

CAPITOLO 5 OMOLOGIA SINGOLARE

Nell'approccio moderno la prova dell'invarianza topologica della omologia simpliciale passa attraverso la definizione di una teoria "omologica singolare" applicabile a tutti gli spazi topologici e topologicamente invariante per costruzione. La sua equivalenza con la teoria simpliciale segue da alcune proprietà (assiomi di Eilenberg Steenrod). Noi seguiamo un percorso intermedio, sviluppiamo la omologia singolare e proviamo direttamente che coincide sugli spazi triangolabili con la teoria simpliciale. Successivamente introduciamo in modo assiomatico una teoria omologica e proviamo che essa è univocamente determinata sulla classe più ampia dei CW-complessi.

1 Il complesso delle catene singolari

Cominciamo con l'introdurre una nozione sufficientemente generale di *simpletso* in uno spazio top[ologico, indipendente dalla triangolabilità dello spazio.

1.1 DEFINIZIONE. *Un n -simpletso singolare in uno spazio X è una funzione continua $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$.*

Un esempio banale di n -simpletso singolare dello spazio Δ_n , che utilizzeremo ripetutamente, è l'identità di Δ_n , $1_{\Delta_n} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$. Tale simpletso singolare verrà indicato ancora con Δ_n e chiamato *simpletso (singolare) standard*.

Esempi Dati $n+1$ punti p_i , $i = 0, \dots, n$ in uno spazio \mathbb{R}^k essi individuano un simpletso singolare n -dimensionale (in \mathbb{R}^k) dato dalla funzione $\sum_i t_i e_i \rightarrow \sum_i t_i p_i$, che chiameremo *simpletso singolare generato* dai punti p_i ed indicheremo con (p_0, p_1, \dots, p_n) .

L'immagine del simpletso singolare (p_0, p_1, \dots, p_n) può anche essere di dimensione inferiore ad n (se i punti p_i non sono indipendenti) fino ad essere un sol punto se i p_i coincidono. D'altra parte esempi come la curva di Peano mostrano che l'immagine di un simpletso singolare n -dimensionale può avere dimensione qualunque ed essere estremamente complicata.

Selezionando un sottoinsieme ordinato dei punti p_i abbiamo ancora un simpletso singolare detto *faccia* del simpletso (p_0, p_1, \dots, p_n) .

Questa osservazione ci permette di definire le facce del simpletso standard e da queste le facce di un qualunque simpletso singolare che generalizzano, in modo ovvio, la nozione simpliciale.

1.2 DEFINIZIONE.

- (1) La faccia $n - 1$ dimensionale $F_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$, $i = 0, \dots, n$ del simpleso standard, è il simpleso singolare $n - 1$ -dimensionale di Δ_n generato dai punti $e_0, e_1, \dots, \check{e}_i, \dots, e_n$ (ottenuti togliendo il vertice e_i).
- (2) Dato un simpleso singolare $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ la composizione $\Delta_{n-1} \xrightarrow{F_i} \Delta_n \xrightarrow{\sigma} X$ si chiama faccia i -esima di σ e si indica anche con $F_i(\sigma)$.

Dato un simpleso singolare $\sigma : \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ed un punto $p \in \mathbb{R}^k$, possiamo definire il *join* $p * \sigma : \Delta_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ di cui σ è la faccia 0-esima.

Per questo consideriamo le applicazioni $\pi : [0, 1] \times \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$, $\tau : [0, 1] \times \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\pi(t, x) := te_0 + (1 - t)F_0(x), \quad \tau(t, x) = tp + (1 - t)\sigma(x).$$

Si verifica facilmente che τ si fattorizza tramite π e definisce il simpleso

$$(1.3) \quad p * \sigma : te_0 + (1 - t)F_0(x) \rightarrow tp + (1 - t)\sigma(x).$$

Figura 1

Notiamo che il simpleso di \mathbb{R}^k generato dai punti p_0, p_1, \dots, p_n si può ottenere iterando l'operazione di join: $(p_0, p_1, \dots, p_n) = p_0 * p_1 * \dots * p_n$.

1.4 Esercizio In modo simile definire un simpleso singolare di dimensione $m + n + 1$ $\sigma * \tau$ join di due semplici singolari di dimensioni m, n in \mathbb{R}^k .

A questo punto procediamo come nel caso simpliciale introducendo i concetti di catena, bordo, ciclo etc..

1.5 DEFINIZIONE. Il gruppo $S_n(X)$ delle **catene n -dimensionali singolari** è il gruppo libero avente come base gli n -simplessi singolari di X .

Per convenzione porremo anche $S_i(X) = 0, \forall i < 0$.

La prima proprietà importante è la *funtorialità della costruzione*.

Dati due spazi X, Y ed una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ essa induce per composizione una applicazione fra semplici singolari $\sigma \rightarrow f \circ \sigma$ e quindi un morfismo, per ogni i che viene denotato con:¹

$$f_i : S_i(X) \rightarrow S_i(Y), \quad f_i(\sigma) := f \circ \sigma, \quad \forall \sigma : \Delta_i \rightarrow X.$$

Osservazione Dato un semplice singolare $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ esso induce (come ogni applicazione continua) una applicazione, sulle catene singolari, $\sigma_n : S_n(\Delta_n) \rightarrow S_n(X)$. Poiché $\sigma = \sigma \circ 1_{\Delta_n}$ abbiamo la *tautologia*:

$$(1.6) \quad \sigma_*(\Delta_n) = \sigma_n(\Delta_n) = \sigma.$$

Questa semplice osservazione viene usata spesso per ridurre, usando la funtorialità, la verifica di proprietà formali dei semplici singolari a verifiche per il semplice standard.

Con queste definizioni i gruppi $S_i(-)$ sono funtori dalla categoria degli spazi topologici a quella dei gruppi abeliani.

Come nel caso simpliciale passiamo a definire le nozioni di *bordo* di una catena singolare e di *ciclo singolare*.

Abbiamo definito la faccia i -esima $F_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ del semplice standard. Dato un semplice singolare $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ in $S_n(X)$ poniamo

$$(1.7) \quad \partial\sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ F_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i F_i(\sigma) \in S_{n-1}(X).$$

Per convenzione $\partial = 0$ per $n \leq 0$.

Osservazione Per il semplice singolare Δ_n o più in generale per un semplice singolare generato da punti p_i in \mathbb{R}^n abbiamo evidentemente:

$$(1.8) \quad \partial(p_0, \dots, p_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (p_0, \dots, \check{p}_i, \dots, p_n).$$

Per un join $p * \sigma$ in \mathbb{R}^n si ha:

$$(1.9) \quad \partial(p * \sigma) = \sigma - p * \partial(\sigma).$$

1.10 Esercizio Per il join $\sigma * \tau$ di due semplici singolari di dimensioni h, k si ha

$$\partial(\sigma * \tau) = \partial(\sigma) * \tau - (-1)^h \sigma * \partial(\tau).$$

¹Spesso non è utile fare riferimento esplicito all'indice i , in tal caso scriveremo $f_*, S_*(X)$ etc..

La definizione è tale che, data $f : X \rightarrow Y$ si ha:

$$(1.11) \quad \partial(f_*\sigma) = f_*(\partial\sigma).$$

Vogliamo provare la fondamentale relazione

$$(1.12) \quad \partial^2 = 0.$$

Dato un simpleso σ si ha $\partial^2\sigma = \partial^2\sigma_*(\Delta_n) = \sigma_*(\partial^2\Delta_n)$. Basta quindi provare che

$$\partial^2\Delta_n = 0.$$

Il ragionamento è simile al caso simpliciale, lo ripetiamo per la sua importanza

$$\begin{aligned} \partial^2\Delta_n &= \partial\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i (e_0, \dots, \check{e}_i, \dots, e_n)\right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial(e_0, \dots, \check{e}_i, \dots, e_n) = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left[\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (\dots, \check{e}_j, \dots, \check{e}_i, \dots, e_n) - \sum_{j=i+1}^n (-1)^j (\dots, \check{e}_i, \dots, \check{e}_j, \dots, e_n) \right] = \\ &= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} (\dots, \check{e}_i, \dots, \check{e}_j, \dots, e_n) - \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (\dots, \check{e}_i, \dots, \check{e}_j, \dots, e_n) = 0 \end{aligned}$$

1.13 DEFINIZIONE. *La successione di gruppi $S_i(X)$ e di morfismi ∂ è un complesso di catene detto complesso singolare dello spazio X .*

Abbiamo quindi provato il fondamentale:

1.14 TEOREMA. *$S_*(-), \partial$ definisce un funtore dalla categoria degli spazi topologici alla categoria dei complessi di catene.*

2 Omologia singolare: definizione e prime proprietà.

Applichiamo i concetti omologici al complesso singolare di uno spazio X .

Indicheremo con $Z_i(X)$, $B_i(X)$, $H_i(X)$ i gruppi dei cicli, bordi e omologia del complesso $S_*(X)$, i loro elementi si dicono cicli, bordi e classi di omologia singolari dello spazio X .

2.1 DEFINIZIONE. *Il gruppo $H_i(X)$ si chiama i -esimo gruppo di omologia singolare dello spazio X .*

Lo studio ed il calcolo della omologia singolare sarà oggetto dei prossimi paragrafi. Per ora osserviamo che dal Teorema del paragrafo precedente abbiamo come prima proprietà:

2.2 TEOREMA - PROPRIETÀ DI FUNTORIALITÀ. Per ogni i , $X \rightarrow H_i(X)$ definisce un funtore dalla categoria degli spazi topologici alla categoria dei gruppi abeliani.

In particolare, data una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ denoteremo con f_i , f_* oppure $H_i(f)$ il morfismo indotto fra $H_i(X)$, $H_i(Y)$.

Come primo calcolo osserviamo che l'immagine di un simpleso singolare è contenuta in una componente connessa per archi di X , pertanto:

2.3 PROPOSIZIONE. 1) Il complesso singolare di X è somma diretta dei complessi singolari delle componenti connesse per archi X_α in cui si decompone X . Lo stesso avviene per l'omologia $H_i(X) = \bigoplus_\alpha H_i(X_\alpha)$.

2) $H_0(X)$ è un gruppo libero con base le classi $[P_i]$ di rappresentanti P_i delle componenti connesse per archi di X .

DIM. La prima parte è evidente.

2) Dato un punto $P \in X$ identificheremo P con il simpleso singolare 0-dimensionale che lo ammette come immagine. Chiaramente $S_0(X)$ è il gruppo libero sui punti di X , per costruzione è formato da cicli.

Dato $P \in X$ indichiamo con $[P]$ la sua classe in $H_0(X)$. Se P_1, P_2 sono connessi da un arco vi è un simpleso 1-dimensionale σ (l'arco che li unisce) con $\partial\sigma = P_1 - P_2$, pertanto punti nella stessa componente connessa per archi sono equivalenti in omologia.

Viceversa poichè essere nella stessa componente è una relazione di equivalenza una 1 catena $\sum_i a_i \sigma_i$ si può decomporre come somma di catene c_i ciascuna in una componente connessa. $\partial c = \sum_i \partial c_i$ e ogni elemento ∂c_i è combinazione lineare di elementi $P_1 - P_2$ nella data componente connessa, l'enunciato segue.

COROLLARIO. In particolare $H_0(X) = \mathbb{Z}$ se e solo se X è connesso per archi.

La natura dei gruppi di omologia superiori viene interpretata come informazioni su tipi di connessione superiore come vedremo in seguito.

DIMENSIONE È impossibile calcolare direttamente l'omologia singolare dal suo complesso singolare tranne in un caso specialissimo che comunque è importante.

2.4 TEOREMA - PROPRIETÀ DELLA DIMENSIONE. Per $X = \{P\}$, lo spazio ridotto ad un punto, si ha $H_i(X) = 0$, $\forall i > 0$, $H_0(X) = \mathbb{Z}[P]$.

DIM. Per ogni i esiste un solo simpleso singolare c_i di dimensione i che è l'applicazione costante $c_i : \Delta_i \rightarrow \{P\}$. Il suo bordo è la somma a segni alterni $+$, $-$ di $i+1$ copie di c_{i-1} . Ne segue che

$$\partial c_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \text{ è dispari} \\ c_{i-1} & \text{se } i \text{ è pari} \end{cases}$$

Il complesso singolare dunque appare come segue

$$\dots \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

da cui l'enunciato segue facilmente.

COPPIE È essenziale, per calcolare omologie, estendere la nozione di omologia a coppie $X \supset A$ di spazi.

Per questo si osservi che il complesso singolare $S_*(A)$ è un sottocomplesso di $S_*(X)$.

Possiamo dunque costruire un complesso, indicato con $S_*(X, A)$ e detto complesso delle catene singolari della coppia X, A , come complesso quoziente:

$$(2.5) \quad S_i(X, A) := S_i(X)/S_i(A), \quad \partial(a + S_i(A)) := \partial(a) + S_{i-1}(A).$$

I cicli, bordi ed omologia singolare della coppia sono definiti di conseguenza e denotati con

$$Z_i(X, A), B_i(X, A), H_i(X, A) := Z_i(X, A)/B_i(X, A).$$

Dal punto di vista geometrico (simile al caso simpliciale di 3.2.3), $S_i(X, A)$ ha come base i simplessi singolari di X che non sono contenuti in A . Se σ è un tale simplesso, il suo bordo $\partial\sigma$ in $S_*(X, A)$ si ottiene dal bordo di σ in $S_*(X)$ cancellando le facce che sono contenute in A .

Le coppie $X \supset A$ di spazi formano una categoria prendendo come morfismi, fra due coppie $X \supset A$ e $Y \supset B$, le funzioni continue:

$$f : X \rightarrow Y, \quad f(A) \subset B.$$

La categoria degli spazi topologici può essere pensata come contenuta nella categoria delle coppie identificando uno spazio X con la coppia X, \emptyset .

Il complesso $S_*(X, A)$ è functoriale sulla categoria delle coppie e $S_*(X, \emptyset) = S_*(X)$, pertanto i gruppi $H_i(X, A)$ sono functoriali e $H_*(X, \emptyset) = H_*(X)$.

COEFFICIENTI Non sempre è opportuno prendere i numeri interi come coefficienti delle catene singolari. La definizione di catena singolare si applica senza modifiche, anche prendendo come coefficienti gli elementi di un qualunque anello commutativo con unità R . In questo caso è necessario introdurre il simbolo R nei simboli definiti e scrivere $S_*(X; R), H_i(X, A; R)$ ecc. per il complesso sigolare e l'omologia di una coppia a coefficienti in R .

Gli anelli più usati sono il campo \mathbb{Q} che semplifica alcuni aspetti tecnici della trattazione e \mathbb{R}, \mathbb{C} che si utilizzano per costruzioni analitiche. Anche $\mathbb{Z}/(2)$ è utile per trattare alcuni problemi su varietà non orientate. Infine per alcuni aspetti vicini alla geometria algebrica si utilizzano i campi p -adici.

3 Omotopia

NOTA Proviamo ora una delle proprietà fondamentali della omologia e cioè la sua invarianza omotopica.

INVARIANZA OMOTOPICA DELL'OMOLOGIA Le nozioni fondamentali della omotopia sono state date nel Cap. 3, estendiamole alle coppie.

3.1 DEFINIZIONE. Una omotopia fra mappe di coppie $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ è una omotopia $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ fra f e g per cui si abbia $F(a, t) \in B, \forall a \in A, \forall t$.

Abbiamo di nuovo una categoria omotopica delle coppie.

Vogliamo provare ora il

3.2 TEOREMA -PROPRIETÀ DELLA OMOTOPIA. Date due applicazioni omotope fra due coppie $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ esse inducono la stessa applicazione in omologia. Pertanto i funtori omologia possono essere pensati come funtori dalla categoria omotopica alla categoria dei gruppi abeliani.

COROLLARIO. Se $f : X \rightarrow Y$ è una equivalenza omotopica $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ è un isomorfismo.

Se X è uno spazio contraibile $H_i(X) = 0, \forall i > 0, H_0(X) = \mathbb{Z}$.

L'idea della dimostrazione è semplice. Si osserva che un semplice Δ (di dimensione n) muovendosi con continuità spazza una regione immagine di $\Delta \times I$, che non è propriamente un semplice, ma può essere trattato come una catena (di dimensione $n + 1$). Tale catena ha come bordo il semplice iniziale meno il semplice finale più la deformazione del bordo del semplice.

Figura 2

Nella figura la catena $(ab) + (bc)$ si deforma nella catena $(ab'a') + (abb') + (bcc') + (bc'b')$ con bordo $(ab) + (bc) - [(a'b') + (b'c')] + [(cc') - (aa')]$.

Quindi una omotopia deforma i semplici singolari n -dimensionali in catene $n+1$ -dimensionali che forniscono l'omologia richiesta fra le immagini dei cicli (in questo caso la deformazione del bordo sparisce) tramite f e g .

Per formalizzare queste idee si fanno due passi.

Passo algebrico Si definisce la nozione di omotopia fra morfismi di complessi di catene.

3.3 DEFINIZIONE. *i) Dati due morfismi di complessi $f, g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ una omotopia (chain homotopy) fra di essi è una successione di morfismi $s : A_i \rightarrow B_{i+1}$:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{A} := & \cdots & \xrightarrow{\partial} & A_{i+1} & \xrightarrow{\partial} & A_i & \xrightarrow{\partial} & A_{i-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow g \\
 \mathcal{B} := & \cdots & \xrightarrow{\partial} & B_{i+1} & \xrightarrow{\partial} & B_i & \xrightarrow{\partial} & B_{i-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots
 \end{array}$$

(Le frecce diagonali sono etichettate con s e le frecce verticali con f e g)

per cui $s\partial + \partial s = f - g$ (per ogni i).

ii) Due morfismi $f, g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ si dicono omotopi se esiste una omotopia fra di essi.

3.4 PROPOSIZIONE. *Se due morfismi di complessi sono omotopi essi inducono lo stesso morfismo in omologia.*

DIM. Sia $a \in A_i$ un ciclo, si ha $f(a) - g(a) = (s\partial + \partial s)(a) = \partial(s(a))$ quindi i cicli $f(a), g(a)$ individuano le stesse classi di omologia.

Si noti che la nozione di *omotopia contraente* che abbiamo dato nel §5.2 è nel linguaggio da noi introdotto una omotopia fra le due mappe $1_{\mathcal{A}}, 0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ da un complesso a se stesso.

Poiché $1_{\mathcal{A}}$ induce la identità in omologia mentre 0 induce la mappa nulla la esistenza di una omotopia fra $1_{\mathcal{A}}, 0$ implica (come peraltro abbiamo visto) che tutti i gruppi di omologia siano nulli.

3.5 Esercizio Si dimostri che la omotopia è una relazione di equivalenza fra morfismi di due complessi compatibile con la composizione. Si definisca pertanto la *categoria omotopica* dei complessi di catene e si verifichi che la omologia è funtoriale per tale categoria.

Con queste premesse il Teorema 2.1.1 sarà provato non appena avremo costruito, a partire da una omotopia geometrica $f \stackrel{F}{\sim} g$ fra le applicazioni continue $f, g : X \rightarrow Y$, una omotopia algebrica s

$$\begin{array}{ccccccc}
S(X) := & \cdots & \xrightarrow{\partial} & S(X)_{i+1} & \xrightarrow{\partial} & S(X)_i & \xrightarrow{\partial} & S(X)_{i-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
& & \swarrow s & \downarrow f_* \downarrow g_* & \swarrow s & \downarrow f_* \downarrow g_* & \swarrow s & \downarrow f_* \downarrow g_* & \swarrow s & \\
S(Y) := & \cdots & \xrightarrow{\partial} & S(Y)_{i+1} & \xrightarrow{\partial} & S(Y)_i & \xrightarrow{\partial} & S(Y)_{i-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots
\end{array}$$

fra i morfismi f_*, g_* dei complessi singolari $S_*(X), S_*(Y)$.

