Geometria Numerativa dai primordi alle Stringhe

C. Procesi Roma, Febbraio 1999

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

1. I primordi

Le circonferenze di

APOLLONIO

è un grazioso esempio di **geometria sintetica**

si prendano tre circonferenze disgiunte

vi sono esattamente 8 circonferenze tangenti a tutte e 3 le circonferenze date.

un semplice esempio del tema della

GEOMETRIA NUMERATIVA

CONTARE QUANTE SOLUZIONI HA UN PROBLEMA GEOMETRICO.

2. Geometria analitica e Algebra

Per capirne il significato è necessario fare un po di storia.

Il passaggio essenziale è quello dalla geometria sintetica a quella analitica

(il piano Cartesiano),

la prima scoperta è quella delle

equazioni,

dei luoghi geometrici, ad esempio

curve superfici.

Per semplictà parliamo di curve piane date da una equazione in due variabili

$$f(x, y) = 0.$$

Fra queste si distinguono le

curve algebriche

in cui $f(x, y)$ è un polinomio, e.g. le

coniche, $f(x, y)$ **è di secondo grado**

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Il **grado** della equazione di una curva è un primo invariante di tipo enumerativo, conta il numero di intersezioni di tale curva con una retta qualsiasi (con molte spiegazioni da fare).

Reinterpretiamo in modo analitico il Teorema di Apollonio, prendiamo 3 cerchi ad esempio di equazioni

$$x^2 + y^2 = 1, \ (x+3)^2 + y^2 = 1/4,$$
$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 3$$

se un cerchio arbitrario di equazioni $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ è tangente risolvendo si deve avere ad esempio che il sistema

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$1 + ax + by + c = 0$$

ha due radici coincidenti ovvero che *la retta* $1+ax+by+c=0=0$ *è tangente al cerchio* $x^2+y^2=1$.

In generale studiamo la condizione di tangenza di una retta ad una curva.

Una idea della geometria proiettiva dell'800 è la *dualità*:

Le rette del piano dipendono da 2 parametri e quindi le pensiamo esse stesse come punti di un nuovo piano *il piano duale.*

Le tangenti ad una curva $\mathcal{C}$ descritta da una equazione di secondo grado, ossia una *conica* sono esse stesse i punti di una conica nel piano duale (per chi conosce il linguaggio una conica è descritta da una matrice simmetrica di ordine 3 e la sua duale dalla matrice dei cofattori).

Pertanto il Teorema di Apollonio nella

sua forma analitica è dato dal fatto che:

L'insieme dei cerchi tangenti a 3 cerchi dati si ottiene analiticamente risolvendo 3 equazioni di grado 2 in 3 incognite.

Il numero 8 è il prodotto dei tre gradi

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

il principio quindi che applichiamo è quello del:

Teorema di Bezout

Due curve algebriche piane di gradi m, n si intersecano in esattamente mn punti.

Similmente 3 superfici algebriche dello spazio di gradi m, n, p si intersecano in esattamente mnp punti.

In realtà anche per dare un senso preciso a questo semplice Teorema è necessario un lungo lavoro che è stato parte dello sviluppo della Geometria dell'800.

La base è il

Teorema fondamentale dell'Algebra

Un polinomio

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

di grado n ha esttamente n radici (contate con la opportuna molteplicità).

Naturalmente per la validità di questo Teorema i numeri devono essere

complessi

L'idea del Teorema di Bezout:

Le due curve hanno equazioni

$$f(x, y) = 0,$$
$$g(x, y) = 0.$$

di gradi m, n.

I punti in comune sono le soluzioni del sistema.

eliminando una variabile si ha una equazione in una sola variabile di grado mn si applica il Teorema fondamentale dell'Algebra.

Varie difficoltà

Possono sparire soluzioni all'infinito.

Bisogna interpretare le molteplicità.

La soluzione al primo problema è nella costruzione del Piano Proiettivo

Questa costruzione è anche parte della analisi fatta nell'800 sui concetti di spazio e di geometria (le geometrie non Euclidee).

La seconda porta ad un bivio

1^o Metodo dell'

Algebra commutativa, Geometria Algebrica.

2^o Metodo

Topologia Algebrica.

Il secondo metodo è basato sulla idea che

variando con continuità le curve

il numero di intersezioni non varia.

e quindi ci si riduce a

casi speciali degeneri

e.g. intersezione di rette.

È importante osservare che il Teorema di Bezout si può formulare e provare anche a più dimensioni.

Un punto fondamentale della teoria è che le curve si possono pensare esse stesse come punti di uno spazio!!

Per esempio le coniche dipendono da 6 parametri a meno si scala

Formano quindi

Uno spazio proiettivo a 5 dimensioni.

Esempio di questa idea

Per 5 punti passa una ed una sola conica

A 5 rette è tangente una ed una sola conica

Dimostrazione la condizione di passare per un punto è di primo grado, 5 condizioni indipendenti di primo grado in uno spazio a 5 dimensioni forniscono una unica soluzione.

