad \eta \circ S = \eta, \quad \eta \circ \epsilon = 1_{\mathbb{C}}.$$

nel caso delle funzioni questo esprime il fatto che $f(xx^{-1}) = f(x^{-1}x) = f(1)$. Inoltre la funzione 1 valutata in 1 vale 1.

Avendo in mente il nostro esempio prendiamo una algebra di Hopf commutativa[5] A.

Preso un anello commutative B algebra sull'anello dei coefficienti di A, sia $A(B) := \{p : A \to B\}$ con p un omomorfismo di algebre.

Vogliamo provare che $A(B)$ possiede, in modo naturale, una struttura di gruppo. Infatti, prima di tutto la moltiplicazione si ottiene ponendo $f.g(a) = m(f \otimes g(\Delta(a))$ dove m è la moltiplicazione da $B \otimes B$ a B. In altre parole se $\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i$ si ha $f.g(a) = \sum_i f(a_i)g(b_i)$. L'unità del gruppo è η pensata a valori in B. L'inverso si pone $f^{-1}(a) := f(S(a))$. Dall'assioma 4) si ha $\epsilon\eta(a) = \sum_i a_i S(b_i)$ quindi $\epsilon\eta(a) = \sum_i f(a_i)f(S(b_i)) = f.f^{-1}(a)$.

È molto conveniente utilizzare una *notazione duale* invece di pensare agli elementi di $A(B)$ come funzioni su A pensiamo dualmente ad A come funzioni su $A(B)$ e scriviamo $a(p)$ invece di $p(a)$. Per definizione essendo p un omomorfismo abbiamo che $(ab)(p) = a(p)b(p)$

[5] Dire che una algebra di Hopf è commutativa vuol dire che la sua moltiplicazione è commutativa, altrimenti parliamo di algebra cocommutativa.

quindi il prodotto in A diviene il prodotto di funzioni. Inoltre nello stesso modo associamo agli elementi di $A \otimes A$ funzioni di due variabili secondo la regola $a \otimes b(p,q) := a(p)b(q)$. Vediamo dunque che, dato $a \in A$ l'elemento $\Delta(a)$ corrisponde per definizione ad $a(pq)$, l'elemento $S(a)$ alla funzione $a(p^{-1})$.

$$\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i \implies a(pq) = \sum_i a_i(p)b_i(q). \tag{7.1.8}$$

Supponiamo ora che A sia un'algebra di Hopf su $\mathbb{R}$ e prendiamo il gruppo $A(\mathbb{R})$ dei punti reali. Vogliamo dare ad $A(\mathbb{R})$ la struttura di gruppo topologico.

Definiamo prima di tutto una base di intorni di 1 come segue, presi elementi $f_1, \dots, f_k \in A$ poniamo:

$$V(f_1, \dots, f_k, \epsilon) := \{p \in A(\mathbb{R}) \,|\, |f_i(p) - f_i(1)| < \epsilon, \ i = 1, \dots, k\}. \tag{7.1.9}$$

È evidente che questi insiemi soddisfano le proprietà di una base di intorni di 1.

Dato un gruppo G ed una base di intorni U_i di 1 possiamo definire in G una topologia prendendo come base di intorni di un punto g gli insiemi $U_i g$. Affinché si ottenga un gruppo topologico sono necessarie alcune restrizioni sugli aperti U_i.

i) Si deve imporre che, per ogni i posto $U_i^{-1} := \{g^{-1} \,|\, g \in U_i\}$ dobbiamo avere che U_i^{-1} è un intorno di 1.

Evidentemente:

$$V(f_1, \dots, f_k, \epsilon)^{-1} = V(Sf_1, \dots, Sf_k, \epsilon).$$

ii) Dato U_i deve esistere un U_j con $U_j^2 \subset U_i$ (dove $U_j^2 = \{ab \,|\, a, b \in U_j\}$).

Ora se $\Delta(f_i) = \sum_{k=1}^N a_{ik} \otimes b_{ik}$ abbiamo che:

$$|f_i(pq) - f_i(1)| = |\sum_{k=1}^N a_{ik}(p)b_{ik}(q) - f_i(1)| = |\sum_{k=1}^N (a_{ik}(p)b_{ik}(q) - a_{ik}(1)b_{ik}(1))|$$

$$\leq \sum_{k=1}^N |a_{ik}(p)b_{ik}(q) - a_{ik}(1)b_{ik}(1)| \leq \sum_{k=1}^N |a_{ik}(p)|\,|b_{ik}(q) - b_{ik}(1)| + |a_{ik}(p) - a_{ik}(1)|\,|b_{ik}(1)|$$

Per continuità si ha che, se $a_{ik}(p), b_{ik}(p)$ sono abbastanza vicini ad $a_{ik}(1), b_{ik}(1)$ si ha che $|f_i(pq) - f_i(1)| < \epsilon$.