Parte geometrica. Seguiamo la seguente strategia. Dato uno spazio X costruiamo il cilindro $X \times I$ con due immersioni i_1, i_2 di X nelle due basi, $i_1(x) := (x, 0), i_2(x) := (x, 1)$. i_1, i_2 sono canonicamente omotope, l'identità $1_{X \times I}$ è una omotopia.

Possiamo ridurci a dimostrare il Teorema nel caso speciale in cui f, g siano le due immersioni i_1, i_2 di X nelle due basi. In quanto, da $f = F \circ i_1, g = F \circ i_2$ deduciamo che, se $(i_1)_*, (i_2)_*$ sono (chain) omotope anche $f_* = F_* \circ (i_1)_*, g_* = F_* \circ (i_2)_*$ sono (chain) omotope.

Vedremo in un momento, usando principi di funtorialità, che ci possiamo ridurre ulteriormente al caso $X = \Delta_n$ ed a verificare le proprietà di omotopia fra catene per il solo simplesso standard. Il cilindro è una costruzione funtoriale, data una applicazione $f : X \rightarrow Y$ essa induce $f \times 1_I : X \times I \rightarrow Y \times I$.

Vogliamo quindi costruire per ogni dato simplesso singolare σ in $S_n(X)$ una sua

$$\text{omotopia } s_X(\sigma) \in S_{n+1}(X \times I)$$

per cui si abbia la funtorialità (rispetto alla costruzione del cilindro):

$$\begin{array}{ccc}
S_n(X) & \xrightarrow{s_X} & S_{n+1}(X \times I) \\
\downarrow f_n & & \downarrow (f \times I)_{n+1} \\
S_n(Y) & \xrightarrow{s_Y} & S_{n+1}(Y \times I)
\end{array}$$

e

$$(3.6) \quad \partial s_X(\sigma) + s_X \partial(\sigma) = i_1 \sigma - i_2 \sigma.$$

Intuitivamente, $s_X(\sigma)$ deve essere una catena che rappresenta geometricamente la mappa $\sigma \times 1 : \Delta^n \times I \rightarrow X \times I$. Tale catena si otterrà *triangolando* lo spazio $\Delta^n \times I$.

Se una tale costruzione è possibile, per ogni n , essa definisce in particolare una catena

$$C_{n+1} := s_{\Delta_n}(\Delta_n) \in \Delta_n \times I.$$

Poiché un simplesso singolare $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ coincide con $\sigma_*(\Delta_n)$ la condizione di funtorialità

$$\begin{array}{ccc}
\Delta_n \in S_n(\Delta_n) & \xrightarrow{s_{\Delta_n}} & S_{n+1}(\Delta_n \times \mathbb{I}) \\
\downarrow \sigma_* \downarrow & & \downarrow (\sigma \times 1)_* \downarrow \\
\sigma \in S_n(X) & \xrightarrow{s_X} & S_{n+1}(X \times \mathbb{I})
\end{array}$$

obbliga a porre

$$(3.7) \quad s_X(\sigma) := (\sigma \times 1_I)_*(C_{n+1})$$

Questa definizione soddisfa certamente la funtorialità per ogni scelta di C_{n+1} .

Viceversa scelte catene C_{n+1} , la formula 2.1.2 ci fornisce una soluzione al problema posto solo se le C_{n+1} soddisfano alla restrizione che ci permette di dedurre la omotopia fra le due inclusioni $(i_1)_*, (i_2)_* : S_*(X) \rightarrow S_*(X \times I)$.

Dalla condizione di funtorialità segue che, per verificare l'identità 2.1.1 basta provare

$$(3.8) \quad \partial s_{\Delta_n}(\Delta_n) + s_{\Delta_n} \partial(\Delta_n) = i_1 \Delta_n - i_2 \Delta_n$$

Se questo è verificato, data una omotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ fra due mappe f, g si ha che $f = Fi_1$, $g = Fi_2$ e quindi $F_* s_X : S_*(X) \rightarrow S_{*+1}(X \times I) \rightarrow S_*(Y)$ è una chain-homotopy fra le due applicazioni f_*, g_* .

Costruiamo la catena C_{n+1} in $\Delta_n \times I := \{(p, t) | p \in \Delta_n, 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Indichiamo con $A_i := (e_i, 0)$, $B_i := (e_i, 1)$ e definiamo (nello spazio $\Delta_n \times I$)²:

$$s_{\Delta_n}(\Delta_n) = C_{n+1} := \sum_{i=0}^n (-1)^i (A_0 A_1 \dots A_i B_i \dots B_n)$$

Proviamo la 2.1.3. Scriviamo s invece di s_{Δ_n} . Calcoliamo $\partial s(\Delta_n)$ ovvero il bordo di

²Il lettore verificherà che i simplessi di questa catena triangolano $\Delta_n \times I$.

C_{n+1} che risulta:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^n (-1)^i \left\{ \sum_{k=0}^i (-1)^k (A_0 \dots \check{A}_k \dots A_i B_i \dots B_n) - \sum_{k=i}^n (-1)^k (A_0 \dots A_i B_i \dots \check{B}_k \dots B_n) \right\} = \\
& \sum_{i=0}^n (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (A_0 \dots \check{A}_j \dots A_i B_i \dots B_n) - \sum_{k=i+1}^n (-1)^k (A_0 \dots A_i B_i \dots \check{B}_k \dots B_n) \right\} + \\
& \sum_{i=0}^n ((-1)^i (A_0 A_1 \dots A_{i-1} B_i \dots B_n) - (-1)^i (A_0 A_1 \dots A_i B_{i-1} \dots B_n)) = \\
& \sum_{i=0}^n (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (A_0 \dots \check{A}_j \dots A_i B_i \dots B_n) - \sum_{k=i+1}^n (-1)^k (A_0 \dots A_i B_i \dots \check{B}_k \dots B_n) \right\} + \\
& + (B_0 \dots B_n) - (A_0 \dots A_n)
\end{aligned}$$

Nel termine $\sum_{i=0}^n ((-1)^i (A_0 A_1 \dots A_{i-1} B_i \dots B_n) - (-1)^i (A_0 A_1 \dots A_i B_{i-1} \dots B_n))$ si cancellano tutti i termini (facce interne al parallelepipedo) tranne le due basi $(B_0 \dots B_n) - (A_0 \dots A_n)$.

Invece $s\partial(e_0 e_1 \dots e_i \dots e_n)$ è:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n (-1)^k s(e_0 \dots \check{e}_k \dots e_n) = \\
& \sum_{k=0}^n (-1)^k \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (A_0 \dots A_i B_i \dots \check{B}_k \dots B_n) - \sum_{i=k+1}^n (-1)^i (A_0 \dots \check{A}_k \dots A_i B_i \dots B_n) \right\}.
\end{aligned}$$

Per questo sommando i due addendi abbiamo la eguaglianza richiesta.

Riassumendo, date due applicazioni fra spazi $f, g : X \rightarrow Y$, una omotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ fra di esse, definiamo una omotopia di catene

$$s : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(Y)$$

come segue.

Se $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ è un semplice singolare esso definisce una mappa

$$\sigma \times 1_I : \Delta_n \times I \rightarrow X \times I \xrightarrow{F} Y$$

Definiamo la catena singolare $s(\sigma) \in S_{n+1}(Y)$ componendo la catena C_{n+1} con la mappa $F \circ \sigma \times 1_I$.

$$s(\sigma) := (F \circ \sigma \times 1_I)_*(C_{n+1}).$$

Se l'omotopia F è una omotopia di mappe di coppie $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ si vede facilmente che la *chain homotopy* s induce una omotopia di catene anche sulle mappe indotte fra complessi relativi $s : S_n(X)/S_n(A) \rightarrow S_{n+1}(Y)/S_{n+1}(B)$.

INTERMEZZO CATEGORICO Facciamo una osservazione generale che ritroveremo spesso e che implicitamente abbiamo già utilizzato nel definire la omotopia algebrica.

Sia $\theta_X : S_n(X) \rightarrow S_m(X)$ una trasformazione naturale dei due funtori e sia

$$c_m := \theta_{\Delta_n}(\Delta_n) \in S_m(\Delta_n)$$

Dato un simpleso $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ dalla naturalità di θ abbiamo:

$$(3.9) \quad \theta_X(\sigma) = \theta_X(\sigma_*(\Delta_n)) = \sigma_*(\theta_{\Delta_n}(\Delta_n)) = \sigma_*(c_m).$$

Pertanto θ è univocamente determinata dalla classe c_m , viceversa una qualunque classe c_m determina una trasformazione naturale tramite la formula 3.9, pertanto:

3.10 TEOREMA. *L'insieme $\text{Nat}(S_n, S_m)$ delle trasformazioni naturali fra i due funtori S_n, S_m coincide con $S_m(\Delta_n)$.*

Si determina θ_X sui generatori $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ scegliendo una catena c_m di $S_n(\Delta_n)$ e calcolando la composizione $\sigma \circ c_m = \sigma_*(c_m)$.

ESEMPIO i) La catena $\partial\Delta_n$ induce la trasformazione naturale $\partial : S_n \rightarrow S_{n-1}$.

ii) Se $a \in S_n(\Delta_m)$ induce una trasformazione naturale $\theta_a : S_m \rightarrow S_n$ e $c \in S_m(\Delta_k)$ induce θ_c la catena $\theta_a(c) \in S_n(\Delta_k)$ induce la trasformazione naturale composta $\theta_a \circ \theta_c$.

Proviamo l'ultima asserzione. Per linearità ci limitiamo al caso in cui sia a che c siano semplici.

Dato un simpleso $\sigma \in S_m(X)$ per costruzione $\theta_a(\sigma) = \sigma_*(a) = \sigma \circ a$ in particolare $\theta_a(c) = c \circ a$. Ora dato un altro simpleso $\tau \in S_k(X)$ si ha che $\theta_{c \circ a}(\tau) = \tau \circ c \circ a = \theta_a(\theta_c \tau)$.

Supponiamo ora di voler costruire una trasformazione naturale fra complessi singolari, ossia per ogni X un morfismo naturale $\theta_X : S_*(X) \rightarrow S_*(X)$ fra i due complessi, ovvero $\theta_X \partial = \partial \theta_X$ nei gradi corrispondenti..

Per ogni n dobbiamo scegliere una classe $c_n \in S_n(\Delta_n) := \theta_{\Delta_n}(\Delta_n)$ in modo tale che sia verificata la condizione di compatibilità con il bordo:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \partial c_n &= \partial \theta_{\Delta_n}(\Delta_n) = \theta_{\Delta_n}(\partial \Delta_n) = \\ &= \theta_{\Delta_n} \left(\sum_i (-1)^i F_i \right) = \sum_i (-1)^i (F_i)_* c_{n-1}. \end{aligned}$$

In modo analogo se vogliamo dare una omotopia naturale $\eta_X : S_*(X) \rightarrow S_{*+1}(X)$ fra due trasformazioni naturali, date da due sequenze di catene c_n, b_n , dobbiamo dare una sequenza di catene $t_n \in S_{n+1}(\Delta_n)$ in modo tale che $\partial \theta_{t_n} + \theta_{t_{n-1}} \partial = \theta_{b_n} - \theta_{c_n}$.

Poiché però le trasformazioni naturali sono indotte dalle loro catene questa identità è equivalente a

$$\partial t_n + \theta_{t_{n-1}}(\partial \Delta_n) = b_n - c_n.$$

4 Escissione ed Approssimazione simpliciale

NOTA L'escissione è un meccanismo che, spezzettando una catena in piccole parti a meno di omologia permette di trascurare parti di un sottospazio A di X riducendone la complessità. Con lo stesso metodo della suddivisione baricentrica discutiamo anche il classico teorema di approssimazione simpliciale che useremo nello studio dei gruppi di omotopia (§25).

ESCISSIONE La proprietà di escissione è la seguente. Sia data una coppia X, A ed un sottoinsieme U chiuso contenuto nell'interno $\overset{\circ}{A}$ di A , vogliamo *tagliare ed eliminare* U , formalmente:

4.1 TEOREMA -PROPRIETÀ DELLA ESCISSIONE. *L'inclusione delle coppie*

$$(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo in omologia.

Per provare l'escissione, dato un ricoprimento aperto $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ di uno spazio X definiamo *il complesso* $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ *delle catene a supporto in* \mathcal{U} .

$S_*^{\mathcal{U}}(X)$ consiste di quelle catene somma di simplessi interamente contenuti in uno degli aperti U_i . È immediato verificare che $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ è un sottocomplesso di $S_*(X)$, similmente si definisce $S_*^{\mathcal{U}}(X, A)$ per una coppia. Si tratta di dimostrare che

4.2 TEOREMA DEL RICOPRIMENTO. *L'inclusione* $S_*^{\mathcal{U}}(X, A) \rightarrow S_*(X, A)$ *induce un isomorfismo in omologia.*

Dimostreremo questo Teorema nelle prossime sezioni. L'idea è quella di spezzettare un ciclo in simplessi così piccoli da stare ciascuno in uno degli aperti del ricoprimento, la realizzeremo attraverso la costruzione geometrica della *suddivisione*.

Assumendo il precedente Teorema proviamo:

DIM. TEOREMA DI ESCISSIONE. Consideriamo il ricoprimento aperto di X formato da $\mathcal{U} := \{X - U, \overset{\circ}{A}\}$. Possiamo restringere il medesimo ricoprimento ad A e considerare la

successione esatta di complessi $0 \rightarrow S_*^{\mathcal{U}}(A) \rightarrow S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*^{\mathcal{U}}(X, A) \rightarrow 0$. Dal Teorema precedente $H_*(X, A) := H_*^{\mathcal{U}}(X, A)$.

Le catene in $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ sono somma di catene in $\overset{\circ}{A}$ e catene in $X - U$. Le prime catene sono nulle modulo $S_*(A)$ e quindi $S_*^{\mathcal{U}}(X, A) = S_*(X - U, A - U)$ da cui l'escissione segue.

SUDDIVISIONE BARICENTRICA IN OMOLOGIA SINGOLARE Abbiamo dato una definizione induttiva di suddivisione baricentrica di un simpleso e di un complesso simpliciale, ponendo per un simpleso σ , di baricentro b , $Sd(\sigma) := b * Sd(\partial\sigma)$. Per applicare questa costruzione alla omologia singolare bisogna prima di tutto interpretare la definizione precedente come una operazione su catene singolari e quindi:

- (1) Costruire la *suddivisione baricentrica* come trasformazione naturale (come funtori in X) dei complessi

$$Sd_X : S_*(X) \rightarrow S_*(X)$$

- (2) Provare che la suddivisione baricentrica è naturalmente omotopa alla identità.

Usando le idee della sezione precedente, definiamo la suddivisione baricentrica del simpleso standard come catena, utilizzando il join di simplessi singolari.

Sia $b := \frac{1}{n+1} \sum_i e_i$ e poniamo induttivamente:

$$Sd(\Delta_0) := \Delta_0, \quad Sd(\Delta_n) := b * Sd(\partial\Delta_n).$$

La condizione di compatibilità 9.2.2 è verificata per induzione

$$\partial Sd(\Delta_n) := \partial(b * Sd(\partial\Delta_n)) = Sd(\partial\Delta_n) - b * \partial(Sd(\partial\Delta_n)) = Sd(\partial\Delta_n) - b * Sd(\partial\partial\Delta_n) = Sd(\partial\Delta_n).$$

4.3 PROPOSIZIONE. Sd_X ed $1_{S_*(X)}$ sono naturalmente omotope.

DIM. Troveremo una sequenza di trasformazioni naturali $T_X : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)$ tali che $\partial T + T\partial = 1 - Sd$. Da quanto visto sulle trasformazioni naturali fra i funtori S ne segue che una tale trasformazione naturale è data da una successione di catene $T(\Delta_n) \in S_{n+1}(\Delta_n)$ soddisfacenti ad identità ricorsive.

Partendo da $T(\Delta_0) := 0$ e supponendo già definita $T(\Delta_k) \in S_{k+1}(\Delta_k)$ in grado $k < n$ si porrà per un k simpleso singolare $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$, $T\sigma := \sigma_*(T\Delta_k)$. Infine la formula ricorsiva

$$T(\Delta_0) := 0, \quad T(\Delta_n) := b * (\Delta_n - Sd(\Delta_n) - T\partial\Delta_n),$$

che soddisfa

$$\partial T(\Delta_n) = \Delta_n - Sd(\Delta_n) - T\partial\Delta_n - b * (\partial\Delta_n - \partial Sd(\Delta_n) - \partial T\partial\Delta_n) = \Delta_n - Sd(\Delta_n) - T\partial\Delta_n$$

poichè per induzione

$$\partial\Delta_n - \partial Sd(\Delta_n) - \partial T\partial\Delta_n = (1 - Sd - \partial T)\partial\Delta_n = T\partial^2\Delta_n = 0.$$

Abbiamo allora per costruzione che T è una omotopia fra l'identità e la suddivisione. \square

Illustriamo geometricamente il significato della catena $T(\Delta_k)$.

L'idea geometrica consiste nel:

a) Costruire induttivamente una catena S_k che *triangola* il cilindro $\Delta_k \times [0, 1]$ in modo tale che le due basi siano triangolate rispettivamente dal simpleso standard e dalla sua suddivisione.

b) Definire $T(\Delta_k) := p_*(S_k)$ tramite la proiezione $p : \Delta_k \times [0, 1] \rightarrow \Delta_k$, $p(x, t) := x$ che *schiaccia* il cilindro sulla base.

Allora avendo triangolato il bordo di $\Delta_k \times [0, 1]$ che è unione di $\Delta_k \times 0$, $\Delta_k \times 1$, $\partial\Delta_k \times [0, 1]$ con le catene Δ_k , $Sd(\Delta_k)$, $S_{k-1}(\partial\Delta_k)$ si triangola l'intero cilindro partendo dal suo baricentro p e costruendo il join con tutti i semplici del bordo.

Una illustrazione in figura è data per $k = 1$:

Figura 3

Illustriamo solo la triangolazione del bordo nel caso $k = 2$ per non fare una figura troppo confusa.

Figura 4

Osserviamo che, dato un ricoprimento \mathcal{U} di X gli operatori Sd , T mandano il complesso $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ in se stesso. Infine per una coppia X, A i medesimi operatori passano al quoziente sui complessi $S_*(X, A)$, $S_*^{\mathcal{U}}(X, A)$.

Ora sfruttiamo il seguente.

4.4 LEMMA. *Sia Δ un n -simpleso nello spazio euclideo di diametro d . Ogni simpleso della sua decomposizione baricentrica ha diametro $\leq \frac{nd}{n+1}$.*

DIM. Fissiamo un simpleso della decomposizione baricentrica e sia d' il suo diametro. Per convessità questo è il massimo fra le distanze dei suoi vertici. Basta quindi stimare la distanza fra i baricentri di due facce che siano una contenuta nell'altra, rispetto alla lunghezza del massimo segmento che contiene tali baricentri ed è contenuto nel simpleso. Denotiamo con $\overline{P, Q} = |P - Q|$ la distanza fra due punti dati.

Dato un segmento $tA + (1-t)B$, $0 \leq t \leq 1$ si noti che $(1-t)\overline{(A, B)} = \overline{A, tA + (1-t)B}$. Supponiamo che le due facce siano generate dai vertici

$$p_0, p_1, \dots, p_h, \quad p_0, p_1, \dots, p_k, \quad h < k.$$

I due baricentri sono $b := \frac{1}{h+1} \sum_{i=0}^h p_i$, $b' := \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k p_i$.

Osserviamo che $b' = \frac{h+1}{k+1}b + \frac{k-h}{k+1}c$ con $c := \frac{1}{k-h} \sum_{j=h+1}^k p_j$ un ulteriore punto nel simpleso di partenza.

Il rapporto fra le due distanze $\overline{bb'}$, \overline{bc} è chiaramente $\frac{k-h}{k+1} = 1 - \frac{h+1}{k+1}$ da cui segue che

$$d' \leq \left(\max_{0 \leq h < k \leq n} \frac{k-h}{k+1} \right) d.$$

Si conclude osservando che se $0 \leq h < k \leq n$ si ha $\frac{k-h}{k+1} \leq \frac{n}{n+1}$.