Per passare alle tangenti c'è un

Principio di dualità

4. Sviluppi dell 800.

Teorema più complicato Chasles

Vi sono esattamente 3264 coniche tangenti a 5 coniche date.

Questo è uno dei

passaggi difficili

chiariti solo in questo secolo.

Un aspetto importante di queste idee sta nel fatto che questi numeri (come altri simili) si ottengono da un

Calcolo algebrico

Siano μ, ν le condizioni per una conica di passare per un punto o essere tangente ad una retta, allora la condizione di essere tangenti ad una conica è

$2\mu + 2\nu$

quella di essere tangenti a 5 coniche è:

$$(2\mu + 2\nu)^5 =$$

$$32(\mu^5+5\mu^4\nu+10\mu^3\nu^2+10\nu^3\mu^2+5\nu^4\mu+\nu^5)$$

$$\mu^5 = \nu^5 = 1,\ \mu^4\nu = \nu^4\mu = 2,\ \mu^3\nu^2 = \nu^3\mu^2 = 4,$$

$$(2\mu+2\nu)^5 = 64(1+5\times2+10\times4) = 3264$$

Nella seconda metà dell'800 vari risultati di questo tipo ad opera di:

Chasles, Schubert, Zeuthen, Halphen etc. siamo ai primi sviluppi della

Geometria Algebrica

con problemi di Fondamenti,

riassunti nel

15^{mo} Problema di Hilbert.

Nel congresso internazionale di Berlino del 1900 Hilbert formulò 23 problemi che riteneva una possibile guida per questo secolo!

Le teorie riconducibili a questa problematica vanno sotto il nome di

Teoria della Intersezione

Il 15^{mo} Problema di Hilbert chiede di stabilire i fondamenti del calcolo algebrico dell'800 che porta ai risultati enumerativi predetti.

Una delle grandi idee geometriche è nella utilizzazione delle coordinate complesse, da questo punto di vista le soluzioni di una equazione $f(x,y) = 0$ sono in modo naturale i punti di una

superficie di Riemann

questo oggetto matematico e geometrico si deve visualizzare come segue:

Una ciambella con g buchi!!

ovvero una sfera con g manici.

Il numero g detto *genere* è legato al grado d della equazione (e anche ad altri aspetti della equazione stessa, le singolarità) tramite la formula di Plücker:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta - \kappa$$

L'aspetto notevole di questa discussione è che il genere in effetti è un invariante della forma topologica cioè non cambia se modifichiamo la superficie allungandola o stringendola in varie direzioni!!!

Un TEOREMA importante della

TOPOLOGIA è:

OGNI SUPERFICIE ORIENTABILE E CHIUSA È UNA SFERA A g MANICI PER UN BEN DETERMINATO INTERO g, IL GENERE DELLA SUPERFICIE.

La Teoria dell'intersezione su una superficie di genere g è molto semplice illustriamola per $g = 1$ *la ciambella o toro,*

$g = 3$: il *pretzel*

Possiamo tracciare due tipi di curve x, y sul toro, ogni curva è equivalente dal punto di vista del calcolo numerativo ad una del tipo $ax+by$ con a, b numeri interi l'intersezione fra due tali curve si calcola semplicemente:

$$xx = 0,\ \ yy = 0,\ \ xy = 1,\ \ yx = -1$$
$$(ax + by)(cx + dy) = ad - bc$$

sul pretzel ($g = 3$) abbiamo le tre curve arancioni x_1, x_2, x_3 e le tre curve blu y_1, y_2, y_3 con

$$x_i x_j = y_i y_j = 0,\ x_i y_j = 0,\ \text{se } i \neq j,\ x_i y_i = 1.$$

5. Teorie Geometriche:

Un vago anticipo alle stringhe:

Varie idee analitiche e geometriche si sviluppano in questo secolo, in parte riconducibili alla geometria numerativa.

Queste idee sono legate a quella di

VARIETÀ

cioè uno spazio che ha una

forma particolare,

e.g. una superficie compatta con g buchi

Ho mostrato le superfici solo perché è facile disegnarle o esibirle fisicamente dentro lo spazio a 3 dimensioni ma il punto essenziale è capire che, come ci sono tante superfici diverse per la forma topologica cosí ci sono tanti spazi di dimensioni 3,4, ecc. diversi ed anzi la complessità delle possibili forme cresce con la dimensione!!

Si possono visualizzare esempi solo in modo indiretto.

Altro esempio le rette dello spazio dipendono da 4 parametri, sono una varietà a 4 dimensioni.

Uno dei più difficili problemi non risolti della topologia è la

CONGETTURA DI POINCARÉ

LA SOLA VARIETÀ ORIENTABILE E CHIUSA SENZA MANICI A 3 DIMENSIONI È LA SFERA.