Se come algebra di Hopf prendiamo le funzioni rappresentative *reali* che indichiamo con $\mathcal{R}_G$ su un gruppo topologico G abbiamo un omomorfismo $\rho : G \to \mathcal{R}_G(\mathbb{R})$ dato, associando a $p \in G$ la valutazione delle funzioni in p, ovvero $f(\rho(p)) := f(p)$.

Lemma. *ρ è un omomorfismo continuo.*

Dim. Il fatto che ρ sia un omomorfismo viene dalle definizioni. Per la continuità basta verificarla per gli intorni di 1. Preso un intorno $V(f_1, \dots, f_k, \epsilon)$ si ha che:

$$\rho^{-1}V(f_1, \dots, f_k, \epsilon) = \{p \in G \,|\, |f_i(p) - f_i(1)| < \epsilon, \ i = 1, \dots, k\}.$$

Essendo le f_i per ipotesi continue su G si ha che $\rho^{-1}V(f_1, \dots, f_k, \epsilon)$ è un aperto. $\square$

Per completare l'analisi dobbiamo introdurre un nuovo ingrediente che rappresenti la integrazione nel caso dei gruppi compatti.

Definizione. *Un integrale su un'algebra di Hopf A su $\mathbb{R}$ è una funzione lineare $I : A \to \mathbb{R}$ che verifichi i seguenti assiomi. Identifichiamo tramite ϵ il campo $\mathbb{R}$ ai multipli di 1 in A.*

i) Positività: *se $a \neq 0$ si ha $I(a^2) > 0$.*

ii) Invarianza: *se $\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i$ si ha:*

$$I(a) = \sum_i I(a_i)b_i = \sum_i a_i I(b_i).$$

Una conseguenza di questa identità è, se $p \in A(\mathbb{R})$ è un punto:

$$I(a) = \sum_i I(a_i)b_i(p) = \sum_i a_i(p)I(b_i). \tag{7.1.10}$$

Il primo assioma implica che la funzione $I(a^2)$ è una forma quadratica positiva, la cui forma bilineare associata è $I(ab)$ ed è un prodotto scalare.

Prendiamo ora $a \in A$ sia $\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i$ e V il sottospazio generato dagli elementi a_i. Fissiamo una base ortonormale e_i di V per la forma $I(x^2)$, quindi $I(e_i e_j) = \delta^i_j$.

Possiamo riscrivere $\Delta(a) = \sum_i e_i \otimes c_i$ ed abbiamo (5.1.10 applicata a a^2):

$$\Delta(a^2) = \Delta(a)^2 = \sum_{ij} e_i e_j \otimes c_i c_j, \quad I(a^2) = \sum_{ij} I(e_i e_j)c_i(p)c_j(p) = \sum_i c_i(p)^2. \tag{7.1.11}$$

Da 5.1.8 abbiamo anche, da 5.1.11 e dalla diseguaglianza di Schwarz:

$$a(p) = a(1p) = \sum_i e_i(1)c_i(p) \implies |a(p)| \leq \sqrt{\sum e_i(1)^2}\sqrt{I(a^2)}. \tag{7.1.12}$$

Segue che, per ogni $a \in A$ i valori $a(p), \ p \in A(\mathbb{R})$ sono in un intervallo limitato I_a.

Prendiamo dunque l'applicazione

$$j : A(\mathbb{R}) \to \prod_{a \in A} I_a, \quad j(p) := \{a(p)\}_{a \in A}.$$

Vogliamo provare che j è un omeomorfismo di $A(\mathbb{R})$ con un chiuso del compatto $\prod_{a\in A} I_a$.

Prima di tutto per definizione un punto p è un omomorfismo di A in $\mathbb{R}$ quindi è una famiglia $\{a(p)\}_{a\in A}$ di elementi che verificano le restrizioni

$$1(p) = 1, \quad (\alpha a + \beta b)(p) = \alpha a(p) + \beta b(p), \quad (ab)(p) = a(p)b(p).$$

Queste equazioni definiscono un insieme chiuso X, e quindi compatto, di $\prod_{a\in A} I_a$. Ora la topologia che abbiamo messo è proprio la restrizione a X della topologia prodotto.