In particolare si ha

COROLLARIO. *Al tendere di k all'infinito il massimo diametro di un simpleso della decomposizione baricentrica k -esima tende a 0.*

Possiamo finalmente dimostrare il Teorema del ricoprimento 2.1 e completare quindi la discussione della escissione.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 9.1. Dato un simpleso singolare $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ si costruisce $V_\alpha := \sigma^{-1}(U_\alpha)$, il ricoprimento di Δ_n indotto.

Sia $\varepsilon(\sigma) > 0$ un numero di Lebesgue per tale ricoprimento (cfr. Cap. 1). Per una catena $c = \sum_i m_i \sigma_i$ poniamo $\varepsilon(c) := \min \varepsilon(\sigma_i) > 0$.

Per una qualsiasi catena c sia k abbastanza grande per cui i simplessi della k -esima decomposizione baricentrica di c siano di diametro minore di $\varepsilon(c)$, ne segue che $\text{Sd}^k(c) \in S^{\mathcal{U}}(X)$. Quindi se c è un ciclo, $\text{Sd}^k(c)$ è un ciclo ad esso omologo in $S^{\mathcal{U}}(X)$. In altre parole un ciclo c di X è omologo ad un ciclo di $S^{\mathcal{U}}(X)$ ottenuto da c con una opportuna suddivisione baricentrica k -esima (dipendente da c). Questo prova che la applicazione in omologia $H_*(S^{\mathcal{U}}(X)) \rightarrow H_*(S(X))$, indotta dalla inclusione $S^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S(X)$, è suriettiva.

Similmente se $a \in S^{\mathcal{U}}(X)$ è un bordo in $S(X)$, $a = \partial b$, $b \in S(X)$ si ha per ogni m , $\text{Sd}^m(a) = \partial(\text{Sd}^m(b))$ e, per un opportuno m , anche $\text{Sd}^m(b) \in S^{\mathcal{U}}(X)$. In $S^{\mathcal{U}}(X)$ si ha che a è omologa a $\text{Sd}^m(a) = \partial(\text{Sd}^m(b))$ e quindi a 0.

□

9.3 Il Teorema di approssimazione simpliciale

Discutiamo questo Teorema come applicazione della suddivisione baricentrica.

4.5 TEOREMA. *Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua fra due spazi triangolati, allora esiste un intero k ed una applicazione simpliciale $g : Sd^k(X) \rightarrow Y$ omotopa ad f .*

DIM. 1) Per ogni vertice P di Y sia $St(P)$ la sua stella e $V_P := f^{-1}(St(P))$.

Dalla teoria del numero di Lebesgue sviluppata nel paragrafo precedente esiste un k tale che, per ogni vertice q di $Sd^k(X)$ si ha che la chiusura $\overline{St}(q)$ della stella di q è contenuto in qualche aperto V_P scegliamo dunque un tale P e chiamiamo la funzione fra vertici definita da questa scelta g , per cui $f(\overline{St}(q)) \subset St(g(q))$ per ogni vertice q di $Sd^k(X)$.

Proviamo prima di tutto che l'applicazione g si estende ad una applicazione simpliciale.

Bisogna provare che, se i punti q_i sono vertici di un semplice σ di $Sd^k(X)$ anche i $g(q_i)$ sono vertici di un semplice di Y .

Per questo basta provare che $\cap_i St(g(q_i)) \neq \emptyset$.

Per costruzione abbiamo $\sigma \subset \overline{St}(q_i)$ per ogni i e quindi $f(\sigma) \subset \cap_i St(g(q_i))$ che implica la condizione richiesta.

Ora dobbiamo provare che f, g sono omotope. Pensiamo ad Y come complesso simpliciale immerso in qualche \mathbb{R}^n .

Definiamo come omotopia $F(x, t) := tf(x) + (1-t)g(x)$. Bisogna provare che, per ogni $x \in X$ e per ogni $t \in [0, 1]$ il punto $tf(x) + (1-t)g(x)$ è contenuto in Y .

Per questo sia σ un semplice di vertici q_i nel cui interno è contenuto x , da quanto appena provato $f(x)$ è contenuto nella intersezione $\cap_i St(g(q_i))$ e quindi il suo supporto è un semplice τ contenente i vertici $g(q_i)$, ne segue ogni punto $tf(x) + (1-t)g(x)$ è contenuto nel semplice τ . □

Si può completare il Teorema con una osservazione definizione.

Diremo che due applicazioni simpliciali $f, g : X \rightarrow Y$ sono *congruenti* se per ogni semplice σ di vertici q_i di X i vertici $f(q_i), g(q_i), q_i \in \sigma$ sono tutti contenuti in uno stesso semplice di Y .

Si osservi allora che, due diverse scelte di g (secondo la dimostrazione precedente) danno luogo ad applicazioni congruenti.

5 La successione esatta lunga

NOTA In questo paragrafo proveremo una proprietà puramente algebrica che però è la vera giustificazione (insieme all'escissione) per introdurre l'omologia per le coppie.

Costruiremo una successione esatta di omologia singolare per una coppia usando la proprietà algebrica delle successioni esatte di complessi discussa in 4.2.4, il lettore è invitato a confrontare questi risultati con quelli ottenuti per la omologia simpliciale. Tale successione è una base per calcolare l'omologia per induzione.

SUCCESSIONE ESATTA Supponiamo che $c \in S_i(X)$ sia un ciclo relativo ad un sottospazio A di uno spazio X , questo vuol dire che il suo bordo ∂c è contenuto in A . In A d'altra parte ∂c è evidentemente un ciclo (ma non necessariamente un bordo), come vedremo questo permette di definire un *morfismo di connessione* fra i gruppi di omologia, precisamente:

5.1 **TEOREMA.** *Esiste un morfismo di connessione $\delta : H_i(X, A) \rightarrow H_{i-1}(A)$ che risulta funtoriale rispetto a morfismi di coppie (ovvero una trasformazione naturale fra i due funtori omologia) e tale che la successione lunga di morfismi*

$$(5.2) \quad \rightarrow H_i(A) \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_i(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(A) \rightarrow H_{i-1}(X) \rightarrow H_{i-1}(X, A) \dots$$

risulta esatta.

DIM. Per provare la 10.1.1 basta considerare la successione esatta dei complessi singolari

$$0 \rightarrow S_*(A) \rightarrow S_*(X) \rightarrow S_*(X)/S_*(A) := S_*(X, A) \rightarrow 0$$

ed applicare il teorema 5.2, la funtorialità si verifica facilmente. \square

Avendo a disposizione la teoria generale delle successioni esatte possiamo applicarla al seguente esempio. Siano $A \subset B \subset C$ inclusioni di tre spazi topologici.

Abbiamo la ovvia successione esatta indotta dalle inclusioni.

$$(5.3) \quad 0 \rightarrow S_*(B)/S_*(A) \rightarrow S_*(C)/S_*(A) \rightarrow S_*(C)/S_*(B) \rightarrow 0$$

Ne deduciamo una successione esatta lunga della tripla.

$$(5.4) \quad \dots \rightarrow H_i(B, A) \rightarrow H_i(C, A) \rightarrow H_i(C, B) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(B, A) \rightarrow H_{i-1}(C, A) \rightarrow H_{i-1}(C, B) \dots$$

geometricamente conviene anche esplicitare il morfismo di connessione

$$H_i(C, B) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(B, A).$$

5.5 Esercizio Provare che il morfismo di connessione della tripla si ottiene dal morfismo di connessione della coppia C, B per composizione

$$H_i(C, B) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(B) \rightarrow H_{i-1}(B, A).$$

OMOLOGIA RIDOTTA Come nel caso simpliciale possiamo aumentare il complesso singolare $S_*(X)$ completandolo con un morfismo $S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ dato da $\epsilon([P]) = 1$, il nuovo complesso viene indicato con $S_*^\#(X)$. Per costruzione il complesso aumentato è ancora un complesso di catene la cui omologia differisce da quella di $S_*(X)$ solo in dimensione 0. La nuova omologia è detta omologia ridotta di X e indicata con $H_i^\#(X)$.

Per costruzione $H_i^\#(X) = H_i(X)$, $\forall i > 0$.

La sua proprietà principale consiste nel fatto che:

5.6 PROPOSIZIONE. *Vi è una successione esatta*

$$0 \rightarrow H_0^\#(X) \rightarrow H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

DIM. Esercizio.

□

5.7 Esercizio 1) Calcolare l'omologia ridotta della sfera 0-dimensionale.

2) Provare che, se $x_0 \in X$ si ha per ogni i un isomorfismo

$$H_i^\#(X) \cong H_i(X, x_0)$$

2) X è connesso per archi se e solo se $H_0^\#(X) = 0$ e quindi se X è contraibile $H_i^\#(X) = 0, \forall i$.

Questa proprietà omologica degli spazi contraibili permette, come nel caso simpliciale, di fare delle utili induzioni per calcolare l'omologia di uno spazio costruito a partire da sottospazi più semplici.

Per una coppia X, A , $A \neq \emptyset$ il complesso singolare non deve essere aumentato ma si ha una successione esatta $0 \rightarrow S_*^\#(A) \rightarrow S_*^\#(X) \rightarrow S_*(X, A) \rightarrow 0$ e quindi si può scrivere una successione esatta lunga della omologia ridotta.

In altre parole $S_*^\#(X, A) = S_*(X, A)$, $H_*^\#(X, A) = H_*(X, A)$.

Osservazione Qualche volta è comodo considerare $H_i^\#(X)$ anche per $i < 0$. Dalle definizioni segue facilmente che:

Se X non è vuoto $H_i^\#(X) = 0$ per $i < 0$.

Per l'insieme vuoto la sola omologia non nulla è $H_{-1}^\#(\emptyset) = \mathbb{Z}$.

SUCCESSIONE ESATTA DI MAYER-VIETORIS Possiamo tornare ora alle idee della escissione e utilizzarle in un'altro modo. Supponiamo di dare un ricoprimento di uno spazio X con due aperti $\mathcal{U} := \{A, B\}$.

Con i complessi singolari di $A \cap B, A, B, X := A \cup B$ possiamo costruire una successione esatta come segue (pensando ai morfismi del diagramma

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A \cup B \end{array}$$

come tutte inclusioni).

$$(5.8) \quad 0 \rightarrow S_*(A \cap B) \xrightarrow{i} S_*(A) \oplus S_*(B) \xrightarrow{p} S_*^{\mathcal{U}}(A \cup B) \rightarrow 0.$$

Data da $i(\sigma) := (\sigma, -\sigma)$, $p(a, b) = a + b$.

L'esattezza è immediata dalle definizioni. Dal teorema precedente e dalla successione esatta lunga associata ad una successione esatta di complessi abbiamo la

(*Successione esatta di Mayer-Vietoris*):

$$(5.9) \quad \dots \rightarrow H_{i+1}(A \cup B) \rightarrow H_i(A \cap B) \rightarrow H_i(A) \oplus H_i(B) \rightarrow H_i(A \cup B) \rightarrow H_{i-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

Questa successione esatta è un potente metodo per incollare insieme classi di omologia.

Osservazione Spesso si utilizza anche quando X è unione di due chiusi A_1, B_1 . Ad esempio se X è simpliciale e A_1, B_1 sono sottocomplessi abbiamo visto la successione di Mayer Vietoris simpliciale.

Una condizione sufficiente è che esistano due aperti $A \supset A_1, B \supset B_1$ per cui le inclusioni $A_1 \rightarrow A, B_1 \rightarrow B, A_1 \cap B_1 \rightarrow A \cap B$ siano delle equivalenze omotopiche.

Lasciamo al lettore di verificare che queste condizioni sono soddisfatte se X è simpliciale e A_1, B_1 sono sottocomplessi.

COROLLARIO. *Se A, B sono contraibili per ogni i si ha*

$$H_i^{\#}(A \cup B) = H_{i-1}^{\#}(A \cap B)$$

In particolare una sfera si può pensare come

$$S^n := \{(\underline{x}, t) \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \|\underline{x}\|^2 + t^2 = 1\}.$$

S^n si decompone nelle due calotte $C_+ := \{t < 1\}$, $C_- := \{t > 0\}$ contraibili con intersezione omeomorfa a $S^{n-1} \times (0, 1)$ tramite $(\underline{x}, t) \rightarrow (\frac{\underline{x}}{\sqrt{1-t^2}}, t)$.

L'inclusione di S^{n-1} in $C_+ \cap C_-$ (per $t = 1/2$) è una equivalenza omotopica da cui

5.10 TEOREMA. $H_i^\#(S_n) = 0$, $i \neq n$, $H_n^\#(S_n) = \mathbb{Z}$.

DIM. Si dimostra per induzione osservando che $H_0^\#(S^0) = \mathbb{Z}$ mentre $H_i^\#(S^0) = 0$.

Torneremo su questo importante risultato nel prossimo paragrafo costruendo esplicitamente un ciclo che genera $H_n^\#(S_n)$.

5.11 Esercizio Sia X uno spazio topologico. Definiamo $Ci(X)$, $C(X)$, $S(X)$ come il cilindro, il cono e la sospensione di X con le formule.

$$Ci(X) := X \times I, \quad C(X) = p_0 * X = X \times I / X \times \{1\}, \quad S(X) = S^0 * X = C(X) / X \times \{0\}.$$

Ovvero per costruire $S(X)$ in $Ci(X)$ collasiamo ad un solo punto separatamente la base inferiore e quella superiore.

Provare che $S(S^{n-1}) \cong S^n$ e che per ogni i vi è un isomorfismo $H_i^\#(X) \rightarrow H_{i+1}(S(X))$ detto *isomorfismo di sospensione*.

SUGG. $C(X)$ è contraibile e $S(X)$ si ottiene incollando due coni $C(X)$ lungo una base X . □

Una utile applicazione della escissione e della successione esatta lunga si ha nel caso seguente.

Consideriamo una coppia X, A con A un chiuso in X .

Dalla descrizione dei cicli della coppia, in termini di catene in X con bordo in A , si può immaginare che l'omologia di (X, A) coincida con l'omologia (ridotta) dello spazio quoziente X/A in cui A è trasformato in unico un punto x_0 .

Questo è vero nei casi geometricamente più interessanti come ad esempio quando X è un complesso simpliciale ed A un sottocomplesso (o una varietà algebrica ed una sottovarietà). In questo caso infatti è verificata la proprietà:

PROPRIETÀ Esiste un intorno aperto U di A in cui A è un retratto di deformazione.

In letteratura, con scarsa fantasia, a volte questa proprietà si esprime dicendo che la coppia è *buona*. È una ipotesi che in effetti si verifica sempre nei casi di complessi varietà e quasi tutte le costruzioni di interesse geometrico. ne vedremo in seguito vari esempi.

Da questa ipotesi segue che l'inclusione di A in U induce un isomorfismo in omologia e quindi $H_i(U, A) = 0$.

La successione esatta lunga della tripla X, U, A implica un isomorfismo $H_i(X, A) \cong H_i(X, U)$. Per escissione finalmente $H_i(X, U) = H_i(X - A, U - A)$.

Si vede immediatamente che la proprietà, A è un retratto di deformazione di U , *passa al quoziente* ovvero in X/A l'immagine U/A è un intorno aperto di x_0 ed x_0 è un retratto di deformazione di U/A .

Ne segue un isomorfismo $H_i(X/A, x_0) \cong H_i(X/A, U/A)$ e per escissione di x_0 si ha $H_i(X/A, U/A) = H_i(X/A - x_0, U/A - x_0)$.

L'applicazione quoziente $p : X \rightarrow X/A$ ristretta ad $X - A$ è un omeomorfismo su $X/A - x_0$ pertanto dal diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_i(X, U) & \xrightarrow{H_i(p)=p_*} & H_i(X, U) \\ \text{ecs. } \cong \downarrow & & \downarrow \text{ecs. } \cong \\ H_i(X - A, U - A) & \xrightarrow[p|_{X-A}]{\cong} & H_i(X/A - x_0, U/A - x_0) \end{array}$$

deduciamo che la proiezione $p : H_i(X, U) \rightarrow H_i(X/A, U/A)$ è un isomorfismo.

Consideriamo ora il diagramma commutativo, in cui le due righe sono isomorfismi per le proprietà viste di retrazione.

$$\begin{array}{ccc} H_i(X, A) & \xrightarrow{\cong} & H_i(X, U) \\ \downarrow & & \downarrow p \\ H_i(X/A, x_0) & \xrightarrow{\cong} & H_i(X/A, U/A) \end{array}$$

ne segue un isomorfismo fra $H_i(X, A)$ ed $H_i(X/A, x_0)$.

Poiché $H_i(X/A, x_0) = H_i^\#(X/A)$ si deduce alla fine:

5.12 PROPOSIZIONE. *Se il chiuso $A \subset X$ è un retratto di deformazione di un suo intorno aperto (ovvero la coppia (X, A) è buona) allora si ha l'isomorfismo*

$$(5.13) \quad H_i(X, A) = H_i^\#(X/A)$$

Esercizio Si attacchi ad X il cono su A identificando la base $A \times 0$ del cono con A stesso formando un nuovo spazio $X \amalg_A C(A)$ e si verifichi che $X \amalg_A C(A)$ e X/A sono omotopicamente equivalenti.

Nel prossimo paragrafo discutiamo una importante generalizzazione di questa costruzione.

Complemento e sviluppo dell'esercizio: **Mapping cono.**

Discutiamo ora una costruzione di grande utilità in algebra omologica³ quella del *mapping cone* o *cono di applicazione*. Essa mette in nuova luce il morfismo di connessione ed inoltre fornisce una naturale successione esatta lunga per un morfismo $f : A \rightarrow B$ e non semplicemente per l'inclusione in una coppia.

³è alla base della costruzione della categoria derivata che è attualmente uno strumento fondamentale nella teoria dei fasci.

È una costruzione che si può fare in vari contesti, e.g. quello topologico e quello dei complessi algebrici.

i) **Definizione topologica** Data una applicazione continua $f : A \rightarrow B$ il suo cono di applicazione $C(f)$ si definisce come spazio quoziente dell'unione disgiunta $C(A) \amalg B$, $C(A) = A \times [0, 1]/A \times 1$ modulo la relazione di equivalenza $(a, 0) \cong f(a)$.

In altre parole $C(f)$ si ottiene *attaccando* a B il cono di A lungo la sua base A e secondo la f .

Il significato geometrico sta nel fatto che lo spazio B si immerge in $C(f)$ e l'applicazione f composta con l'inclusione $i : B \rightarrow C(f)$ è omotopa ad una costante.

Se priviamo il mappin cono $C(f)$ del vertice del cono, abbiamo un intorno aperto U di B di cui B è retratto di deformazione. Ne segue che $H_*(C(f), B) = H^\#(C(f)/B)$. Infine $C(f)/B$ è identificabile con la sospensione $S(A)$. Ne deduciamo per ogni i un isomorfismo $H_i(C(f), B) = H_{i-1}^\#(A)$. Prendiamo la successione esatta lunga della coppia $C(f), B$

$$\dots H_{i+1}(C(f), B) \rightarrow H_i(B) \dots$$

si verifica facilmente dalle definizioni che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_i^\#(A) & \xrightarrow{f_*} & H_i(B) \\ S \downarrow & & \downarrow 1_B \\ H_{i+1}(C(f), B) & \xrightarrow{\delta} & H_i(B) \end{array}$$

commuta, dove S è l'isomorfismo di sospensione. Pertanto se ne deduce una successione esatta lunga associata al morfismo f :

$$\dots \rightarrow H_{i+1}^\#(B) \rightarrow H_{i+1}^\#(C(f)) \rightarrow H_i^\#(A) \xrightarrow{f_*} H_i^\#(B) \rightarrow \dots$$

Un caso speciale si ha evidentemente quando f è una inclusione.

ii) **Definizione simpliciale** Se infine $A \subset B$ è un sottocomplesso simpliciale allora la costruzione $C(A) \amalg_A B$ si fa in modo simpliciale, aggiungendo un unico vertice p ed i simplessi $\sigma * p$ al variare dei simplessi di A .

La costruzione di Mapping cone per i complessi algebrici segue l'idea che, detto p il vertice del cono $C(A)$ ogni simpleso singolare σ di dimensione k in A dà luogo ad un simpleso $\sigma * p$ di $C(A)$ che si proietta in $C(f)$ (tramite la mappa quoziente) permettendo di immergere $S_k(B) \oplus S_{k-1}(A)$ in $S_k(C(f))$.

Seguendo le dimostrazioni precedenti si può vedere che in $S_k(C(f))$ un elemento $(\tau, \sigma) \in S_k(B) \oplus S_{k-1}(A)$ ha bordo corrispondente a $(\partial(\tau) + (-1)^{k-1} f_*(\sigma), \partial(\sigma))$.

In particolare nel caso simpliciale $A \subset B$ preso un ordinamento dei vertici di B ed aggiungendo p come ultimo vertice vediamo che il complesso simpliciale ordinato in grado i di $C(i)$ è identificabile a $C_i(B) \oplus C_{i-1}(A)$ con la medesima formula per il differenziale.

Questa osservazione permette di fare una costruzione formale.

iii) **Definizione algebrica** Siano dati due complessi algebrici \mathcal{A} , \mathcal{B} ed un morfismo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ di complessi.

Costruiamo un nuovo complesso indicato con $C(f)$ ponendo:

$$C(f)_i := B_i \oplus A_{i-1}, \quad \partial(b, a) := (\partial(b) - (-1)^i f(a), \partial(a))$$

si verifica immediatamente che $C(f)$ è un complesso contenente \mathcal{B} come sottocomplesso mentre $C(f)/\mathcal{B}$ è un complesso che, in grado i ha A_{i-1} (con lo stesso differenziale di \mathcal{A}) pertanto un tale complesso può essere definito come *sospensione* $\Sigma(\mathcal{A})$ del complesso \mathcal{A} . In definitiva abbiamo la successione esatta corta:

$$0 \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow C(f) \rightarrow \Sigma(\mathcal{A}) \rightarrow 0.$$

Se ora analizziamo il morfismo di connessione vediamo che dato $a \in \Sigma(\mathcal{A})_i = A_{i-1}$ un ciclo esso proviene da $(0, a)$ con bordo $((-1)^i f_*(a), 0)$ pertanto componendo l'isomorfismo di sospensione con il morfismo di connessione otteniamo il morfismo f_* :

$$\begin{array}{ccc} H_i(\mathcal{A}) & \xrightarrow{S} & H_{i+1}(\Sigma(\mathcal{A})) \\ (-1)^i f_i \downarrow & & \delta \downarrow \\ H_i(\mathcal{B}) & \xrightarrow{1} & H_i(\mathcal{B}) \end{array}$$

6 Alcuni calcoli fondamentali

NOTA In questa sezione calcoliamo l'omologia singolare delle sfere completando finalmente i risultati del primo capitolo che erano rimasti non provati (Teorema 1.2).

OMOLOGIA DELLA SFERA Prendiamo il simpleso fondamentale Δ_n omeomorfo alla palla n -dimensionale ed il suo bordo $\dot{\Delta}_n$ omeomorfo alla sfera S^{n-1} .

6.1 LEMMA. a) $H_i^\#(\Delta_n) = 0, \forall i$.

b) Il morfismo di connessione $H_i(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}^\#(\dot{\Delta}_n)$ è un isomorfismo per ogni i e per ogni n .

DIM. a) perché Δ_n è contraibile.

b) Da a) e dalla successione esatta della coppia. □

6.2 TEOREMA.

(1) $H_i(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) = 0, \forall i \neq n$. $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) = \mathbb{Z}[\Delta_{n+1}]$ è generato dalla classe del simpleso (singolare) Δ_n .

(2) $H_i(\dot{\Delta}_{n+1}^n) = 0$ se $i \neq n$ mentre $H_n(\dot{\Delta}_{n+1}^n) = \mathbb{Z}[\partial\Delta_{n+1}]$.

DIM. Da b) del Lemma precedente segue che 1), e 2) sono equivalenti e li proviamo per induzione su n .

Caso $n = 1$, $\Delta_1 = I = [0, 1]$, $\dot{\Delta}_1 = \{0, 1\} = S^0$. La parte a) del Lemma precedente e l'esercizio ? provano la base dell'induzione.

Assumiamo gli enunciati veri per $n - 1$.

Consideriamo ora la coppia $\dot{\Delta}_n, C$ dove C è l'unione di tutte le facce chiuse contenenti e_n . C è un cono e quindi contraibile (ad e_n). Possiamo applicare la successione esatta lunga a questa coppia e per $\forall i$ otteniamo che l'omomorfismo di inclusione $H_i^\#(\dot{\Delta}_n) \rightarrow H_i(\dot{\Delta}_n, C)$ è un isomorfismo.

Facciamo escissione sulla coppia $\dot{\Delta}_n, C$ tagliando il vertice e_n di C . La coppia che otteniamo ha la coppia $\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}$ come retratto di deformazione.

Figura 5

Ne segue l'isomorfismo $H_i^\#(\dot{\Delta}_n) \cong H_i(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$.

Possiamo quindi applicare l'induzione, ottenendo 2) (e quindi 1)) tranne l'esplicitazione del generatore.

Per questo osserviamo che il ciclo $\partial\Delta_n$ in $\dot{\Delta}_n$ è la somma $\sum_{i=0}^n (-1)^i (e_0, \dots, \check{e}_i, \dots, e_n)$. Per costruzione le facce $(e_0, \dots, \check{e}_i, \dots, e_n)$, $i \neq 0$ sono contenute in C e quindi l'immagine della classe $\partial\Delta_n$ nell'isomorfismo $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n) \rightarrow H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, C)$ si riduce a $(-1)^n (e_0, \dots, e_{n-1})$ che per induzione è generatore di $H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$, concludendo la dimostrazione. \square

Ora possiamo finalmente provare, come Corollario, il Teorema 1.2 e quindi completare la parte lasciata in sospenso della teoria della dimensione.

TEOREMA 1.2. S^{n-1} non è retracts di Δ_n .

DIM. Altrimenti vi è una mappa $p : \Delta_n \rightarrow S^{n-1}$ che composta con l'inclusione $i : S^{n-1} \rightarrow \Delta_n$ è l'identità.

In omologia abbiamo la composizione $\mathbb{Z} = H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\Delta_n) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ deve essere l'identità. Questo è assurdo poiché $H_{n-1}(\Delta_n) = 0$.

È a volte conveniente esprimere i risultati precedenti in modo leggermente diverso. Sia $b \in \Delta_n$ un punto interno (ad esempio il baricentro) l'inclusione di $\dot{\Delta}_n$ in $\Delta_n - b$ è un retracts di deformazione e quindi induce isomorfismo in omologia da cui $H_i(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) = H_i(\Delta_n, \Delta_n - b)$. Sia ora A_n l'interno di Δ_n (una palla aperta), A_n è contraibile ed otteniamo un altro isomorfismo in omologia $H_i(\Delta_n, \Delta_n - b) = H_i(A_n, A_n - b)$.

Naturalmente il simpleso standard Δ_n non è un simpleso di A_n ma, con una piccola omotopia si può restringere ad un generatore di $H_n(A_n, A_n - b)$.

7 Omologia simpliciale e singolare

NOTA In questa sezione proviamo che la omologia singolare coincide con quella simpliciale per gli spazi triangolabili.

OMOLOGIA SIMPLICIALE E SINGOLARE

Vogliamo provare che, per uno spazio triangolato X associato ad un complesso simpliciale $\mathcal{C} : (\mathcal{V}, \mathcal{S})$, l'omologia simpliciale coincide con quella singolare.

Per questo scegliamo un ordinamento totale dei vertici \mathcal{V} .

Ogni k -simpleso A è pertanto totalmente ordinato (ed in particolare orientato) ed i suoi vertici ordinati a_0, a_1, \dots, a_k determinano un simpleso singolare in X che possiamo ancora denotare con (a_0, a_1, \dots, a_k) .

Sia $C_k(X)$ il sottospazio di $S_k(X)$ generato dai semplici singolari (a_0, a_1, \dots, a_k) . La formula del bordo di un semplice singolare implica immediatamente che:

7.1 LEMMA. $C_*(X)$ è un sottocomplesso di catene di $S_*(X)$ che, come complesso di catene, è isomorfo al complesso di catene simpliciali.

Per avere dunque il confronto fra le due omologie bisogna provare

7.2 TEOREMA. L'inclusione i_X di $C_*(X)$ in $S_*(X)$ induce un isomorfismo in omologia.

Due inclusioni indotte da due diversi ordinamenti sono chain-omotope, quindi l'isomorfismo costruito è indipendente dall'ordinamento dei vertici.

DIM. Proviamolo per induzione sul numero N dei semplici di \mathcal{C} . Per $N = 1$ si ha che \mathcal{C} è un punto e l'enunciato è equivalente all'assioma di dimensione.

Sia dunque n la dimensione di X e sia Y il sottocomplesso di X ottenuto togliendo un unico semplice n -dimensionale $\Delta_n := (a_0, \dots, a_n)$ (ma lasciondone il bordo).

Consideriamo il diagramma commutativo di complessi di catene.

$$(7.3) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(Y) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X)/C_*(Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & i_Y \downarrow & & i_X \downarrow & & j \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S_*(Y) & \longrightarrow & S_*(X) & \longrightarrow & S_*(X)/S_*(Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Per induzione i_Y induce isomorfismo in omologia pertanto, dal lemma dei cinque, basta provare che j induce isomorfismo in omologia.

Per definizione il complesso $C_*(X)/C_*(Y)$ è 0 in ogni grado diverso da n ed in grado n ha come base il solo semplice Δ_n ovvero coincide con $\mathbb{Z}\Delta_n$.

Dunque

$$H_i(C_*(X)/C_*(Y)) = 0, \quad i \neq n, \quad H_n(C_*(X)/C_*(Y)) = \mathbb{Z}\Delta_n.$$

Questa omologia n -esima ha come base la classe del semplice (a_0, a_1, \dots, a_n) che è anche base della omologia $H_*(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$.

Basta quindi provare che la inclusione di coppie $(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \subset (X, Y)$ induce un isomorfismo in omologia.

Ragioniamo in modo analogo a quanto fatto nel §10, prendiamo un punto p interno a Δ_n .

L'inclusione di Y in $X - p$ è un retratto di deformazione e $H_i(X, Y) = H_i(X, X - p)$. Per escissione questa è anche isomorfa ad $H_i(X - Y, X - p - Y)$.

Identico ragionamento per l'inclusione di $\dot{\Delta}_n$ in $\Delta_n - p$.

La coppia $X - Y, \overset{\circ}{X} - Y$ coincide con la coppia $\Delta_n - \dot{\Delta}_n, \Delta_n - \dot{\Delta}_n - p$ esplicitiamo il diagramma commutativo di isomorfismi

$$\begin{array}{ccccc} H_i(\Delta_n - \dot{\Delta}_n, \Delta_n - p - \dot{\Delta}_n) & \xrightarrow{\cong} & H_i(\Delta_n, \Delta_n - p) & \xrightarrow{\cong} & H_i(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\ H_i(X - Y, X - p - Y) & \xrightarrow{\cong} & H_i(X, X - p) & \xrightarrow{\cong} & H_i(X, Y) \end{array}$$

L'isomorfismo richiesto è dunque provato.

Per la seconda parte, essendo la chain-omotopia una relazione di equivalenza basta provarlo quando si scambia l'ordine di due vertici successivi a, b .

Definiamo dunque la chain-omotopia s . Dato un simpleso t simpliciale orientato, se esso non contiene entrambi i vertici a, b poniamo $s(t) = 0$, se invece il simpleso è della forma abu poniamo per $s(abu)$ il simpleso singolare $babu$, si vede immediatamente che questa definizione risolve il nostro problema. \square

Vediamo dunque finalmente che, per gli spazi triangolabili l'omologia simpliciale è un invariante topologico che coincide con quella singolare la quale pertanto, in questi casi, è calcolabile in modo combinatorio. I numeri di Betti, i coefficienti di torsione e la caratteristica di Eulero Poincaré sono pertanto tutti invarianti topologici.

Resterebbe da provare che si ha invarianza topologica anche dei morfismi in omologia simpliciale. In effetti dato un morfismo simpliciale abbiamo definito un morfismo indotto sui complessi simpliciali. Bisogna provare che, con le identificazioni fatte, il morfismo indotto in omologia simpliciale coincide con quello in omologia singolare. Lasciamo questa verifica al lettore.

L'APPROCCIO DI CECH Vi è un altro metodo importante per fare il confronto fra le due omologie, basato sul seguente Teorema che lasciamo per esercizio (abbastanza difficile) al lettore.

TEOREMA. *Sia dato un ricoprimento aperto U_i di uno spazio X supponiamo che ogni aperto non vuoto intersezione di alcuni U_i sia aciclico ovvero con omologia ridotta identicamente nulla, allora l'omologia di X coincide con l'omologia del complesso simpliciale allociato al nervo del ricoprimento.*

SUGG. Si proceda per induzione sul numero degli aperti ed applicando la successione di Mayer Vietoris.

La rilevanza di questo Teorema nel caso simpliciale sta nel fatto che il ricoprimento di un complesso simpliciale formato dalle stelle dei suoi vertici ha la proprietà del Teorema ed il suo nervo è il complesso di partenza.

In effetti il metodo che abbiamo usato è un po' più generale e lo riutilizzeremo nello studio della dualità. Il lettore può saltare al momento questa digressione che ci sarà utile solo nel §12.

Supponiamo dunque di dare una stratificazione finita ed ordinata di uno spazio X , ovvero una decomposizione di X in sottoinsiemi non vuoti disgiunti X_1, X_2, \dots, X_n tali che la chiusura \overline{X}_i di X_i sia

$$\overline{X}_i = \cup_{j=1}^i X_j.$$

Supponiamo inoltre di avere per ogni $k = 1, \dots, n$ una catena singolare $c_k \in S_k(\overline{X}_k)$. Ora facciamo alcune ipotesi simili a ciò che avviene nel caso delle catene simpliciali.

- (1) Supponiamo che le catene c_k siano linearmente indipendenti e che, per ogni k si abbia che le catene c_i , $i \leq k$ siano base di un sottocomplesso C_k di $S_*(X)$.

In particolare $\partial c_k \in C_{k-1}$ e c_k è un ciclo relativo della coppia $(\overline{X}_k, \overline{X}_{k-1})$. Indichiamo con \bar{c}_k la sua classe in $H_k(\overline{X}_k, \overline{X}_{k-1})$.

- (2) Per la omologia supponiamo che

$$H_i(\overline{X}_k, \overline{X}_{k-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ \mathbb{Z}\bar{c}_k & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Abbiamo allora

7.4 LEMMA. *Per ogni i l'inclusione del complesso $C_i \subset S_*(\overline{X}_j)$ induce isomorfismo in omologia.*

DIM. La dimostrazione è identica a quella del Teorema precedente, infatti abbiamo solo assiomaticamente gli ingredienti necessari. Per induzione su i , si paragonano le due successioni esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{i-1} & \longrightarrow & C_i & \longrightarrow & \mathbb{Z}c_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S_*(\overline{X}_{i-1}) & \longrightarrow & S_*(\overline{X}_i) & \longrightarrow & S_*(\overline{X}_i)/S_*(\overline{X}_{i-1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

□

Osservazione Questo metodo si può usare quando gli X_i sono sottocomplessi di un complesso simpliciale e si sa che la coppia $\overline{X}_i, \overline{X}_{i-1}$ è, per ogni i , una *cella poliedrale* che definiremo nel Cap. 6.

Le ipotesi che abbiamo fatto sulle coppie della stratificazione si riassumono nella seguente

7.5 DEFINIZIONE. *Una coppia X, A dove X è uno spazio triangolato ed A un sottocomplesso si dice una cella omologica se $H_i(X, A) = 0, \forall i \neq n, H_n(X, A) = \mathbb{Z}$.*

Rimandiamo per maggiori dettagli ai Cap. 6 e 7.

8 Confronto fra $\pi_1(X, x_0)$ ed $H_1(X)$

NOTA In questa sezione mostriamo che il primo gruppo di omologia di uno spazio connesso è la *abelianizzazione* del gruppo fondamentale.

CONFRONTO Sia X uno spazio connesso per archi ed x_0 un suo punto. Ogni cammino α fra due estremi A, B si può pensare come un simpleso singolare con bordo $B - A$ e un laccio α si può pensare come un simpleso singolare 1-dimensionale con bordo 0. Pertanto ad un laccio α è associata una classe di omologia $[\alpha] \in H_1(X)$, per la proprietà di omotopia tale classe dipende solo dalla classe di omotopia (libera) di α . Dati due cammini α da A a B e β da B a C possiamo comporli in $\alpha \circ \beta$ da A a C . La suddivisione baricentrica del cammino $\alpha \circ \beta$, pensato come 1-simpleso singolare è $\alpha - \beta^{-1}$ che è chiaramente omologo a $\alpha + \beta$. Pertanto applicando questa eguaglianza ai lacci abbiamo

8.1 PROPOSIZIONE. *Vi è un omomorfismo (funtoriale)*

$$(8.2) \quad \rho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X).$$

Vogliamo dunque studiare questo omomorfismo e provare il

8.3 TEOREMA.

- (1) ρ è suriettivo
- (2) il suo nucleo è generato dai commutatori di $\pi_1(X, x_0)$.⁴

DIM. 1) Prima di tutto si osservi che, dato un laccio β di origine un punto x_1 ed un cammino α da x_0 ad x_1 , la classe di omologia di $\alpha\beta\alpha^{-1}$ è rappresentata dal ciclo $[\alpha] + [\beta] + [\alpha^{-1}]$ omologo a $[\beta]$, quindi la classe di β è nell'immagine di ρ .

Sia a una classe in $H_1(X)$ rappresentata da un 1-ciclo $c := \sum_i n_i s_i$ con $n_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Cambiando se necessario l'orientazione di s_i e ripetendo più volte lo stesso simpleso possiamo assumere che $c := \sum_{i=1}^k s_i$.

Ogni s_i è un 1-simpleso con $\partial s_i = A_i - B_i$ e $\sum(A_i - B_i) = 0$.

Diremo che l'espressione di c è ridotta se la somma data non si può spezzare nella somma di due parti $c = c_1 + c_2$ con c_1, c_2 cicli (basta che sia c_1 un ciclo poiché $\partial c_1 + \partial c_2 = \partial c = 0$).

Evidentemente basta provare che un ciclo c dato da una espressione ridotta è nell'immagine di ρ . Proviamolo per induzione sul numero k di addendi nella espressione ridotta $c := \sum_{i=1}^k s_i$.

⁴In un gruppo G un commutatore è un elemento del tipo $aba^{-1}b^{-1}$, se $\rho : G \rightarrow H$ è un omomorfismo ed H è abeliano (scritto additivamente) $\rho(aba^{-1}b^{-1}) = 0$. Il sottogruppo di G generato da tutti i commutatori è un sottogruppo normale, detto **derivato** di G e denotato $[G, G]$.

Per costruzione $G/[G, G]$ è commutativo. Per ovvie ragioni $G/[G, G]$ è detto **abelianizzazione** di G .

Se $k = 1$ e $c = s_1$ allora $\partial s_1 = 0$ e $c = s_1$ è la classe di un laccio, quindi nell'immagine di ρ . Viceversa se $\partial s_1 = 0$ poiché per ipotesi la somma è ridotta deve essere $c = s_1$ è la classe di un laccio.

Altrimenti $A_1 \neq B_1$, poiché $dc = 0$ deve esistere nella somma un termine s_2 con $B_1 = A_2$.