Ad una algbra di Hopf A commutativa con un integrale, abbiamo quindi associato un gruppo compatto $A(\mathbb{R})$. Inoltre abbiamo un omomorfismo j_A da A all'algebra delle funzioni reali rappresentative su $A(\mathbb{R})$, definito da $j_A(a)(p) := a(p)$. Si vede facilmente che tale omomorfismo è compatibile con le strutture di algebre di Hopf. Se j_A è iniettivo diremo che A è *ridotta.*

Teorema dualità di Tannaka. *Le corrispondenze $G \to \mathcal{R}_G$ e $A \to A(\mathbb{R})$ sono equivalenze inverse fra la categoria dei gruppi compatti e la categoria delle algebre di Hopf commutative con un integrale e ridotte.*

Dim. Bisogna verificare varie cose:

i) Data una algbra di Hopf A commutativa con un integrale, si ha che $j_A(A)$ è l'algebra delle funzioni reali rappresentative su $A(\mathbb{R})$.

ii) Viceversa, dato G dobbiamo provare che, dato un gruppo compatto $\mathcal{R}_G(\mathbb{R}) = G$.

i) Per costruzione $j_A(A)$ è contenuto nell'algebra delle funzioni reali rappresentative su $A(\mathbb{R})$. Complessificando dobbiamo mostrare che $j_A(A) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è l'algebra delle funzioni complesse rappresentative su $A(\mathbb{R})$.

La formula $\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i$ e $a(pq) = \sum_i a_i(p) b_i(q)$ mostra che $j_A(A) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è invariante per le azioni destra e sinistra, quindi $j_A(A) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \oplus_i V_i \otimes V_i^*$ è una somma diretta di componenti isotipiche. Se non fosse tutta l'algebra avremmo una qualche componente isotipica $V \otimes V^*$ non in $j_A(A) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e quindi ad essa ortogonale. Questo è assurdo poiché per costruzione le funzioni di $j_A(A) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ soddisfano le condizioni del teorema di Stone Weierstrass e quindi sono dense nelle funzioni continue.

ii) Utilizzeremo il seguente:

Lemma. *Sia $K \subset G$ una inclusione di gruppi compatti.*

i) La restrizione di una funzione rappresentativa per G a K è una funzione rappresentativa di K.

ii) Se $K \neq G$ esiste una funzione rappresentativa $f \neq 0$ di G che ristretta a K è 0.

Dim. Il primo passo è evidente. Per il secondo osserviamo che, decomposto $\mathcal{R}_G = R \oplus \oplus_i M_i$ come rappresentazioni di $G \times G$, se la restrizione a K di tali funzioni non ha nucleo si deve avere che ogni M_i si restringe a K ad una rappresntazione che non contiene la rappresentazione banale (visto che la rappresentazione banale si ha solo per le funzioni costanti). Ne segue che, per ogni $f \in M_i$ si deve avere $\int_K f(k)dk = 0$, da cui segue che, per ogni $f \in \mathcal{R}_G$ si ha $\int_K f(k)dk = \int_G f(g)dkg$.

Per continuità e densità ne segue che $\int_K f(k)dk = \int_G f(g)dkg$ per ogni funzione continua su G. Qesto è assurdo se $K \neq G$ in quanto esiste certamente una funzione f su G tale che $f \neq 0,\ f(g) \geq 0, \forall g \in G$ e $f(k) = 0$ se $k \in K$. Per cui $\int_K f(k)dk = 0,\ \int_G f(g)dkg > 0$.
$\square$

Fine della dimostrazione del Teorema di dualità.

ii) Per costruzione abbiamo un morfismo che è evidentemente continuo $i : G \to R_G(\mathbb{R})$ semplicemente, data una funzione $f \in R_G$ ed un punto $g \in G$ possiamo valutare f in g avendo un punto di $\mathcal{R}_G(\mathbb{R})$. Se $g \neq 1$ esiste una funzione rappresentativa f con $f(1) \neq f(g)$ e quindi i è iniettivo.

Per la parte i) l'algebra $\mathcal{R}_G$ si identifica all'algebra delle funzioni rappresentative su $\mathcal{R}_G(\mathbb{R})$. Se avessimo che $i(G) \subsetneq \mathcal{R}_G(\mathbb{R})$ esisterebbe una funzione rappresentativa non nulla in $\mathcal{R}_G$ che si annulla su G il che è assurdo. $\square$

7.2 Gruppi compatti e gruppi algebrici.

Iniziamo con

Teorema. *Un gruppo di Lie compatto ha una rappresentazione lineare fedele.*

Dim. Sia V_i la lista delle rappresentazioni irriducibili e sia K_i il nucleo della rappresentazione V_i. Poiché le funzioni rappresentative $\oplus End(V_i)$ sono dense si ha che l'intersezione di tutti i nuclei K_i è 1. Pertanto la intersezione delle algebre di Lie $L(K_i)$ è 0. Pertanto esiste una intersezione finita di tale algebre di Lie che è 0 ovvero esiste una somma diretta finita di V_i per cui l'azione di G ha un nucleo discreto. Poiché G è compatto tale nucleo è finito e per ogni elemento doverso da 1 esiste una rappresentazione di dimensione finita in cui tale elemento non è nel nucleo. Sommando queste rappresentazioni si ha l'asserto.
$\square$

Sia ora K un gruppo compatto contenuto in $GL(n, \mathbb{C})$. Abbiamo visto che a meno di coniugazione si può supporre che $K \subset U(n, \mathbb{C})$.