Procedendo in questo modo troviamo nella somma data semplici s_1, s_2, \dots, s_k con $B_i = A_{i+1}$. L'algoritmo termina quando $B_k = A_1$. In questo caso la classe di omologia $s := \sum_i s_i$ è un ciclo che, avendo supposto c ridotta, deve coincidere con c .

Ora s è omologo, per suddivisione, alla classe del laccio ottenuto componendo i cammini s_i e siamo tornati al primo passo della dimostrazione. Questo conclude la dimostrazione della suriettività.

2) Poiché $H_1(X)$ è commutativo i commutatori sono nel nucleo. Bisogna vedere il viceversa.

Sia dunque α un laccio (che pensiamo anche come 1-ciclo singolare), la cui classe di omologia sia nulla, dobbiamo esprimere α a meno di omotopia, nel sottogruppo generato dai commutatori.

Per ipotesi α deve essere un bordo e vi è quindi una 2-catena $c := \sum_j h_j u_j$ con h_j interi non nulli ed ogni u_j un due semplice con $\partial c = \alpha$.

Sia $\partial u_j = a_j - b_j + c_j$ da cui $\alpha = \partial c = \sum h_j (a_j - b_j + c_j)$, vi è dunque un semplice nella lista u_j il cui bordo consiste è $\pm(\alpha - \beta + \gamma)$. Il bordo di un tale 2-simplesso è il cammino $\alpha\beta^{-1}\gamma$.

Questo semplice fornisce anche una omotopia fra α e $\gamma^{-1}\beta$.

Se $\beta - \gamma = 0$ il laccio $\gamma^{-1}\beta$ è omotopo al laccio costante ed abbiamo terminato perché la classe di omotopia di α è banale. Altrimenti i due elementi β, γ devono essere cancellati ciascuno da qualche altro termine di un ∂u_j della somma ∂c . In questo caso sostituiamoli con i corrispondenti cammini che completano il bordo di ∂u_j .

Proseguendo per induzione possiamo dopo i passi, costruire un laccio λ omotopo ad α e composizione di cammini

$$\lambda := \beta_1^{\epsilon_1} \beta_2^{\epsilon_2} \beta_3^{\epsilon_3} \dots \beta_k^{\epsilon_k}$$

con $\epsilon_i = \pm 1$ per cui la somma delle classi $p_i := \sum \epsilon_i [\beta_i]$ appare nella espressione ∂c come parte della somma totale.

Al termine di questo algoritmo $\sum_i \epsilon_i [\beta_i] = 0$.

Pertanto abbiamo che, nel prodotto

$$(8.4) \quad \lambda := \beta_1^{\epsilon_1} \beta_2^{\epsilon_2} \beta_3^{\epsilon_3} \dots \beta_k^{\epsilon_k}$$

ogni fattore appare tante volte con l'esponente 1 quante con l'esponente -1.

Proviamo che un tale laccio è nel sottogruppo dei commutatori. Siano P_1, \dots, P_k gli estremi distinti dei cammini β_j . Per ogni tale punto P costruiamo un cammino μ_P da x_0

a P . Se β è un fattore del prodotto 8.4, di punto iniziale A e finale B , sostituiamo a β il prodotto $\mu_A\beta\mu_B^{-1}$.

Da questa sostituzione il prodotto 8.4 viene sostituito con un laccio omotopo, prodotto di lacci del tipo $\mu_i\beta\mu_j^{-1}$, $\mu_j\beta^{-1}\mu_i^{-1}$.

Abbiamo quindi, nel gruppo $\pi_1(X, x_0)$ un elemento scritto come prodotto di fattori in cui ogni fattore appare tante volte con l'esponente 1 quante con l'esponente -1. Modulo il gruppo commutatore un tale elemento è evidentemente 1 come richiesto.

□

9 Alcuni teoremi classici di topologia dello spazio

NOTA In questa sezione proviamo, come conseguenza della teoria omologica, i teoremi classici enunciati n 1.2 di separazione di Jordan e di invarianza del dominio.

APPLICAZIONI CLASSICHE Avendo stabilito questi meccanismi algebrici della omologia e fatto alcuni calcoli iniziali possiamo ritornare ad alcune delle applicazioni classiche sulla topologia dello spazio \mathbb{R}^n e della sfera S^n . Supponiamo prima di tutto di prendere il cubo r -dimensionale I^r e di avere un omeomorfismo di tale cubo su un chiuso e_r di S^n proviamo

9.1 TEOREMA. $H_i^\#(S^n - e_r) = 0$, $\forall i > 0$. In particolare $S^n - e_r$ è connesso.

DIM. Lo dimostriamo per induzione su r . Per $r = 0$, e_r si riduce ad un punto. La sfera meno un punto è contraibile e tutto segue.

Sia ora $I^r = I^{r-1} \times I$, per ogni $t \in [0, 1]$ possiamo considerare il cubo $r-1$ dimensionale $I^{r-1} \times \{t\}$ e la sua immagine $e_{r-1,t}$ che si muove in e_r , inoltre per un intervallo $[a, b]$ indichiamo con $e_{r-1}[a, b]$ l'immagine di $I^{r-1} \times [a, b]$.

Per induzione abbiamo che $H_i^\#(S^n - e_{r-1,t}) = 0$, $\forall i, \forall t$.

Prendiamo dunque un possibile elemento di un $H_i(S^n - e_r)$ e rappresentiamolo con una catena c . In $S^n - e_{r-1,t}$, per induzione, tale ciclo è il bordo di una catena f_t che per costruzione è la somma di simplessi singolari la cui immagine non incontra $e_{r-1,t}$.

Per compattezza ne segue che tale catena è ancora contenuta in $S^n - e_{r-1}[a, b]$ per qualche intorno aperto $[a, b]$ di t . Possiamo, sempre per compattezza, trovare una decomposizione dell'intervallo $[0, 1]$ in m intervalli $[a_k, a_{k+1}]$ tali che c sia il bordo di una catena f_k contenuta in $S^n - e_{r-1}[a_k, a_{k+1}]$ per ogni k .

Dobbiamo ora far vedere, per induzione su k , che l'immagine della classe di omologia di c in $S^n - e_{r-1}[0, a_k]$ è nulla ottenendo il risultato voluto per $k = m$ ($e_{r-1}[0, 1] = e_r$).

Il passo elementare consiste nel provare che, se l'immagine della classe di omologia di c in $S^n - e_{r-1}[0, a]$, $S^n - e_{r-1}[a, b]$ rispettivamente è nulla, allora è anche nulla la immagine in $S^n - e_{r-1}[0, b]$.

Applichiamo dunque la successione di Mayer Vietoris ai due aperti

$$A := S^n - e_{r-1}[0, a], B := S^n - e_{r-1}[a, b]$$

con intersezione $S^n - e_{r-1}[0, b]$ ed unione $S^n - e_{r-1, a}$, su cui abbiamo per induzione lo svanimento della omologia.

$$0 = H_{i+1}^\#(A \cup B) \rightarrow H_i^\#(A \cap B) \rightarrow H_i^\#(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \rightarrow H_i^\#(A \cup B) = 0 \rightarrow \dots$$

Se ne deduce un isomorfismo fra $H_i^\#(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B)$ e quindi una classe di omologia in $A \cap B$ che svanisce in A ed in B è nulla. \square

Ora prendiamo una sfera S^n e, contenuta in essa, una immagine omeomorfa s_r di una sfera S^r . Decomponiamo s_r in due calotte (omeomorfe ad un cubo) e_r^+, e_r^- la cui intersezione s_{r-1} è pertanto omeomorfa ad una sfera S^{r-1} . Siano $A := S^n - e_r^+$, $B := S^n - e_r^-$ da cui $A \cap B = S^n - s_r$, $A \cup B = S^n - s_{r-1}$. Applichiamo la successione di Mayer Vietoris ottenendo, dal Teorema 9.1.

$$(9.2) \quad H_{i+1}^\#(S^n - s_{r-1}) = H_i^\#(S^n - s_r)$$

continuando in questo processo otteniamo infine

$$(9.3) \quad H_{i+r}^\#(S^n - s_0) = H_i^\#(S^n - s_r)$$

$S^n - s_0$ è omeomorfa ad una n palla bucata, omotopicamente equivalente ad S^{n-1} e quindi

$$H_j^\#(S^n - s_0) = 0, \forall j \neq n-1, H_{n-1}^\#(S^n - s_0) = \mathbb{Z}.$$

Deduciamo:

9.4 TEOREMA DI SEPARAZIONE DI JORDAN-BROUWER. *Nelle ipotesi precedenti deve essere necessariamente $r \leq n$, e $H_i^\#(S^n - s_r) = 0$ se $i \neq n-1-r$ e $H_{n-1-r}^\#(S^n - s_r) = \mathbb{Z}$.*

In particolare se $r = n$ la sfera s_n coincide con S^n , se $r = n-1$ la sfera s_{n-1} divide S^n in 2 parti connesse di ciascuna delle quali s_{n-1} è bordo, se $r < n-1$, $S^n - s_r$ è connessa.

DIM. Per la 9.3 si ha che tutti i gruppi di omologia ridotta sono 0 tranne

$$H_{n-1-r}^\#(S^n - s_r) = \mathbb{Z}.$$

Poiché si deve avere $n - 1 - r \geq -1$ (cf. §5 Omologia ridotta), la prima condizione è provata. Il resto è la interpretazione di questa formula. Se $H_{-1}^{\#}(S^n - s_n) = \mathbb{Z}$ significa che $S^n - s_n$ è l'insieme vuoto, mentre $H_0^{\#}(S^n - s_{n-1}) = \mathbb{Z}$ significa che $S^n - s_{n-1}$ ha esattamente due componenti connesse (per archi).

Resta da provare in questo caso l'enunciato sul bordo.

Siano A_1, A_2 i due aperti connessi in cui si divide $S^n - s_{n-1}$ e sia $P \in s_{n-1}$ un punto, dobbiamo provare che P è punto di accumulazione di A_1, A_2 .

Preso comunque un intorno di P esiste un intorno V di P che interseca s_{n-1} in un intorno sferico aperto U e quindi $s_{n-1} - U$ è omeomorfo ad una cella chiusa e per il Teorema 9.2 $S^n - (s_{n-1} - U)$ è connesso per archi.

Pertanto dati un punto $Q_1 \in A_1$ e $Q_2 \in A_2$ esiste un arco che li unisce e che deve necessariamente incontrare U è chiaro che da questo segue che un punto di U è di accumulazione per A_1 ed un altro per A_2 ma dalla arbitrarietà di U segue che P stesso è di accumulazione per i due aperti come richiesto. \square

In effetti il teorema va visto come una grande generalizzazione del teorema di separazione di Jordan in quanto implica in generale una sconnessione omologica nella opportuna dimensione.

Per capire geometricamente come si individua un generatore di $H_{n-1-r}^{\#}(S^n - s_r) = \mathbb{Z}$ mettiamoci nella ipotesi (valida per le usuali applicazioni geometriche) che la funzione $f : S^k \rightarrow S^n$ non sia troppo patologica ma che esista un punto $p \in s_k$ e coordinate locali (x_1, \dots, x_n) , $(-1 < x_i < 1)$ in un intorno U di p in S^n per cui $p = 0$ e $s_k \cap U = \{(x_1, \dots, x_r, 0, 0, \dots, 0) | x_i = 0, \forall i > r\}$.

In questo caso preso un numero $0 < a < 1$ possiamo considerare la sfera di dimensione $n - r - 1$ contenuta in $U - s_r$ e data da

$$S^{n-r-1} := \{(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n) | \sum_{j=r+1}^n x_j^2 = a.\}$$

9.5 Esercizio Usando le opportune successioni di omologia provare che l'inclusione $S^{n-r-1} \rightarrow S^n - s_r$ induce isomorfismo in omologia.

Vi sono degli aspetti intuitivamente poco evidenti in questo teorema. Si potrebbe infatti pensare che i due aperti A_1, A_2 siano delle celle ma questo è vero solo per dimensione 2 (Teorema di Schönflies). In dimensione 3 esistono le cosiddette sfere cornute di Alexander per cui A_i non è neppure semplicemente connesso!

Possiamo dedurre da questo teorema anche il teorema di invarianza del dominio di Brouwer.

DIM. TEOREMA DI INVARIANZA DEL DOMINIO. Sia U un aperto di \mathbb{R}^k e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua ed iniettiva.

Allora $f(U)$ è aperto ed f è un omeomorfismo fra U ed $f(U)$.

Compattificando \mathbb{R}^k con un punto all'infinito possiamo ridurci ad $f : U \rightarrow S^k$.

Prendiamo un punto $P \in U$, una palla D^k di raggio r contenuta in U e sia S^{k-1} il suo bordo. Siano e_k, s_{k-1} rispettivamente l'immagine di D^k, S^{k-1} tramite f .

Per costruzione $S^k - s_{k-1}$, che per il teorema di separazione di Jordan ha due componenti connesse A_1, A_2 , è l'unione disgiunta degli insiemi $S^k - e_k$ ed e_k, s_{k-1} .

Dai teoremi precedenti segue che $S^k - e_k$ è connesso, anche $e_k - s_{k-1}$ è connesso, essendo omeomorfo a $D^k - S^{k-1}$. Ne segue che $e_k - s_{k-1}$ e $S^k - e_k$ coincidono con le due componenti A_i .

Pertanto l'immagine $e_k - s_{k-1}$ (della palla aperta di centro P) è un aperto. Per l'arbitrarietà di P il teorema segue. \square

9.6 Esercizio

- (1) Sia U un aperto di \mathbb{R}^k e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^h$ continua ed iniettiva provare che $k \leq h$.
- (2) Date due celle e_k, e_h disgiunte in S^n provare che

$$H_*^\#(S^n - e_k - e_h) = H_*^\#(S^{n-1})$$

dove S^{n-1} è una qualunque sfera che *separa* le due celle.

- (3) Sia M un nastro di Möbius immerso in \mathbb{S}^3 provare che la sola omologia ridotta di $\mathbb{S}^3 - M$ è in grado 1 e $H_1(\mathbb{S}^3 - M) = \mathbb{Z}c$ dove c è la classe di una circonferenza che si avvolge (una volta) intorno al nastro di Möbius. (sugg. descrivere M come unione di 2 celle bidimensionali che si intersecano in due segmenti.)
- (4) Nell'esercizio precedente sia C il bordo del nastro (una circonferenza), provare che la mappa $\mathbb{Z} = H_1(\mathbb{S}^3 - M) \rightarrow \mathbb{Z} = H_1(\mathbb{S}^3 - C)$ è la moltiplicazione per 2. (sugg. La decomposizione del nastro in due celle induce sul bordo una decomposizione in 4 archi, confrontare le due successioni di Mayer Vietoris associate.)
- (5) Supponiamo (per assurdo) di poter immergere un piano proiettivo P in \mathbb{R}^3 , e quindi in \mathbb{S}^3 . Utilizzando la scomposizione del piano proiettivo in una cella E ed un nastro di Möbius M (che si intersecano nel comune bordo, una circonferenza C) arrivare ad una contraddizione. Stessa analisi per una bottiglia di Klein.

(sugg. nella successione di Mayer Vietoris relativa agli aperti $A := \mathbb{S}^3 - M$, $B := \mathbb{S}^3 - E$, $A \cup B = \mathbb{S}^3 - C$ abbiamo la mappa $\mathbb{Z} = H_1(\mathbb{S}^3 - M) \rightarrow \mathbb{Z} = H_1(\mathbb{S}^3 - C)$, che, per l'esercizio precedente è la moltiplicazione per 2, questo implica l'esistenza di 2-torsione in $H_0^\#(\mathbb{S}^3 - P)$ una contraddizione perché $H_0^\#$ è sempre un gruppo libero!).

Utilizziamo infine l'omologia per verificare che la nozione di varietà topologica di dimensione n e di suo bordo sono intrinseche.

Indichiamo con $\mathbb{R}^{n,+}$ l'insieme dei vettori $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $x_n \geq 0$ e sia per $r > 0$ la semipalla $D(r)^{n,+} := \{x \in \mathbb{R}^{n,+} \mid \|x\| < r\}$.

Proponiamo al lettore di verificare che $H_i(D(r)^{n,+}, D(r)^{n,+} - 0) = 0$, $\forall i$ al contrario del fatto che per la intera palla $H_n(D(r)^n, D(r)^n - 0) = \mathbb{Z}$.

9.7 DEFINIZIONE. *Uno spazio topologico X (di Hausdorff) si dice una varietà topologica n -dimensionale se ogni suo punto P ha un intorno omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n o di $\mathbb{R}^{n,+}$.*

Dalla teoria svolta si vede dunque che, per una varietà topologica X di dimensione n si ha per ogni punto $P \in X$, $H_n(X, X - P) = \mathbb{Z}$, o 0 .

Il bordo ∂X è l'insieme dei punti per cui $H_n(X, X - P) = 0$ e ∂X è una varietà di dimensione $n - 1$ senza bordo intrinsecamente definita in X .

10 Il grado di una mappa fra sfere

NOTA Il grado è un invariante topologico fondamentale che qui discutiamo per le sfere come preliminare allo studio dei CW complessi.

GRADO Consideriamo una funzione continua $f : S^n \rightarrow S^n$. Essa induce una applicazione $f_n : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ ossia un endomorfismo di \mathbb{Z} , che è quindi la moltiplicazione per un intero m .

Questo intero $d(f)$ si chiama **grado** della applicazione f . Per costruzione è un invariante omotopico di f .

Una prima proprietà del grado segue dalla funtorialità della omologia.

Il grado $d(f \circ g)$ della composizione di due funzioni è $d(f \circ g) = d(f)d(g)$, in particolare il grado di un omeomorfismo è ± 1 .

Un esempio notevole è il seguente. Prendiamo una permutazione $\sigma \in S_{n+1}$ dei vertici di Δ_n , essa induce un omeomorfismo della coppia $\Delta_n, \dot{\Delta}_n$ che nella omologia n -esima coincide con la moltiplicazione per il grado della applicazione continua indotta da tale permutazione in $\dot{\Delta}_n = S^{n-1}$. Affermiamo che tale grado è il segno della permutazione σ . Infatti l'applicazione $\sigma \rightarrow \text{deg}(\sigma)$ è un omomorfismo da $S_{n+1} \rightarrow \{\pm 1\}$. Basta quindi provare $\text{deg}(\tau) = -1$ per la trasposizione $\tau := (d-1, d)$. Seguendo l'induzione precedente ci si riduce a Δ_1 su cui è evidente per costruzione.

Questo esempio si può generalizzare. Prendiamo un intorno A dell'origine 0 in \mathbb{R}^n e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una applicazione differenziabile con $f(0) = 0$ e con lo Jacobiano non nullo in 0 . Possiamo restringere A ad un intorno in cui f è un diffeomorfismo sull'immagine (dal teorema delle funzioni implicite). Allora si ha che f induce una applicazione $f_n : \mathbb{Z} = H_n(A, A - 0) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) = \mathbb{Z}$ affermo che $f_n = 1$ se il determinante Jacobiano è positivo e -1 se è negativo.

Prima di tutto se f è lineare f è la composizione di una permutazione per una matrice a determinante positivo, il gruppo di tali matrici è connesso e quindi per omotopia l'enunciato segue.

In generale, componendo con una matrice lineare ci si riduce al caso che lo Jacobiano sia l'identità. In questo caso si scrive la omotopia $F(x, t) := tf + (1-t)I$ dove I è l'identità. In un intorno abbastanza piccolo di 0 $tf(x) + (1-t)x \neq 0$ se $x \neq 0$ (sempre per il teorema delle funzioni implicite applicato alla funzione F) e quindi abbiamo una omotopia di morfismi di coppie provando il teorema.

È importante sapere che il grado ha un calcolo *locale*. Supponiamo di avere un punto $P \in S^n$ con fibra $f^{-1}(P) = \{P_1, \dots, P_N\}$ e cominciamo con una osservazione.