Consideriamo le funzioni $\overline{y}_{ij}$ su K indotte per restrizione dalle coordinate x_{ij} delle matrici.

Ovviamente queste sono i coefficienti matriciali della rappresentazione $\mathbb{C}^n$ data dalla inclusione $K \subset GL(n, \mathbb{C})$.

Sia d il determinante della matrice delle coordinate, evidentemente d^{-1} è esso stesso un coefficiente matriciale (della duale della potenza esterna $\wedge^n\mathbb{C}$).

Pertanto la sottoalgebra di funzioni $A_K := \mathbb{C}[\overline{y}_{ij}, d^{-1}]$ è contenuta nell'algebra $\mathcal{T}_K$ delle funzioni rappresentative.

Teorema. $A_K := \mathbb{C}[\overline{y}_{ij}, d^{-1}] = \mathcal{T}_K$.

Dim. Lo spazio vettoriale generato dalle funzioni $\overline{y}_{ij}, d^{-1}$ è chiaramente stabile per le azioni destra e sinistra di K pertanto anche A_K è stabile per tali azioni e, dalla teoria della semisemplicità si ha dunque $A_K = \oplus_{i \in I} V_i \otimes V_i^*$ dove I è un insieme di rappresentazioni irriducibili. Se avessimo $A_K \subsetneq \mathcal{T}_K$ esisterebbe una rappresentazione irriducibile W non nella lista I. Pertanto lo spazio $W \otimes W^*$ è ortogonale ad A. Basta far vedere che non vi sono funzioni ortogonali ad A e per questo basta far vedere che A è denso nelle funzioni continue.

Per questo applichiamo il teorema di Stone Weiestrass che assicura che un'algebra di funzioni complesse su uno spazio compatto è densa se separa i punti e se, insieme ad ogni funzione f vi è anche la coniugata. Le funzioni $\overline{y}_{ij}$ sono coordinate e quindi separano i punti, per quanto riguarda le coniugate, prima di tutto essendo K formato da matrici unitarie la coniugata di d è d^{-1}. Basta poi osservare che le coordinate coniugate sono anche le coordinate della matrice coniugata trasposta, questa su K è l'inversa e quindi le sue coordinate si scrivono come polinomi nelle $\overline{y}_{ij}, d^{-1}$. □

Questo teorema ha un importante corollario (useremo un po liberamente le manipolazioni sui tensori). Sia come prima $K \subset GL(V)$ un gruppo di Lie compatto.

Corollario. *Ogni rappresentazione irriducibile N di K è della forma $d^m \otimes P$ dove d è il determinate, $m \in \mathbb{Z}$ e finalmente P è contenuta in una potenza tensoriale $V^{\otimes k}$ (oppure $(V^*)^{\otimes k}$.*

Dim. Dalla teoria dei coefficienti matriciali appena svolta sappiamo che, pur di moltiplicare per una opportuna potenza di d una rappresentazione irriducibile ha i coefficienti matriciali funzioni delle variabili $x_{i,j}$ coordinate dello spazio $End(V) = V \otimes V^*$. I polinomi di grado k nelle $x_{i,j}$ su $End(V)$ possiamo pensarli come elementi della potenza simmetrica $S^k(V \otimes V^*)^* = S^k(V^* \otimes V)$ a sua volta $S^k(V^* \otimes V)$ è quoziente della potenza tensoriale $(V^* \otimes V)^{\otimes k}$. A seconda se ci restringiamo sulla azione destra o sinistra di G possiamo pensare a $(V^* \otimes V)^{\otimes k}$ come una somma diretta di potenze tensoriali di V o di V^*. Se una rappresntazione irriducibile appare nel quoziente di una somma diretta di moduli deve appartenere ad uno dei moduli. □

7.3 Complessificazione di un gruppo compatto Sia di nuovo K un gruppo compatto, $\mathfrak{k} \subset u(n, \mathbb{C})$ l'algebra di Lie di K. Complessifichiamo $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{k} + i\mathfrak{k}$.

Lemma. *i) La applicazione $j : K \times \mathfrak{k} \to GL(n, \mathbb{C})$ data da $(x, a) \to xe^{ia}$ è un diffeomorfismo sulla sua immagine $K_{\mathbb{C}} = Ke^{i\mathfrak{k}}$ che è una sottovarietà chiusa.*

ii) Se K^0 è la componente connessa di 1 in K e $K = \cup_{i=1}^m k_i K^0$ è la unione finita delle sue classi laterali disgiunte si ha che $K_{\mathbb{C}} = \cup_{i=1}^m k_i K_{\mathbb{C}}^0$, una unione disgiunta di componenti connesse.

iii) $K_{\mathbb{C}}$ è un gruppo di Lie e $K_{\mathbb{C}}^0$ è il sottogruppo di Lie di $GL(n, \mathbb{C})$ connesso e di algebra di Lie $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$.

Dim. Poichè $(x, a) \to xe^{ia}$ è un diffeomorfismo di $U(n, \mathbb{C}) \times u(n, \mathbb{C})$ a $GL(n, \mathbb{C})$ la parte i) e ii) segue.

È anche chiaro che $j(K^0 \times \mathfrak{k})$ è contenuta nel sottogruppo di Lie di $GL(n, \mathbb{C})$ di algebra di Lie $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ e ha la stessa dimensione di tale gruppo di Lie, la teoria delle distribuzioni integrabili implica che dunque coincide con tale gruppo. Infine $K_{\mathbb{C}}$ è un gruppo di Lie, infatti se $k \in K$ ed $a \in \mathfrak{k}$ si ha $Ad(k)(a) \in \mathfrak{k}$ e $k\, esp(ia)k^{-1} = esp(iAd(k)(a))$. $\square$

ESEMPI
La complessificazione di $U(n, \mathbb{C})$ è $GL(n, \mathbb{C})$.
La complessificazione di $SU(n, \mathbb{C})$ è $SL(n, \mathbb{C})$.
La complessificazione di $O(n, \mathbb{R})$ è $O(n, \mathbb{C})$.
La complessificazione di $SO(n, \mathbb{C})$ è $SO(n, \mathbb{C})$.
La complessificazione di S^1 è $\mathbb{C}^*$, più in generale la complessificazione del gruppo delle matrici diagonali unitarie è il gruppo delle matrici diagonali complesse.
La complessificazione di $Sp(n, \mathbb{H})$ è $Sp(2n, \mathbb{C})$ (gruppi simplettici).

Il passo successivo consiste nel dimostrare che tale gruppo è un gruppo algebrico riduttivo. Per il momento non diamo la definizione generale di gruppo algebrico riduttivo, la definizione generale[6] è equivalente alla proprietà che il gruppo algebrico (in un opportuno sistema di coordinate) è *autoaggiunto*. Questa proprietà è vera per costruzione per la complessificazione di un sottogruppo chiuso del gruppo unitario.

Ricordiamo che, dato un insieme di punti $S \subset \mathbb{C}^n$ l'insieme $I_S \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ dei polinomi che svaniscono su S è un ideale di $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ e l'insieme:

$$\overline{S} := V(I_S) := \{p \in \mathbb{C}^n \mid f(p) = 0, \quad \forall f \in I_S\}$$

è una *varietà algebrica affine.* Le varietà affini formano i chiusi di una topologia detta topologia di Zariski e $\overline{S}$ è la chiusura di Zariski di S.

La nozione si generalizza anche leggermente. se $f(x_1, \ldots, x_n)$ è un polinomio sia $U_f := \{p \in \mathbb{C}^n \mid f(p) \neq 0\}$. U_f si identifica alla sottovarietà di $\mathbb{C}^{n+1}$ definita dalla equazione $f(x_1, \ldots, x_n)y - 1 = 0$.

In particolare $GL(n, \mathbb{C})$ si identifica alla sottovarietà di $\mathbb{C}^{n^2+1}$ data da $\det(x_{ij})y - 1 = 0$.

Definizione. *Un gruppo lineare algebrico è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{C})$ che sia una sottovarietà algebrica (ovvero definito dall'annullarsi di equazioni polinomiali nelle variabili $x_{ij}, y = \det(x_{ij})^{-1}$).*

La definizione di topologia di Zariski è tale per cui una funzione data da coordinate polinomiali è continua in tale topologia, segue:

[6] Un gruppo algebrico è riduttivo se non possiede sottogruppi normali non banali formati unicamente da matrici unipotenti.

Lemma. *Se $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ è un sottogruppo anche la sua chiusura di Zariski è un sottogruppo.*

Un fatto elementare che utilizzaremo consiste nel dire che, se V è una varietà affine allora V è anche chiusa nella usuale topologia di $\mathbb{C}^n$ inoltre ogni componente connessa di V in questa topologia è una varietà affine.

Teorema. *$K_{\mathbb{C}}$ è la chiusura di Zariski di K, pertanto è un gruppo algebrico.*

Dim. Sia $K'_{\mathbb{C}}$ la chiusura di Zariski di K. Prima di tutto proviamo che $K_{\mathbb{C}} \subset K'_{\mathbb{C}}$. Per questo basta provare che, se $f(x_{ij}, d^{-1})$ è un polinomio che si annulla su K si annulla anche su $K_{\mathbb{C}}$.