Prendiamo (per ogni i) intorni sferici A_i di P_i disgiunti. Dalla coppia

$$S^n, S^n - \{P_1, \dots, P_N\}$$

per escissione di $U := S^n - \cup A_i$ si ottiene la coppia $\cup A_i, \cup A_i - P_i$. Da cui la identità

$$H_n(S^n, S^n - \{P_1, \dots, P_N\}) = H_n(\cup A_i, \cup A_i - P_i) = \bigoplus_{i=1}^N H_n(A_i, A_i - P_i) = \mathbb{Z}^N.$$

L'inclusione $(A_i, A_i - P_i) \rightarrow (S^n, S^n - P_i)$ induce per escissione un isomorfismo in omologia.

Dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^n - \{P_1, \dots, P_N\}) = \bigoplus_{i=1}^N H_n(A_i, A_i - P_i) = \mathbb{Z}^N \\ \downarrow 1_{S^n} & & \downarrow i \\ H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^n - \{P_i\}) = H_n(A_i, A_i - P_i) = \mathbb{Z} \end{array}$$

e l'omomorfismo indotto dall'inclusione $S^n \rightarrow (S^n, S^n - \{P_1, \dots, P_N\})$ è l'immersione diagonale di $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^N$.

Nelle ipotesi di partenza possiamo trovare un intorno aperto A di P ed intorni sferici A_i di P_i disgiunti tali che $f(A_i) \subset A$.

L'applicazione in omologia $H_n(A_i, A_i - P_i) \rightarrow H_n(A, A - P)$ con le identificazioni date $H_n(A_i, A_i - P_i) = \mathbb{Z} = H_n(A, A - P)$ è la moltiplicazione per un intero a_i che diremo **grado locale in P_i** .

Dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^n - \{P_1, \dots, P_N\}) = \bigoplus_{i=1}^N H_n(A_i, A_i - P_i) = \mathbb{Z}^N \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^n - \{P\}) = H_n(A, A - P) = \mathbb{Z} \end{array}$$

si deduce che il grado m di F è la somma $\sum_i a_i$ dei gradi locali.

Si può calcolare esplicitamente il grado locale in un punto P_i in cui f sia differenziabile con Jacobiano non nullo, dalla analisi fatta precedentemente, prendendo coordinate locali nelle due sfere compatibili con le orientazioni fissate si ha che il grado locale è ± 1 a seconda del segno del determinante.

11 CW complessi e omologia cellulare

NOTA La classe dei CW complessi è una classe molto ampia di spazi che si comportano in modo controllato per le teorie omologiche ed anche per la omotopia. Li introdurremo e ne calcoleremo la omologia.

CELLE Vogliamo ora discutere l'approccio cellulare all'omologia. Questo approccio ha un grande vantaggio rispetto a quello simpliciale. Esistono spazi le cui triangolazioni possono essere molto intricate ma che si presentano in modo semplice tramite celle. Parte della semplificazione si paga con la necessità di una più accurata analisi geometrica delle regole di incidenza delle celle.

Dati una coppia Y, A , uno spazio X ed una funzione continua $f : A \rightarrow X$ si può costruire un nuovo spazio $Z : Y \cup_f X$ per **incollamento** di Y ad X lungo A .

Z è il quoziente dell'unione disgiunta $Y \cup X$ modulo la equivalenza generata dalla **relazione di incollamento** $y \cong f(y), \forall y \in A$.⁵

Se A è chiuso in X lo spazio Z è di Hausdorff (tutti i dati sono di Hausdorff per ipotesi) e se X, Y sono compatti lo è anche Z .

Dato uno spazio X ed un sottospazio A si indica con X/A lo spazio quoziente di X modulo la relazione di equivalenza che identifica tutti i punti di A ad un unico punto.

Si osservi che (dalla proprietà universale)

$$(11.1) \quad Y \cup_f X/X = Y/A.$$

11.2 DEFINIZIONE.

- (1) Si dice che uno spazio Y si ottiene da uno spazio X attaccando k celle n -dimensionali quando, si prende una funzione continua $f : \cup_{i=1}^k S^{n-1} \rightarrow X$ sull'unione disgiunta di k copie della sfera $n-1$ dimensionale a valori in X e si attacca ad X , secondo f , l'unione disgiunta $\cup_{i=1}^k D_i^n$ di k copie della palla n dimensionale, di cui $\cup_{i=1}^k S_i^{n-1}$ è il bordo.
- (2) Uno spazio X si dice un CW-complesso (finito) di dimensione $\leq n$ se esiste una successione crescente di sottospazi $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \cdots \subset X_n = X$ tali che, X_0 si riduca ad un insieme finito di punti e per ogni k lo spazio X_{k+1} si ottiene da X_k attaccando un numero finito (possibilmente 0) di celle $k+1$ dimensionali.

Il sottospazio X_k si dice scheletro k -dimensionale del CW complesso X .⁶

⁵questo spazio è anche descritto come la soluzione universale per due applicazioni $i : X \rightarrow Z, j : Y \rightarrow Z$ con $j(y) = if(y), \forall y \in A$.

⁶la dimensione è esattamente n se vi sono delle effettive celle n dimensionali inoltre si vede immediatamente che la dimensione è quella topologica discussa nel primo capitolo.

OSSERVAZIONE. Da 11.1 segue che, se Y si ottiene da uno spazio X attaccando k celle n -dimensionali, $Y/X = (\cup_{i=1}^k D_i^n)/(\cup_{i=1}^k S_i^{n-1})$. Il quoziente D^n/S^{n-1} è omeomorfo alla sfera S^n ($n > 0$). $(\cup_{i=1}^k D_i^n)/(\cup_{i=1}^k S_i^{n-1})$ si ottiene incollando k tali sfere in un punto fissato P_0 . Un tale spazio si chiama un *bouquet* di sfere e si denota con $\vee_{i=1}^k S_i^k$. Per ogni i vi è una inclusione j_i della sfera S^k nell' i -esimo addendo del bouquet ed una proiezione p_i sull' i -esimo addendo che contrae le altre sfere ad un punto, $p_i j_i$ è l'identità, mentre $p_i j_k$ è costante per $k \neq i$. Dalle successioni esatte delle coppie segue che

$$H_i(\cup_{i=1}^k D_i^n, \cup_{i=1}^k S_i^{n-1}) = H_i(\vee_{i=1}^k S_i^k, P_0)$$

per ogni i ed in particolare $H_k(\vee_{i=1}^k S_i^k)$ è un gruppo libero su k generatori e_i che coincidono con le immagini della classe canonica di $H_k(S^k)$ tramite le j_i .

Supponiamo che Y si ottenga da uno spazio X attaccando k celle n -dimensionali D_i^n . Siano P_1, \dots, P_k i centri delle k celle. Poiché una cella chiusa privata del centro si retrae sul bordo, X è un retratto di deformazione di $Y - \{P_1, \dots, P_k\}$.

In effetti questo è un caso speciale della proprietà dei mapping con, infatti poiché il disco D^n non è altro che il cono sulla sfera S^{n-1} (con vertice il centro), abbiamo che l'attaccamento di una cella di dimensione n dato da una funzione $f : S^{n-1} \mapsto X$ è il mapping cono di f .

L'inclusione della coppia $(Y, X) \rightarrow (Y, Y - \{P_1, \dots, P_k\})$ induce quindi isomorfismo in omologia. Escindiamo X da questa coppia, otteniamo $Y - X = \cup A_i^n$, unione di k copie di palle aperte n -dimensionali A_i e $Y - X - \{P_1, \dots, P_k\} = \cup A_i^n - P_i$. Pertanto

$$(11.3) \quad H_j(Y, X) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq n \\ \mathbb{Z}^k & \text{se } j = n \end{cases}$$

Analizziamo dunque la successione esatta della coppia (Y, X) :

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(Y, X) \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_i(Y) \rightarrow H_i(Y, X) \rightarrow \dots$$

se $i \neq n, n-1$ vediamo che si ha che $H_i(X) = H_i(Y)$. L'unica omologia che può cambiare è in grado $n, n-1$.

In questi gradi abbiamo, ad esempio per l'attaccamento di una sola cella:

$$0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(Y) \rightarrow 0.$$

Come si modifica dunque l'omologia dipende dalla natura di δ , sappiamo che δ si identifica alla applicazione indotta dalla mappa di incollamento $f : S^{n-1} \rightarrow X$ nella omologia $n-1$ -esima, in definitiva alla classe di omologia $c \in H_{n-1}(X)$ immagine dell generatore della omologia $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$. Facciamo qualche esempio. Se ad esempio c è non nulla, attaccando la cella si *uccide* la classe c , si ha che $H_{n-1}(Y)$ è uguale a $H_{n-1}(X)/\mathbb{Z}c$. Se c ha ordine infinito segue che $H_n(X) = H_n(Y)$. Altrimenti abbiamo una successione esatta $0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ e $H_n(Y) = H_n(X) \oplus \mathbb{Z}$, abbiamo *aggiunto* una classe di omologia ad X .

Mettiamoci ora nelle ipotesi in cui X sia un CW-complesso e X_k il suo scheletro k -dimensionale. Per induzione su k , dal calcolo precedente e dalla successione esatta della coppia X_{k+1}, X_k segue che

$$(11.5) \quad H_i(X_k) = H_i(X_{k+1}) \text{ se } i < k, \quad H_i(X_k) = 0 \text{ se } i > k.$$

In particolare $H_k(X) = H_k(X_{k+1})$.

Costruiamo un complesso $C_k(X) := H_k(X_k, X_{k-1})$ e bordo $C_k(X) \xrightarrow{d} C_{k-1}(X)$ indotto dalla composizione

$$H_k(X_k, X_{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(X_{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2}).$$

Per definizione componendo d^2 si passa per

$$H_{k-1}(X_{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2}) \rightarrow H_{k-2}(X_{k-2})$$

che è 0.

11.6 DEFINIZIONE. *Il complesso di catene $C_*(X)$ è detto complesso cellulare associato al CW complesso X .*

11.7 TEOREMA. *I gruppi di omologia del complesso cellulare si identificano ai gruppi di omologia singolare di X .*

DIM. Utilizziamo 11.5 e guardiamo al diagramma con le righe e la colonna esatte:

$$(11.8) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ H_{k+1}(X_{k+1}, X_k) & \longrightarrow & H_k(X_k) & \longrightarrow & H_k(X_{k+1}) & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow d & \downarrow & & & & \\ & & H_k(X_k, X_{k-1}) & & & & \\ & & \downarrow & \searrow d & & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{k-1}(X_{k-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2}) & & \end{array}$$

In questo diagramma leggiamo, ispezionando la colonna, che $H_k(X_k)$ si identifica con i cicli in dimensione $k + 1$ del complesso cellulare.

Dallo stesso diagramma segue che, in $H_k(X_k)$, i bordi di dimensione k sono l'immagine di $H_{k+1}(X_{k+1}, X_k)$. Finalmente sempre dalla esattezza della riga di 11.7 segue che $H_k(X_{k+1})$ si identifica con l'omologia k -sima del complesso cellulare. Da 11.5 $H_k(X) = H_k(X_{k+1})$. \square

Per calcolare effettivamente la omologia di un CW complesso si devono presentare esplicitamente i gruppi del complesso ed il bordo $C_k(X) \xrightarrow{d} C_{k-1}(X)$.

Per k dato sia $f_k : \cup_{i=1}^{m_k} S^{k-1} \rightarrow X_{k-1}$ la mappa di attaccamento delle celle k dimensionali. $g_k : \cup_{i=1}^{m_k} D^k \rightarrow X_k$ la mappa indotta dall'incollamento.

Dalla 11.5 segue che $C_k(X)$ è il gruppo libero che ha come base le immagini c_i^k , tramite g_k , dei generatori canonici delle omologie $H_k(D_i^k, S_i^{k-1}) = \mathbb{Z}$.

Possiamo anche prendere un secondo punto di vista e proiettare su $X_k/X_{k-1} = \vee_{i=1}^{m_k} S^k$ ed identificare i generatori c_i con i generatori canonici di un bouquet di sfere.

Dal diagramma commutativo:

$$(11.9) \quad \begin{array}{ccc} \oplus_i H_k(D_i^k, S_i^{k-1}) & \xrightarrow[\cong]{g_k} & H_k(X_k, X_{k-1}) = C_k(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \oplus_i H_{k-1}(S_i^{k-1}) & \xrightarrow{f_k} & H_{k-1}(X_{k-1}) \\ & & \downarrow \\ & & H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2}) = \tilde{H}_{k-1}(X_{k-1}/X_{k-2}) \end{array}$$

Componendo la mappa di attaccamento con la proiezione di X_k su X_k/X_{k-1} si ha una mappa

$$(11.10) \quad \bar{f}_k : \cup_{i=1}^{m_{k+1}} S^k \rightarrow \vee_{i=1}^{m_k} S^k$$

Questa mappa induce in omologia per $k > 0$

$$(11.11) \quad \bar{f}_k : \mathbb{Z}^{m_{k+1}} = H_k(\cup_{i=1}^{m_{k+1}} S^k) \rightarrow H_k(\vee_{i=1}^{m_k} S^k) = \mathbb{Z}^{m_k}$$

La matrice di questa applicazione contiene nel posto ij il grado della applicazione fra due sfere S^k ottenuta componendo l'inclusione di S^k nel j -esimo termine della unione $\cup_{i=1}^{m_{k+1}} S^k$ con la proiezione di $\vee_{i=1}^{m_k} S^k$ sul suo i -esimo termine.

Da 11.7,11.8 segue che 11.10 si identifica con il differenziale del complesso cellulare. Pertanto

11.12 TEOREMA.

$$d(c_i^k) = \sum_{j=1}^{m_{k-1}} a_{ji} c_j^{k-1}$$

dove a_{ji} è il grado della applicazione composta $g_k : S^k = D_i^k/S_i^{k-1} \rightarrow X_k/X_{k-1} = \bigvee_{i=1}^{m_k} S_i^k \xrightarrow{p_j} S^k$.

In definitiva la conoscenza dei gradi delle funzioni fra sfere, indotte dagli incollamenti, è la condizione necessaria e sufficiente per esplicitare il complesso cellulare algebrico.

Abbiamo quasi provato che tale grado dipende solo dalla classe di omotopia della funzione, anche se abbiamo usato la omologia per definirlo, in effetti proveremo nel Capitolo 8 dedicato alla omotopia che due applicazioni della sfera in se sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado.

In alcuni casi speciali si può dire a priori che tutte le mappe di incidenza sono 0. In questo caso il complesso C_k coincide con la omologia.

Un caso notevole si ha quando tutte le celle hanno dimensione pari. Lo spazio proiettivo complesso ed altre interessanti varietà algebriche (varietà di bandiere, varietà toriche ecc.) godono di questa proprietà speciale.

A questo punto conviene fare una osservazione di carattere generale. Riguardando accuratamente la dimostrazione del calcolo cellulare della omologia il lettore dovrebbe convincersi che tale calcolo è esclusivamente basato su alcune proprietà della omologia che potrebbero essere prese come assiomi e che pertanto caratterizzano la omologia sugli spazi singolari. Queste proprietà in forma assiomatica definiscono una Teoria omologica secondo Eilenberg e Steenrod. Rimandiamo alla fine di questo capitolo, §13 per una discussione formale.

ALCUNE PROPRIETÀ GEOMETRICHE.

Discutiamo alcuni fatti geometrici standard che si usano nella teoria dei CW complessi o più in generale in omotopia.

11.13 LEMMA. *Siano X, Y due spazi topologici $f : X \rightarrow Y$ una applicazione $C(f)$ il mapping cono. Dato $A \subset Y$ un aperto esiste un aperto B di $C(f)$ con $A \cap Y = A$ ed A è un retratto di deformazione di B .*

DIM. Il cono di X privato del suo vertice è omeomorfo ad $X \times [0, 1)$ (l'intervallo chiuso a sinistra ed aperto a destra). Il mapping cono privato del suo vertice si ottiene dunque attaccando $X \times [0, 1)$ tramite la funzione di incollamento della base $X \times 0$. Detto $U := f^{-1}(A)$ e V l'immagine in $C(f)$ di $U \times [0, 1)$ si ha che $B := A \cup V$ soddisfa le condizioni del Lemma. si ha dunque che, □

11.14 PROPOSIZIONE. *Se Y si ottiene da X accacciando un numero finito di celle, esiste un intorno aperto U di X in Y di cui X è retratto di deformazione. Ovvero la coppia (Y, X) è buona.*

DIM. Per induzione sul numero di celle dal lemma precedente. □

Vi è una ultima proprietà generale che è utile discutere. La *proprietà di estensione delle omotopie*.

11.15 DEFINIZIONE. *Si dice che una coppia (X, A) ha la proprietà di estensione delle omotopie se, data comunque una applicazione $f : X \rightarrow Y$ ed una omotopia $H : A \times I \rightarrow Y$ della restrizione di f ad A , tale omotopia si estende ad una omotopia $h' : X \times I \rightarrow Y$ di f*

Vi è un semplice criterio per verificare questa proprietà.

11.16 PROPOSIZIONE. *Una coppia (X, A) ha la proprietà di estensione delle omotopie se e solo se $X \times 0 \cup A \times I$ è un retratto di $X \times I$.*

DIM. Dare una applicazione $f : X \rightarrow Y$ ed una omotopia $H : A \times I \rightarrow Y$ della restrizione di f ad A è equivalente a dare una applicazione $g : X \times 0 \cup A \times I \rightarrow Y$. Se $r : X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$ è una retrazione $g \circ r$ è una omotopia che soddisfa le condizioni richieste. Viceversa supponiamo che (X, A) ha la proprietà di estensione delle omotopie. Sia $Y := X \times 0 \cup A \times I$ e g la identità. Una estensione della omotopia è in questo caso una retrazione come richiesto. \square

Osservazione 1) Data una tripla $A \subset B \subset X$ se (X, B) e (B, A) hanno la proprietà di estensione delle omotopie allora anche (X, A) ha la proprietà di estensione delle omotopie.

Vogliamo applicare la teoria ai CW complessi.

11.17 LEMMA. *$D^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$ è un retratto di deformazione di $D^n \times I$.*

DIM. Per provarlo prendiamo una coppia omeomorfa (per l'omeomorfismo lasciamo i dettagli per esercizio al lettore), e cioè il semplice Δ^{n+1} con il sotto complesso C formato dall'unione di tutte le facce che contengono un vertice ad esempio v_0 . Se b è il baricentro della faccia opposta a v_0 si vede facilmente che $\Delta^{n+1} = C * b$, ogni elemento di Δ^{n+1} si scrive come $sa + (1-s)b$, $0 \leq s \leq 1$, $a \in C$. Come omotopia che fornisce il retratto di deformazione prendiamo $H_t(sa + (1-s)b) := (sa + (1-s)[(1-t)b + tv_0])$ \square

11.18 LEMMA. *Se X si ottiene da A attaccando una cella, la coppia (X, A) ha la proprietà di estensione delle omotopie.*

DIM. In questo caso possiamo dimostrare che $X \times 0 \cup A \times I$ è perfino un retratto di deformazione di $X \times I$. Questo segue facilmente dal fatto che $D^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$ è un retratto di deformazione di $D^n \times I$. Lasciamo i dettagli per esercizio al lettore. \square

Se X è di Hausdorff e (X, A) ha la proprietà di estensione delle omotopie A è chiuso. In fatti in uno spazio di Hausdorff un retratto è necessariamente chiuso.

COROLLARIO. *Se X si ottiene da A attaccando celle, ad esempio se X è un CW complesso e A un sottocomplesso, la coppia (X, A) ha la proprietà di estensione delle omotopie.*

Notiamo infine una utile proprietà.

11.19 PROPOSIZIONE. Se (X, A) ha la proprietà di estensione delle omotopie e A è contraibile la proiezione $p : X \mapsto X/A$ è una equivalenza omotopica.