Dire che $\mathfrak{k} \subset u(n, \mathbb{C})$ è l'algebra di Lie di K e $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{k} + i\mathfrak{k}$ quella di $K_{\mathbb{C}}$ implica che esistono coordinate lineari complesse $z_1, \ldots, z_k$ per $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ per cui $\mathfrak{k}$ consiste del sottospazio in cui le coordinate sono reali. Se ora $k \in K$ la funzione $f(k\, esp(a))$ è una funzione olomorfa di $a \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ che svanisce per ipotesi sull'algebra di Lie di K, come funzione delle variabili z_i è olomorfa e svanisce se le z_i sono reali, pertanto svanisce su tutta $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. Segue che f svanisce su $K_{\mathbb{C}}$.

Proviamo ora che viceversa $K_{\mathbb{C}}$ è chiuso nella topologia di Zariski. Dalle osservazioni precedentemente fatte basta provarlo nel caso di K connesso. Usiamo coordinate complesse sulle matrici per cui come prima $u(n, \mathbb{C})$ ha coordinate reali. Se $f(x)$ è un polinomio definiamo $\overline{f}$ il polinomio che in un punto x prende come valori $\overline{f(\overline{x})}$, in altre parole i coefficienti di $\overline{f}$ sono i coniugati dei coefficienti di f.

Per costruzione se f svanisce su K anche $\overline{f}$ svanisce su K. Segue immediatamente che l'algebra di Lie di $K'_{\mathbb{C}}$ è la complessificazione di una algebra di Lie $\mathfrak{s}$ con $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{s} \subset u(n, \mathbb{C})$. Se fosse $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{s}$ esisterebbe un gruppo compatto S (la chiusura in $U(n, \mathbb{C})$ del gruppo con algebra di Lie $\mathfrak{s}$) su cui ogni polinomio che svanisce in K svanirebbe. Questo è impossibile, per lo stesso ragionamento fatto nella dualità, infatti consideriamo l'integrale $f \to \int_S f$, questo integrale svanisce su tutte le funzioni rappresentative che corrispondono a rappresentazioni non banali di S e vale 1 sulla funzione 1. Pertanto ristretto alle funzioni rappresentative di K coincide con l'integrale fatto su K. Per densità abbiamo che per ogni funzione continua su S si ha $\int_S f = \int_K f$. Questo è assurdo in quanto, se $K \neq S$ esiste una funzione continua non nulla positiva f con $f = 0$ su K. $\square$

In effetti quello che abbiamo è che:

Corollario. *$K_{\mathbb{C}}$ è lo spettro dell'algebra delle funzioni rappresentative (complesse) su K.*

7.4 Spazi omogenei

Sia ora G un gruppo localmente compatto ed H un suo sottogruppo chiuso e compatto.

tramite la proiezione $p : G \to G/K$ le funzioni continue $C_0(G/K)$ si identificano alle funzioni continue su G invarianti a destra per H. In questa corrispondenza funzioni a supporto compatto su G/K corrispondono a funzioni a supporto compatto su G pertanto integrando tali funzioni con una misura invariante a sinistra si definisce una misura invariante per l'azione di G su G/K, in altre parole la misura μ su G induce una misura $p_*(\mu)$ *distribuzione* su G/K definita canonicamente dalla formula:

$$p_*(\mu)(A) := \mu(p^{-1}A). \tag{7.4.1}$$

Lo spazio $L^2(G/K)$ pertanto si identifica (con la sua norma L^2) con $L^2(G)^K$ funzioni L^2 invarianti a destra per K.

Supponiamo ora che G sia anche lui compatto. Dalla decomposizione $L^2(G) = \overline{\oplus} V_\alpha \otimes V_\alpha^*$ otteniamo la descrizione:

$$L^2(G)^K = \overline{\oplus} V_\alpha \otimes (V_\alpha^*)^K$$

Ad esempio la sfera $S^n = SO(n+1,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R})$ (lo studieremo in seguito) fornisce la teoria delle armoniche sferiche. In questo caso si ha una notevole proprietà (che in generale viene detta appunto *lo spazio omogeneo è sferico*) che implica $\dim(V_\alpha^*)^K = 0, 1$. Da cui si deduce che le rappresentazioni irriducibili che appaiono in $L^2(G/K)$ vi appaiono con molteplicità 1. Questa classe si può descrivere con precisione.

8 Gruppi di Lie

8.1 Rappresentazione aggiunta

Prima di affrontare il tema generale ancora un esempio essenziale.

Consideriamo la azione di coniugazione di G su se stesso ovvero $(g, x) \to gxg^{-1} := Ad(g)(x)$. Ovviamente, per ogni $g \in G$ la trasformazione $Ad(g) : G \to G$ è un diffeomorfismo che manda 1 in 1, pertanto il differenziale di tale trasformazione in 1 è una trasformazione lineare che indicheremo ancora con $Ad(g) : L(G) \to L(G)$, per composizione abbiamo evidentemente $Ad(gh) = Ad(g)Ad(h)$, poiché la matrice del differenziale in coordinate è la matrice Jacobiana evidentemente la rappresentazione $Ad : G \to GL(L(G))$ è continua e C^∞.

Poiché $Ad(g) : G \to G$ è un omomorfismo di gruppi ne segue che:

Teorema. *$Ad(g)$ è un automorfismo della struttura di Algebra di Lie.*

Il secondo punto sta nel calcolare $Ad(exp(sa))$, questo è un gruppo ad un parametro di automorfismi di $L(G)$ come tutti i gruppi ad un paramentro esiste una trasformazione lineare, che chiameremo $ad(a)$ per cui $Ad(exp(sa)) = exp(s\, ad(a)))$.

Teorema. $ad(a)(b) = [a, b]$.

Dim. La dimostrazione è pressocché immediata per i gruppi di matrici $e^{sa}be^{-sa} = (1 + sa + O(s^2))b(1 - sa + O(s^2)) = 1 + s[a, b] + O(s^2)$. In generale possiamo sfruttare il fatto che un gruppo di Lie è localmente un gruppo di matrici.

La applicazione $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ che asocia ad ogni elemento a l'operatore $ad(a)$ è un omomorfismo di algebre di Lie ovvero una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ che viene detta *rappresentazione aggiunta.*

Il nucleo della rappresentazione aggiunta è evidentemente l'insieme degli elementi di $\mathfrak{g}$ che commutano con tutti gli elementi.

8.2 La misura di Haar Per un gruppo di Lie la misura di Haar va vista nel linguaggio delle forme differenziali. Fissata una base di $e_i,\ i = 1, \dots, n$ di $T_1(G)$ abbiamo visto come costruire per ogni e_i un campo vettoriale invariante a sinistra X_i, prendiamo ora punto per punto la base duale agli X_i ottenendo n forme differenziali lineari X^i invarianti a sinistra.

Se $g \in G$ e $L_g : x \to gx$ l'ipotesi è che $dL_g \circ X_i = X_i$, da cui

$$\langle dL_g \circ X_i | X_j \rangle = \langle X_i | L_g^* X_j \rangle = \delta_{ij},\ L_g^* X_j = X^j$$

Il prodotto $X^1 \wedge X^2 \wedge \cdots \wedge X^n$ fornisce dunque una forma differenziale ψ di grado massimo non nulla ed invariante a sinistra $L_g^* \psi = \psi$ che pertanto permette di definire una misura di Haar invariante a sinistra (insieme alla orientazione che supponiamo scelta dalla forma stessa).

$$\int f(x)\psi = \int L_g^*(f(x)\psi) = \int f(gx)\psi.$$

Una diversa base che preservi la orientazione induce un fattore di riscalamento pari al determinante del cambiamento di basi.

Esempio $GL(n, \mathbb{R})$ in coordinate $X := (x_{ij})$, sia $det(X)$ il determinante della matrice delle coordinate, consideriamo poi forma che da la misura di Lebesgue $\psi(X) := \wedge_{ij} dx_{ij}$ (in qualche ordine fissato). Verifichiamo che

$$|det(X)|^{-n} \wedge_{ij} dx_{ij}$$

è la misura invariante (a destra e a sinistra). Se moltiplichiamo per A abbiamo una trasformazione lineare sullo spazio delle matrici il cui determinante Jacobiano è $det(A)^n$ (verificare). Per cui per cambiamento di coordinate (teorema di Fubini)

$$\int f(X)|det(X)|^{-n}\psi(X) = \int f(AX)det(AX)^{-n}\psi(AX) =$$

$$\int f(AX)|det(AX)|^{-n}|det(A)|^n\psi(X) = \int f(AX)|det(X)|^{-n}\psi(X)$$

L'invarianza a sinistra (stesso a destra).

Per $GL(n, \mathbb{C})$ vale una formula simile, in cui la misura di Lebesgue usuale viene moltiplicata per $|\det(X)|^{-2n}$.

Ricordiamo dalla Teoria generale.

Definizione. Un gruppo di Lie G si dice unimodulare se una misura di Haar sinistra è anche destra.

Per capire questo importante concetto dobbiamo fare la seguente osservazione.

Sia $d\mu$ una misura invariante a destra e sia $h \in G$ definiamo una nuova misura $d\mu^h$ dalla formula

$$\int f(x)d\mu^h := \int f(h^{-1}x)d\mu$$

è evidente che.

1. $d\mu^h$ è ancora invariante a destra e
2. $d\mu^{hk} = d(\mu^k)^h$

Dalla unicità a meno di scala della misura di Haar segue che esiste un numero positivo $\chi(h)$ per cui $d\mu^h = \chi(h)d\mu$ ed inoltre $\chi(hk) = \chi(h)\chi(k)$.