DIM. Per la proprietà di estensione delle omotopie una contrazione di A ad un suo punto si estende ad una omotopia $h(x, t)$ della identità di X . Per costruzione $h(a, 1)$ è costante su A e quindi $h(a, 1)$ induce una applicazione $g : X/A \rightarrow X$ dobbiamo mostrare che g è inversa omotopica della proiezione $p : X \rightarrow X/A$. La composizione $g \circ p$ per costruzione è $h(x, 1)$ che è omotopa alla identità. Per l'altra composizione osserviamo che, dato che per ogni t la funzione $h(x, t)$ manda A in A la composizione $h : X \times I \rightarrow X \xrightarrow{p} X/A$ si fattorizza in una omotopia $h' : X/A \times I \rightarrow X/A$ fra l'identità e $p \circ g$. \square

OSSERVAZIONE È spesso utile passare al limite su successioni di spazi e considerare uno spazio $X := \cup_{i=1}^{\infty} X_i$ su sottospazi chiusi. Per esempio costruendo lo spazio proiettivo infinito o spazi simili. Attaccando infinite celle. In questi casi si assume che X ha la *topologia debole* ovvero la topologia più fina per cui le inclusioni di X_i in X siano omeomorfismi sulle immagini. In altre parole un insieme $A \subset X$ si dice aperto se e solo se $A \cap X_i$ è aperto in X_i per ogni i . Ovvero una funzione $f : X \rightarrow Y$ è continua se e solo se f ristretta ad X_i è continua per ogni i .

Esercizio Verificare che il complesso singolare di X è unione dei complessi singolari degli X_i .

Per ogni k si ha $H_k(X) = \lim_{i \rightarrow \infty} H_k(X_i)$.

Se gli X_i sono tutti CW complessi e X_i si ottiene da X_{i-1} attaccando celle la omologia di X si calcola con il complesso cellulare anche se contiene infinite celle.

12 Esempi di spazi cellulari

NOTA In questo paragrafo calcoliamo alcuni esempi di omologia di spazi cellulari.

ESEMPI Primo esempio, una superficie X orientabile di genere g . Da quello che abbiamo visto una tale superficie si può presentare con:

Una cella P di dimensione 0. $2g$ celle x_i, y_i di dimensione 1. Una cella σ di dimensione 2.

Dalla geometria del poligono che descrive la superficie segue che il bordo di ciascuna di queste celle è 0 (anche se in omotopia il bordo di σ è un elemento non banale, ma prodotto di commutatori).

Ne segue che il complesso cellulare ha tutti i differenziali 0 e quindi i vari termini $C_k(X)$ coincidono con l'omologia che quindi è

$$H_i(X) := \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, i = 2 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & i = 1 \end{cases}$$

in particolare il genere è un invariante topologico (questo in realtà già si poteva dedurre dal calcolo di $H_1(\Sigma)$ che è l'abelianizzato di π_1).

Passiamo ora agli spazi proiettivi.

Lo spazio proiettivo reale P^n si definisce come il quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ modulo la equivalenza $v \cong tv, \forall t \neq 0$. Lo spazio complesso si definisce analogamente sostituendo a \mathbb{R} il campo \mathbb{C} .

Per convenzione, per $k < n + 1$ si considera $\mathbb{R}^{k+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ come il sottospazio con le ultime $n - k$ coordinate nulle.

Cominciamo ad analizzare $X := P^n$. Ogni vettore non nullo di $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ è equivalente ad esattamente 2 vettori antipodali sulla sfera di raggio 1. Pertanto P^n si ottiene da S^n identificando i punti opposti.

Per ogni $k \leq n$ sia X_k il sottoinsieme di P^n immagine dei punti con le ultime $n - k$ coordinate nulle. X_k è lo spazio proiettivo P^k ed è immagine della sfera $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$.

Vogliamo vedere che X_{k+1} si ottiene da X_k attaccando una cella di dimensione $k + 1$. Infatti i punti di $X_{k+1} - X_k$ si ottengono come immagine dei punti $x \in S^{k+1} \subset \mathbb{R}^{k+2}$ in cui l'ultima coordinata è non nulla. A meno di equivalenza pertanto sono l'immagine dei punti di S^{k+1} in cui l'ultima coordinata x_{k+2} è positiva.

Sia

$$C_{k+1} := \{(x_0, \dots, x_{k+1}) \mid \sum_{i=0}^{k+1} x_i^2 = 1, x_{k+1} \geq 0\}$$

$$S_k := \{(x_0, \dots, x_{k+1}) \in C_{k+1} \mid x_{k+1} = 0\}.$$

Ponendo $x_{k+1} = \sqrt{1 - \sum_{i=0}^k x_i^2}$ si identifica C_{k+1} con l'insieme

$$D_{k+1} := \{(x_0, \dots, x_k) \mid \sum_{i=0}^k x_i^2 \leq 1\}.$$

D_{k+1} è una palla con bordo S^k che, nell'omeomorfismo dato si mappa su S_k .

L'analisi fatta mostra che la proiezione di C_{k+1} su X_{k+1} presenta X_{k+1} come ottenuto da X_k attaccando una cella di dimensione $k + 1$.

Il caso complesso è simile. In questo caso $P_{\mathbb{C}}^n$ è quoziente della sfera S^{2n+1} modulo l'azione di moltiplicazione del gruppo S^1 dei numeri complessi di modulo 1. A meno di tale azione un punto della sfera x_0, x_1, \dots, x_{k+1} è equivalente ad un punto in cui x_{k+1} è reale e non negativo. Un tale punto è parametrizzato dall'insieme

$$\{x_0, x_2, \dots, x_k\} \mid x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=0}^k |x_i|^2 \leq 1, x_{k+1} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^k |x_i|^2}$$

una cella di dimensione $2(k + 1)$. Si deduce

12.1 TEOREMA. P^n è un CW complesso di dimensione n ottenuto attaccando una cella di dimensione i per ogni $i \leq n$.

$P_{\mathbb{C}}^n$ è un CW complesso di dimensione $2n$ ottenuto attaccando una cella di dimensione $2i$ per ogni $i \leq n$.

COROLLARIO. $H_i(P_{\mathbb{C}}^n) = 0$ se i è dispari o $i > 2n$, $H_{2i}(P_{\mathbb{C}}^n) = \mathbb{Z}$ se $i \leq n$.

Per lo spazio reale non basta la conoscenza delle celle ma va anche calcolata la mappa di attaccamento di $S^k \rightarrow P^k$ che fornisce il valore del differenziale ∂_{k+1} .

Per costruzione questa mappa identifica i punti opposti della sfera. La dobbiamo comparare con la mappa che collassa P^{k-1} ad un punto ottenendo uno spazio Z_k omeomorfo ad una sfera ed una proiezione $p_k : S^k \rightarrow Z_k = S^k$ di cui dobbiamo calcolare il grado. Questa proiezione si può anche interpretare come segue. Si collassa ad un punto la sfera S^{k-1} equatoriale ottenendo un bouquet di due sfere S^k . La mappa antipodale scambia queste due sfere, ciascuna di esse è omeomorfa per proiezione a Z_k .

Prendiamo un punto in Z_k non corrispondente all'equatore collassato, ad esempio l'immagine dei due punti $\pm(0, 0, \dots, 0, 1)$.

Poiché la mappa antipodale $\tau : x \rightarrow -x$ rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{\tau} & S^k \\ \downarrow p_k & & \downarrow p_k \\ Z_k & \xrightarrow[1]{=} & Z_k \end{array}$$

segue che il grado d^+ di p_k in $(0, 0, \dots, 0, 1)$ è uguale a ϵd^- , dove d^- è il grado di p_k in $-(0, 0, \dots, 0, 1)$ e ϵ è il grado della applicazione antipodale. L'applicazione antipodale è data dalla matrice -1_{k+1} ed ha determinante $(-1)^{k+1}$ pertanto dal §10 segue che $\epsilon = (-1)^{k+1}$. Infine se orientiamo coerentemente le due sfere possiamo supporre che $d^+ = 1$ poichè in $(0, 0, \dots, 0, 1)$ la mappa p_k è un diffeomorfismo locale.

Ne segue che il grado di p_k è 2 se k è dispari, 0 se k è pari.

Il complesso cellulare di P^k risulta dunque

$$(12.2) \quad \dots \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

da cui

$$(12.3) \quad H_i(P^k) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \text{ è pari } 0 < i \leq n, \ i > n \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \text{ è pari } 0 < i \leq n, \ i = n \text{ è dispari} \\ \mathbb{Z}/(2) & \text{se } i \text{ è dispari } 0 < i < n \end{cases}$$

Se calcoliamo modulo 2, tutti i differenziali si annullano ed il risultato appare molto simile al caso complesso

$$H_i(P^n; \mathbb{Z}/(2)) = \mathbb{Z}/(2), \ i = 0, \dots, n.$$

L'applicazione antipodale è definita dalla formula $x \mapsto -x$ e quindi ha Jacobiano $(-1)^n$ nella origine di \mathbb{R}^n induce quindi in omologia della coppia D^n, S^{n-1} tale numero. Pertanto preserva l'orientazione della sfera m dimensionale solo quando m è dispari. Si ha che $P_{\mathbb{R}}^n$ è orientabile per n dispari e non orientabile per n pari. Questo fenomeno si riflette nella diversa natura di $H_n(P^k)$ nei due casi.

LA VARIETÀ GRASSMANNIANA. Si tratta nel caso reale o complesso di una varietà i cui punti parametrizzano i sottospazi di data dimensione di uno spazio vettoriale dato.

Generalizza lo spazio proiettivo che parametrizza le rette per l'origine dello spazio.

Denotiamo con $G_{n,m}(\mathbb{R}), G_{n,m}(\mathbb{C})$ l'insieme dei sottospazi di dimensione n dello spazio $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$. Trattiamo per semplicità prima il caso complesso, denotiamo con (v, w) l'usuale prodotto hermitiano in \mathbb{C}^m .

Vogliamo descrivere un sottospazio W di dimensione n di \mathbb{C}^m tramite una base, ossia una sequenza di n vettori linearmente indipendenti. Mettiamo questi vettori come righe di una matrice X e scriviamo $W := W(X)$. Notiamo che due basi danno lo stesso sottospazio se e solo se le matrici X, X' differiscono per $X' = AX$ con A una matrice invertibile. Le matrici che otteniamo hanno le righe indipendenti ed hanno quindi rango n .

Indicheremo con $S_{n,m}$ l'insieme di queste matrici che è un aperto dell'insieme delle matrici $n \times m$ caratterizzato dalla proprietà che almeno uno dei determinanti dei minori $n \times n$ è non nullo.

Dati n numeri i_1, i_2, \dots, i_n fra $1, m$ denotiamo con $[i_1, i_2, \dots, i_n](X)$ Il determinante del minore (di ordine massimo n) formato dalle n colonne i_1, i_2, \dots, i_n di X nell'ordine dato. I determinanti non nulli così ottenuti sono a meno del segno quelli per cui $i_1 < i_2 < \dots < i_n$. Si noti che $[i_1, i_2, \dots, i_n](AX) = \det(A)[i_1, i_2, \dots, i_n](X)$.

I numeri $[i_1, i_2, \dots, i_n](X)$ non sono tutti nulli su $S_{n,m}$ si possono dunque pensare come coordinate proiettive, dette *coordinate Plückeriane* e definiscono una applicazione di $G_{n,m}$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^{\binom{m}{n}-1}$ di dimensione $\binom{m}{n} - 1$.

Per capire la natura di queste coordinate consideriamo uno degli aperti in cui un particolare determinante è non nullo. Per semplicità supponiamo che sia quello formato con le prime n colonne. Pensando ai determinanti come a coordinate proiettive ci mettiamo nella parte affine dove questa coordinata vale 1 e le altre sono parametri liberi nello spazio ambiente.

Scriviamo le matrici in questo aperto nella forma a blocchi $X := \{A Y\}$ con A una matrice invertibile $n \times n$ ed Y una matrice $n \times m - n$.

Si ha evidentemente $X = A\{1_n A^{-1}Y\}$ da cui abbiamo immediatamente

12.4 LEMMA. *L'applicazione $A, Z \rightarrow A\{1_n Z\}$ è un omeomorfismo fra il prodotto*

$GL(n, \mathbb{C}) \times M_{n,m}(\mathbb{C})$ e $S_{n,m}$.⁷

Come vedremo nel Cap. 6, questa descrizione esprime $S_{n,m}$ come spazio totale di una fibrazione principale con gruppo strutturale $GL(n, \mathbb{C})$ e base $G_{n,m}(\mathbb{C})$.

Ne segue che i sottospazi che sono rappresentabili da matrici in questo aperto sono univocamente rappresentabili da matrici del tipo $X = \{1_n Z\}$, $Z = (z_{i,j})$ (che sono rappresentanti canonici delle $G_{n,m}(\mathbb{C})$ orbite).

Per queste matrici calcoliamo alcune coordinate Plückeriane notando che, la colonna $n + k$ esima della matrice $\{1_n Z\}$ coincide con la colonna k -esima di Z :

$$[1 \dots i - 1 \quad n + k \quad i + 1 \dots n](X) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & z_{1 \ k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & z_{2 \ k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & z_{i-1 \ k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z_{i \ k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z_{i+1 \ k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z_{n \ k} & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Questo determinante è z_{ik} . Quindi $n \times (m - n)$ delle coordinate di Z sono, a meno del segno, le coordinate z_{ik} , le rimanenti sono polinomi in queste variabili. Deduciamo che l'insieme dei sottospazi X per cui la matrice X ha un minore fissato con determinante non nullo è parametrizzato da un chiuso, omeomorfo allo spazio $\mathbb{C}^{n(m-n)}$, nell'aperto affine di $\mathbb{P}^{\binom{m}{n}-1}$ dove la corrispondente coordinata proiettiva è 1.

In particolare $G_{n,m}$ si identifica ad una varietà proiettiva non singolare di dimensione complessa $n(m - n)$ ed è uno spazio compatto.

Consideriamo ora una matrice $X \in S_{n,m}$ come una successione (v_1, v_2, \dots, v_m) di vettori colonna. Operando con una trasformazione lineare A sui vettori la matrice si trasforma in $AX = (Av_1, Av_2, \dots, Av_m)$.

Siano $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ indici dati. La proprietà che le corrispondenti colonne in X siano linearmente indipendenti non dipende da A ma solo dallo spazio $W(X)$ generato dalle righe.

Data X consideriamo la sequenza $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ definita induttivamente:

v_{i_1} è la prima colonna non zero e $v_{i_{k+1}}$ è la prima colonna linearmente indipendente dalle colonne $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ già costruite.

Dato un sottospazio n -dimensionale W poniamo $s(W)$ la sequenza costruita da una matrice X per cui $W = W(X)$ e finalmente:

$$(12.5) \quad C_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \{W \in G_{n,m} \mid s(W) = i_1, i_2, \dots, i_n\}.$$

⁷Denotiamo con $GL(n, \mathbb{C})$ il gruppo formato dalle matrici quadrate di ordine n a coefficienti complessi ed invertibili e con $M_{nm}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale complesso (di dimensione nm formato dalle matrici $n \times m$).

C_{i_1, i_2, \dots, i_n} è contenuta nell'aperto U_{i_1, i_2, \dots, i_n} di $G_{n, m}$ dove la coordinata Plückeriana $[i_1, i_2, \dots, i_n](X)$ è non zero.

Abbiamo visto che questo aperto si parametrizza con le matrici $n \times m - n$, X per cui la sottomatrice estratta dalle colonne $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, è l'identità.

Rappresentiamo l'insieme C_{i_1, i_2, \dots, i_n} con matrici di questo tipo. i_1, i_2, \dots, i_n sono le colonne della matrice identità, le colonne di indice inferiore a i_1 sono 0, quelle fra i_k, i_{k+1} sono vettori combinazioni lineari dei vettori e_i , $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$.

Posto $v_j := \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}} c_{ji} e_i$ per $i_k < j < i_{k+1}$ i numeri c_{ji} sono parametri indipendenti per gli elementi rappresentanti canonici di C_{i_1, i_2, \dots, i_n} .

e.g. $n = 4, m = 11, i_1 = 2, i_2 = 6, i_3 = 9, i_4 = 11$:

$$(12.6) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & b_{11} & b_{12} & 0 & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{23} & b_{16} & 0 & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Quindi C_{i_1, i_2, \dots, i_n} è un sottospazio affine di U_{i_1, i_2, \dots, i_n} dato dall'annullarsi di alcune coordinate.

12.7 PROPOSIZIONE. C_{i_1, i_2, \dots, i_n} è un sottospazio chiuso nell'aperto U_{i_1, i_2, \dots, i_n} della Grassmanniana detto cella di Schubert. La sua dimensione complessa è:

$$(12.8) \quad \dim(C_{i_1, i_2, \dots, i_n}) = \sum_{k=1}^{n-1} k(i_{k+1} - i_k) + n(m - i_n) = nm - \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{j=1}^n i_j.$$

In altre parole, descriviamo i punti di C_{i_1, i_2, \dots, i_n} con le matrici X che hanno le seguenti restrizioni.

1) Le colonne i_1, i_2, \dots, i_n identiche a quelle della matrice identità. 2) Per ogni $k \leq n$ la riga k -esima di X è riempita di 0 nelle colonne di indici $< i_k$ ed ha 1 nella colonna i_k .

È utile individuare, fra tutti i punti della cella C_{i_1, i_2, \dots, i_n} quello in cui tutte le colonne diverse da i_1, i_2, \dots, i_n sono nulle, tale punto si dice *centro* della cella di Schubert ed è caratterizzato dalla proprietà di essere l'unico sottospazio di C_{i_1, i_2, \dots, i_n} generato da vettori della base canonica.

Esercizio Il centro della cella è l'unico sottospazio di C_{i_1, i_2, \dots, i_n} fissato da tutte le matrici diagonali.

Abbiamo decomposto la Grassmanniana nell'unione disgiunta di celle aperte di dimensione pari. Per trarne le conseguenze per l'omologia bisogna capire se queste celle si estendono ad una applicazione di una palla chiusa che le presenta come successivi incollamenti.

È conveniente visualizzare la combinatoria nel modo seguente. Si pensi alle m posizioni delle colonne come ad m -caselle vuote in una riga ed agli indici i_k semplicemente come un modo di mettere n -fiches nere dentro ad n di queste caselle: e.g.

$$(12.10) \quad \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \square & \clubsuit & \square & \square & \square & \clubsuit & \clubsuit & \square & \square & \square & \square & \clubsuit & \clubsuit & \clubsuit & \square & \square & \clubsuit & \square \end{array}$$

Abbiamo marcato sopra ogni posizione quante fiches si trovano da quel punto in poi.

Prima di tutto studiamo la chiusura di una cella di Schubert.

Sia F_i il sottospazio di \mathbb{C}^m generato dagli ultimi i vettori della base e_1, \dots, e_m . Quindi F_i è l'insieme di vettori con le prime $m - i$ coordinate uguali a 0.

Dato un sottospazio $W \in C_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ sia w_1, \dots, w_n la base corrispondente ad una matrice $n \times m$, X in forma canonica.

Una combinazione lineare $w := \sum_{k=1}^n c_k w_k$ ha c_k come coordinata i_k , $1 \leq k \leq n$, ovvero w ha coordinate c_k nelle posizioni occupate dalle fiches.

Questo ci dice subito quali sono i vettori di W in F_i .

Per ogni i vediamo che

$$(12.11) \quad W \cap F_i = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k v_k \mid c_k = 0, \text{ se } i_k < m - i \right\}$$

quindi:

$$\dim(F_i \cap W) = n - k, \text{ se e solo se } i_k < m - i \leq i_{k+1}.$$

In altre parole, $d_i := \dim(F_i \cap W)$ è proprio il numero di fiches nere che cadono sopra le ultime i -caselle.

Evidentemente questa successione di numeri è completamente determinata e determina i numeri $\underline{i} := i_1 < i_2 < \dots < i_n$. Inoltre $d_{i+1} = d_i$ se la casella $n - (i + 1)$ è vuota, altrimenti $d_{i+1} = d_i + 1$.