Calcoliamo $\chi(h)$ nel caso di un gruppo di Lie e proviamo che:

Teorema. *$\chi(h)$ è il determinante di $Ad(h)$.*

Infatti $\int f(x)d\mu^h := \int f(h^{-1}x)d\mu = \int f(h^{-1}xh)d\mu$ (per invarianza) in altre parole la forma differenziale che esprime $d\mu^h$ coincide con la forma differenziale $Ad(h)^*(d\mu)$.

Per costruzione la forma in oggetto è un multiplo scalare di $d\mu$ e quindi tale scalare si può calcolare calcolando le due forme nel punto 1. Otteniamo il determinante desiderato.

Corollario. *I gruppi compatti sono unimodulari.*
$GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{C})$ sono unimodulari.

Dim. Il fattore $\chi(h)$ è un omomorfismo continuo dal gruppo G al gruppo dei numeri reali positivi, se G è compatto l'immagine di tale ommorfismo è un sottogruppo compatto di $\mathbb{R}^+$ e quindi è 1. Per gli altri gruppi si calcola direttamente.

La più semplice classe di gruppi non unimodulari sono i gruppi B delle matrici triangolari superiori.

Esercizio Scriviamo un elemento di B come $X = DU$ con D diagonale di elementi a_i e U con 1 sulla diagonale. Provare che $Ad(U)$ ha tutti gli autovalori 1 e quindi ha determinante 1, mentre gli autovalori di $Ad(D)$ sono i numeri $a_i a_j^{-1}, \forall i < j$ per cui il determinante è $\prod a_i^{n-2i+1}$

L'esempio piú semplice è il gruppo

$$A_2 := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}^+, \, b \in \mathbb{R}; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

delle trasformazioni affini della retta.

Misure invarianti a destra e a sinistra sono rispettivamente:

$$\frac{da \wedge db}{a^2}, \qquad \frac{da \wedge db}{a}$$

Una conseguenza della non unimodularità si ottiene quando si studia il seguente problema.

Sia G un gruppo di Lie ed H un suo sottogruppo chiuso. L'insieme G/H delle classi laterali gH è una varietà su cui G opera transitivamente ovvero è uno *spazio omogeneo.*

Domanda. È possibile determinare su G/H una misura invariante per l'azione di G?

Guardando alla azione del gruppo affine sulla retta è chiaro che la risposta in generale è NO. La risposta è affermativa se e solo se il carattere χ_G ristretto a H coincide con il carattere χ_H. Infatti osserviamo che lo spazio tangente a G/H nella classe di 1, si può identificare con $L(G)/L(H)$ la moltiplicazione L_h per h a sinistra coincide con il passaggio al quoziente di $Ad(h)$ ovvero il diagramma

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Ad(h)"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ G/H \arrow[r, "L_h"] & G/H \end{tikzcd}$$

commuta. Pertanto il determinante dello Jacobiano di L_h su $L(G)/L(H)$ è proprio il quoziente $\chi_G(h)/\chi_H(h)$.

Si vede facilmente che la condizione di esistenza di una misura invariante è proprio che tali determinanti siano 1.

Un modo utile di esplicitare questa analisi è tramite la introduzione del concetto di *fibrato equivariante.*

Definizione. Un fibrato equivariante V su uno spazio M dotato di una azione di un gruppo G consiste di un fibrato V su M, di una azione di G su V per cui la proiezione $p : V \to M$ sia $G-$equivariante ed inoltre tale che, per ogni $p \in M, \forall g \in G$ la trasformazione $g : V_p \to V_{gp}$ sia lineare.

Naturalmente nel caso delle varietà C^∞ si suppone anche che tutti i dati siano C^∞.

Proposizione. *Un fibrato $G-$equivariante su G/H è determinato in modo unico dalla azione di H su V_1 che è una rappresentazione lineare.*

Dim. H fissa 1 e quindi induce una rappresentazione su V_1 ma $g : V_1 \to V_{gH}$ è un isomorfismo da cui si vede che V si può identificare all'insieme delle coppie (g, v), $g \in G$, $v \in V_1$ modula l'equivalenza $(gh, v) \cong (g, hv)$ la struttura differenziabile segue facilmente.

In particolare il fibrato tangente $T(G/H)$ è equivariante e corrisponde alla rappresentazione aggiunta su $L(G)/L(H)$. Se $m = \dim G/H$ il fibrato $\wedge^m T^*(G/H)$è il fibrato equivariante corrispondente alla rappresentazione $\wedge^m L(G)^*/L(H)^*$. L'esistenza di una misura G equivariante su G/H è equivalente alla esistenza di una sezione $G-$equivariante di questo fibrato. A sua volta questo è equivalente alla ipotesi che H opera banalmente su $\wedge^m T^*(G/H)$, questa nfine è la condizione sui determinanti già vista.