Viceversa una successione d_i di m -numeri con la proprietà:

$$d_m = n, d_1 \leq 1, d_i \leq d_{i+1} \leq d_i + 1.$$

individua le n - caselle $m - i_k + 1$ in cui la successione salta di 1.

E.g. per 12.6 abbiamo la successione:

$$1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4$$

mentre quella di 12.10 è scritta nella formula stessa.

Se vogliamo mettere in evidenza che questa successione è generata da $\underline{i} := i_1 < i_2 < \dots < i_n$ la denoteremo con $d[\underline{i}]$. Finalmente

$$(12.12) \quad C_{i_1, i_2, \dots, i_n} := \{W \in G_{n, m} \mid \dim(F_i \cap W) = d_i\}.$$

Questa caratterizzazione ha una conseguenza molto importante. Sia B^- il sottogruppo del gruppo $GL(m, \mathbb{C})$ formato da quelle matrici invertibili che fissano la bandiera F_i ovvero

$$B^- := \{A \in GL(m, \mathbb{C}) \mid AF_i = F_i, \forall i\}.$$

Si vede immediatamente che:

- 1) B^- coincide con il gruppo delle matrici triangolari inferiori ($a_{i,j} = 0, \forall i < j$).
- 2) Se $W \in C_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ ed $A \in B^-$ allora $AW \in C_{i_1, i_2, \dots, i_n}$.

Esercizio Provare che C_{i_1, i_2, \dots, i_n} è una unica orbita rispetto al gruppo B^- .

SUGG. Per induzione su m si osservi che B^- induce, su ogni sottospazio F_i il sottogruppo di tutte le trasformazioni lineari di F_i che fissano la corrispondente bandiera $F_j, j \leq i$ per cui per induzione, dati $W_1, W_2 \in C_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ esiste $A \in B^-$ per cui $AW_1 \cap F_{m-1} = W_2 \cap F_{m-1}$ etc.. □

Ordinamo le successioni \underline{i} nel modo seguente:

Date due successioni

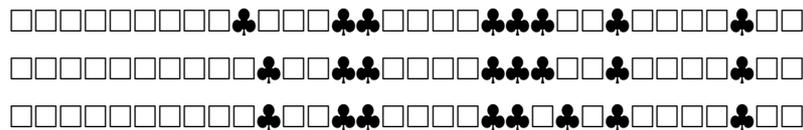
$$\underline{i} := i_1 < i_2 < \dots < i_n, \quad \underline{j} := j_1 < j_2 < \dots < j_n$$

poniamo:

$$\underline{i} \leq \underline{j}, \text{ se e solo se } i_1 \leq j_1, i_2 \leq j_2, \dots, i_n \leq j_n.$$

Nello stesso modo possiamo ordinare le dimensioni $d_i \leq d'_i, \forall i$.

Data una posizione di fiches \underline{i} a meno che queste non si trovino tutte a destra, cioè sulle ultime n -caselle vi è una fiche che ha a destra una casella vuota e possiamo considerare la *mossa elementare* di spostarla su questa casella (e.g. due mosse elementari di seguito):



Ci si convince in modo assai semplice, visualizzando come prima, che $\underline{i} \leq \underline{j}$ se e solo se la configurazione \underline{j} si ottiene da \underline{i} con una sequenza di mosse elementari (che spostano le caselle sulla destra) ed inoltre che

$$\underline{i} \leq \underline{j}, \text{ se e solo se } d[\underline{i}] \leq d[\underline{j}].$$

Esercizio Se \underline{j} si ottiene da \underline{i} con una mossa elementare la dimensione della corrispondente cella di Schubert diminuisce esattamente di 1. In particolare la dimensione della cella associata a \underline{i} coincide con il numero di mosse da fare sulle fiches per portarle tutte a destra (nel caso 12.10 sono necessarie per le varie fiches 2, 6, 8, 8, 8, 12, 12, 15 mosse per un totale di 71 uguale alla dimensione).

Poniamo ora:

12.13 DEFINIZIONE.

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} := \{W \mid \dim(F_i \cap W) \geq d_i\}.$$

Poiché $C_{i_1, i_2, \dots, i_n} := \{W \mid \dim(F_i \cap W) = d_i\}$ segue che $S_{\underline{i}} = \cup_{\underline{j} \geq \underline{i}} C_{\underline{j}}$.
Lasciamo per ora al lettore di provare che $S_{\underline{i}}$ è la chiusura di $C_{\underline{i}}$.

SUGG. Prima di tutto si osservi che se in un insieme $T \subset S_{n,m}$ di matrici si ha che una data coordinata Plückeriana $[i_1, i_2, \dots, i_n](X)$ svanisce, per continuità questo avviene anche sulla chiusura, pertanto ne segue che $S_{\underline{i}}$ è chiuso. Per vedere viceversa che $S_{\underline{i}}$ è proprio la chiusura di $C_{\underline{i}}$ basta, per induzione provare che $C_{\underline{j}}$ è nella chiusura di $C_{\underline{i}}$ quando \underline{j} si ottiene da \underline{i} tramite una mossa elementare. Ora si può sfruttare il fatto che le celle di Schubert sono orbite rispetto al gruppo B^- e l'osservazione evidente che la chiusura di un'orbita di un gruppo (che opera in modo continuo) è necessariamente una unione di orbite.

Pertanto basta mostrare che il centro $W_{\underline{j}}$ della cella $C_{\underline{j}}$ è nella chiusura di $C_{\underline{i}}$. Per questo sia k la posizione della casella in \underline{i} che viene spostata in $\underline{h}+1$. Sostituiamo ai vettori e_{i_j} che generano il centro di $C_{\underline{i}}$ il vettore e_h con $e_h + te_{h+1}$ ottenendo evidentemente una curva di sottospazi W_t in $C_{\underline{i}}$ passiamo al limite per $t \rightarrow \infty$ osservando che nella base data possiamo sostituire il vettore $e_h + te_{h+1}$ con $t^{-1}e_h + e_{h+1}$. Si ha⁸

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_t = W_{\underline{j}}.$$

□

Discutiamo ora l'attaccamento delle celle, ragioniamo per induzione sulla dimensione ed utilizzando un metodo che è legato ad una costruzione nota come risoluzione di Bott Samelson.

Riprendiamo la parametrizzazione di \mathbb{P}^1 data attaccando una 2 cella

$$(\alpha, \sqrt{1 - |\alpha|^2}), \quad |\alpha| \leq 1.$$

Costruiamo le matrici

$$A(\alpha) := \begin{vmatrix} \alpha & \sqrt{1 - |\alpha|^2} \\ \sqrt{1 - |\alpha|^2} & -\bar{\alpha} \end{vmatrix}, \quad \det(A(\alpha)) = -1, \quad (0, 1)A(\alpha)^t = (\alpha, \sqrt{1 - |\alpha|^2}).$$

Prendiamo una cella di Schubert C_{i_1, i_2, \dots, i_n} . Se tale cella non si riduce ad un punto, esiste un indice i_k tale che $i_k + 1 < i_{k+1}$ e possiamo considerare la cella $C_{\underline{j}}$ ottenuta con una mossa elementare, $\underline{j} = i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k + 1, i_n$. La sua dimensione complessa è $\dim C_{\underline{j}} = \dim C_{\underline{i}} - 1$.

⁸Si osservi che possiamo in questo modo definire una sottovarietà della Grassmaniana formata dagli spazi W_t , $t \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ che è isomorfa alla retta proiettiva \mathbb{P}^1 in cui il punto all'infinito è $W_{\underline{j}}$ mentre gli altri punti sono nella cella di Schubert $C_{\underline{i}}$.

Per induzione abbiamo dunque una funzione continua $\rho : D_1 \rightarrow G_{n,m}$ (una cella che attacca C_j) che manda una cella chiusa D_1 nella Grassmanniana ed è un omeomorfismo fra l'interno di tale cella e C_j .

Per semplicità di notazione poniamo $j := i_k$. Definiamo ora la matrice $m \times m$, $A_j(\alpha)$, che è l'identità sugli indici $\neq j, j+1$ e il blocco $A(\alpha)$ nelle posizioni $j, j+1$. Quando moltiplichiamo una matrice $n \times m$, X per $A_j(\alpha)$ le colonne v_i di indici $\neq j, j+1$ restano invariate mentre queste due colonne formano una matrice $n \times 2$ che viene moltiplicata a destra per $A(\alpha)$. Sia v_i è la i -esima colonna di una matrice X rappresentante canonicamente un punto di C_j scriviamo a blocchi le due colonne (a è un vettore colonna a $k-1$ componenti).

$$v_j v_{j+1} := \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

le colonne di $XA_j(\alpha)$ sono le v_i per $i \neq j, j+1$ mentre le colonne $j, j+1$ sono

$$(12.14) \quad v'_j v'_{j+1} := \begin{vmatrix} \alpha a & \sqrt{1-|\alpha|^2} a \\ \sqrt{1-|\alpha|^2} & -\bar{\alpha} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Posto $D := \{\alpha \mid |\alpha| \leq 1\}$, $\overset{\circ}{D} := \{\alpha \mid |\alpha| < 1\}$, $S^1 := \{\alpha \mid |\alpha| = 1\}$, , e consideriamo la applicazione (continua):

$$\pi : D \times C_j \rightarrow G_{n,m}, (\alpha, W) \rightarrow A_j(\alpha)^t(W).$$

12.15 LEMMA. π ha come immagine $C_j \cup C_i$ con $\pi : \overset{\circ}{D} \times C_j \rightarrow C_i$ un omeomorfismo mentre $\pi : S^1 \times C_j \rightarrow C_j$.

DIM. Il Lemma si prova direttamente sulle matrici rappresentanti gli spazi di C_j, C_i , da cui gli enunciati seguono facilmente. Se X è una matrice che descrive lo spazio W si ha che $XA_j(\alpha)$ è una matrice che descrive $A_j(\alpha)^t(W)$. Tale matrice non è necessariamente canonica, ma se $|\alpha| \neq 1$ la formula 12.14 mostra che tale matrice rappresenta un punto di C_i , la sua matrice canonica ha nelle colonne $j, j+1$ i valori:

$$(12.16) \quad v''_j v''_{j+1} := \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{1-|\alpha|^2} a + \alpha \bar{\alpha} \sqrt{1-|\alpha|^2}^{-1} a \\ 1 & -\bar{\alpha} \sqrt{1-|\alpha|^2}^{-1} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1-|\alpha|^2}} a \\ 1 & -\bar{\alpha} \sqrt{1-|\alpha|^2}^{-1} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Posto $\beta := -\bar{\alpha} \sqrt{1-|\alpha|^2}^{-1}$, $b := \frac{1}{\sqrt{1-|\alpha|^2}} a$ vediamo che $-\bar{\alpha} = \frac{\beta}{\sqrt{1+|\beta|^2}}$, $a = \frac{1}{\sqrt{1+|\beta|^2}} b$. In

altre parole $\pi : \overset{\circ}{D} \times C_j \rightarrow C_i$ è un omeomorfismo. Chiaramente se $|\alpha| = 1$ si ha che $XA_j(\alpha)$ è una matrice che descrive un punto di C_j .

□

Una volta provato questo Lemma definiamo (usando l' induzione) $\psi : D \times D_1 \rightarrow G_{n,m}$, $\psi(\alpha, x) := A(\alpha)\rho(x)$. Questa mappa definisce l'attaccamento di $C_{\underline{i}}$.

Si noti che, geometricamente la trasformazione $W \rightarrow A_j(\alpha)W$ non cambia le intersezioni di W con gli spazi della bandiera F_i tranne che per F_{m-j-1} .⁹

Osservazione Nella costruzione delle celle di Schubert avremmo potuto ugualmente procedere da destra verso sinistra ottenendo le orbite del gruppo B^+ delle matrici triangolari superiori.

Per distinguere i due casi possiamo indicare con $C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^-$, $S_{i_1, i_2, \dots, i_n}^-$ le celle e varietà di Schubert costruite che sono B^- orbite ed invece con $C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^+$, $S_{i_1, i_2, \dots, i_n}^+$ le corrispondenti B^+ orbite. Notiamo alcuni importanti fatti:

1) Dato un insieme di indici i_1, i_2, \dots, i_n i parametri che descrivono la cella $C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^+$ sono proprio nelle posizioni in cui abbiamo 0 per la cella $C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^-$ e viceversa, infatti in modo naturale si identifica l'aperto affine U_{i_1, i_2, \dots, i_n} con il prodotto $C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^- \times C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^+$.

2) Si vede facilmente dalle definizioni che $S_{i_1, i_2, \dots, i_n}^+$ ed $S_{i_1, i_2, \dots, i_n}^-$ hanno dimensioni complementari e si intersecano trasversalmente in un solo punto, il centro $W_{\underline{i}}$ delle due celle.

3) Finalmente si osservi (permutando gli elementi della base) che la classe di omologia data dalla cella $C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^-$ coincide con quella della cella $C_{m-i_1, m-i_2, \dots, m-i_n}^+$ ottenuta riflettendo le posizioni delle fiches rispetto al centro. Vedremo in seguito che questa è una forma precisa della dualità di Poincaré. $C_{i_1, i_2, \dots, i_n}^-$ e $C_{m-i_1, m-i_2, \dots, m-i_n}^+$ danno basi duali rispetto al prodotto di intersezione indotto dalla dualità.

13 Gli assiomi di Eilenberg Steenrod

NOTA Vogliamo ora definire astrattamente la nozione di *teoria omologica* e provare che le varie proprietà sviluppate per la omologia singolare, prese come assiomi la caratterizzano sulla classe dei CW-compleksi.

13.1 DEFINIZIONE. *Una teoria omologica secondo Eilenberg Steenrod consiste nel dare una successione di funtori $H_i(X, A)$ dalla categoria delle coppie di spazi topologici alla*

⁹La costruzione di Bott Samelson permette per induzione di costruire una risoluzione delle singolarità delle varietà di Schubert, il passo elementare consiste nel considerare il sottogruppo (parabolico) P delle matrici che stabilizzano la bandiera F_i per tutti gli $i \neq j+1$ ed osservare che $PS_{\underline{j}} = S_{i_1, i_2, \dots, i_n}$. Si ottiene una applicazione di $P \times_{B^-} S_{\underline{j}} \rightarrow S_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ con la proprietà che la proiezione $\bar{P} \times_{B^-} S_{\underline{j}} \rightarrow P/B^- = \mathbb{P}^1$ è un fibrato di fibre $S_{\underline{j}}$ che contiene come aperto la cella di Shubert S_{i_1, i_2, \dots, i_n} . Si ripete poi la costruzione su $S_{\underline{j}}$.

categoria dei gruppi abeliani (o più in generale ai moduli su un anello commutativo A), ponendo $H_i(X) := H_i(X, \emptyset)$ si suppone che tali funtori soddisfino i seguenti assiomi.

Assioma di dimensione Per $X = \{P\}$, lo spazio ridotto ad un punto, si ha $H_i(X) = 0$, $\forall i > 0$, $H_0(X) = \mathbb{Z}$ (o A nel caso più generale).

Assioma di omotopia Date due applicazioni omotope fra due coppie $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ esse inducono la stessa applicazione $f_i = g_i : H_i(X, A) \rightarrow H_i(Y, B)$ per ogni i , in omologia.

Successione esatta lunga Esiste un morfismo di connessione $\delta : H_i(X, A) \rightarrow H_{i-1}(A)$ che risulta functoriale rispetto a morfismi di coppie e tale che la successione lunga di morfismi

$$\rightarrow H_i(A) \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_i(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(A) \rightarrow H_{i-1}(X) \rightarrow H_{i-1}(X, A) \dots$$

risulta esatta.

Assioma di escissione Data una coppia X, A ed un sottoinsieme U chiuso contenuto nell'interno $\overset{\circ}{A}$ di A .

L'inclusione delle coppie

$$(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo in omologia.

Ci si può legittimamente porre il problema di indebolire o cambiare gli assiomi precedenti, in effetti esistono molte altre costruzioni topologiche che permettono di costruire teorie omologiche interessanti (K -teoria, bordismo etc.) che verificano tutti gli assiomi precedenti tranne quello della dimensione, tali teorie vengono dette teorie omologiche generalizzate.

Una trattazione simile si può fare per le teorie coomologiche.

A volte le proprietà di functorialità vengono espresse da 2 assiomi e la naturalità del morfismo di connessione come un assioma a parte in tal modo si hanno 7 assiomi invece dei 4 da noi enunciati.

È facile provare, e lo lasciamo per esercizio, che da tali assiomi segue la successione esatta di Mayer Vietoris e quella della tripla.

13.2 TEOREMA. Una teoria omologica soddisfacente gli assiomi precedenti è completamente determinata, come funtore, sulla categoria delle coppie cellulari e pertanto coincide con la omologia singolare.

DIM. Se analizziamo il calcolo della omologia tramite il complesso cellulare ci accorgiamo che per la validità di tale analisi bastano gli assiomi di Eilenberg Steenrod, purché da tali assiomi risulti:

1) La identificazione canonica $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

2) Si provi che una applicazione $f : S^n \rightarrow S^n$ di grado d induce la moltiplicazione per d su $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Per la prima parte, con le notazioni di 11.1, gli isomorfismi $H_n(S^n) = H_n(\dot{\Delta}_{n+1}) = H_n(\dot{\Delta}_{n+1}, C) = H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) = H_{n-1}(\dot{\Delta}_n) = H_{n-1}(S^{n-1})$, $\forall n \geq 2$ dipendono solo dagli assiomi. La sfera S^{n-1} si può pensare come *equatore* di S^n e l'isomorfismo $S : H_n(S^n) = H_{n-1}(S^{n-1})$ è l'isomorfismo di sospensione.

Per completare l'identificazione $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ bisogna fare l'analisi per $n = 1$, ancora vale un ragionamento di riduzione all'omologia di una coppia di punti tramite gli assiomi dati.

Per 2) serve conoscere il teorema di Hurewitz che proveremo nel Cap. 9, che ci assicura che due funzioni $f, g : S^n \rightarrow S^n$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado. Da questo risultato segue facilmente che, data una funzione $f : S^n \rightarrow S^n$ di grado d se $n > 1$ si può scegliere a meno di omotopia in modo tale che f preserva le due calotte e l'equatore di S^n e sull'equatore ha ancora grado d , se ne deduce un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{f_n} & H_n(S^n) \\ s \downarrow & & s \downarrow \\ H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{f_{n-1}} & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

da cui una riduzione ad $n = 1$. In questo caso si può assumere $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $f : z \rightarrow z^d$,

Si considera allora l'insieme $A := \{e^{\frac{2k\pi i}{d}}, d = 0, 1, \dots, d-1\}$ delle d radici dell'unità $A = f^{-1}(1)$ e il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(S^1) & \longrightarrow & H_1(S^1, A) & \longrightarrow & H_0(A) & \longrightarrow & H_0(S^1) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_1(S^1) & \longrightarrow & H_1(S^1, 1) & \longrightarrow & H_0(\{1\}) & \longrightarrow & H_0(S^1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

da cui è facile dedurre che $H_1(S^1, A) = \mathbb{Z}^d$, l'inclusione di $\mathbb{Z} = H_1(S^1)$ in $H_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}^d$ è la diagonale ed il morfismo $H_1(S^1, A) = \mathbb{Z}^d \xrightarrow{f} H_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ è la somma da cui segue 2).

A questo punto abbiamo provato che la Teoria si calcola tramite il complesso cellulare, ma manca ancora di provare che la Teoria è univocamente definita anche come funtore. Per questo è necessaria una analisi in omotopia che per ora non possiamo fare.

Infatti dovremo mostrare che una mappa $f : X \rightarrow Y$ fra due CW complessi è omotopa ad una mappa che preserva gli scheletri. Fatto questo si proverà che una tale mappa induce un morfismo fra i due complessi cellulari che si calcola geometricamente a partire dalla teoria del grado e quindi induce il morfismo in omologia richiesto.