6. La Coomologia di De Rham

Insieme alla nozione di varietà c'è la idea di *campo*

come ad esempio un campo di forze (elettriche, gravitazionali, magnetiche)

qui l'idea fondamentale è che vi sono dei campi particolari detti

irrotazionali dai fisici e *forme chiuse* dai matematici

corrispondono fisicamente alla assenza di cariche generanti il campo.

Se una curva chiusa borda un pezzo di superficie la quantità di campo che fluisce attraverso tale curva è 0 ma se la curva si avvolge e non borda alcuna superficie la quantità di campo che fluisce attraverso tale curva può essere non 0.

Viceversa una curva $\mathcal{C}$ genera un campo irrotazionale il cui flusso attraverso una qualunque curva $\mathcal{D}$ è in numero di intersezione fra le due curve $\mathcal{C}.\mathcal{D}$.

Per spiegare i campi dal punto di vista dei Matematici è necessario complicare le cose perchè ci sono campi che fluiscono attraverso curve altri attraverso superfici e cosí per ogni dimensione, il calcolo relativo è il calcolo tensoriale in particolare il calcolo esterno sulle varietà
(vagamente un $k-$tensore antisimmetrico produce un elemento di volume a $k-$dimensioni in ogni punto).

Le condizioni di irrotazionalità in matematica si complementano con un'altra condizione di armonicità ed insieme queste condizioni hanno un significato geometrico mentre in fisica queste idee sono usualmente legate al principio di minima azione che è il principio base per la costruzione delle equazioni della fisica ed a principii di conservazione delle cariche.

Non è un caso ma è parte della teoria della relatività il fatto che le equazioni dell'elettromagnetismo sono equazioni di un 2−tensore nello spazio a 4 dimensioni.

Il prodotto finale (risolve in parte il 15^{mo} problema di Hilbert) è la costruzione di una specie di

sistema di numeri

tecnicamente *l'algebra di coomologia* associata ad una varietà che interpreta allo stesso tempo il calcolo sui campi e le leggi di intersezione delle curve, superfici etc..

8. La Teoria di Morse Un *campo scalare* ossia una funzione f su una varietà è come *l'altitudine* sulla terra.

Definisce picchi, valli, valichi ecc. passando da una superficie di livello ad un'altra si producono discontinuità attraverso i punti critici

qui appaiono nuovi cicli di integrazione!.

La dimensione dei cicli è legata alla segnatura della matrice Hessiana d'altra parte supponiamo di voler sviluppare un integrale di tipo oscillante

$$\int e^{\frac{-i\,f\,(x)}{h}}\,dx$$

si calcola per $h \cong 0$ con il metodo della fase stazionaria che concentra asintoticamente l'integrale sui punti critici.

9. Integrali funzionali e Stringhe

La teoria delle stringhe ha come oggetto lo sviluppo di un modello di teoria quantistica basato su una opportuna visione delle

particelle come corde vibranti

Secondo l'approccio di Feynmann alla quantizzazione si tratta di quantizzare un modello classico di corda vibrante nello spazio tramite un integrale funzionale.

Per ragioni di consistenza della teoria non si può partire da un modello a 4 dimensioni ma, nel caso bosonico a 26 e per la superstringa, a 10 dimensioni.

Il modello cinematico della corda è dato dall'idea che una corda in movimento spazza una superficie e quindi è descrivibile tramite una funzione

$$F : \Sigma \to \mathbb{R}^{10}$$

dove Σ è una superficie, il cosidetto *world sheet*.

Già a questo livello minimo interviene un primo elemento di geometria e cioè la forma topologica di Σ.

Qualunque sia l'integrale funzionale si dovrà esprimere come una *serie perturbativa* su tutte le forme topologiche.

il punto di partenza è la scelta di una opportuna azione S.

l'azione è un funzionale dipendente dalla funzione F e da una metrica interna $h_{\alpha,\beta}$ alla superficie Σ.

Una scelta possibile è una variante azione di Nambu In coordinate σ, τ su Σ

$$S := -\frac{T}{2}\int_{\Sigma} d^2\sigma\sqrt{h}h^{\alpha,\beta}\eta_{\mu,\nu}\partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X^\nu$$

Vi è un gruppo di simmetrie di dimensione infinita di questa azione, che quindi è un

gruppo di gauge

per la teoria.

Questo deve essere eliminato nell'integrale funzionale

$$\int e^{iS}\delta X\delta h$$

Questa simmetria fa apparire un elemento importante ovvero i

moduli delle superfici,

questi appaiono in questo modo:

Fissiamo una superficie (orientata) Σ come puro dato topologico (differenziale) sia $\mathcal{M}$ l'insieme di tutte le possibili metriche su Σ.

Su $\mathcal{M}$ facciamo operare due gruppi. Il gruppo dei *diffeomorfismi* (più o meno è come dire riparametrizzazioni) e il gruppo dei cambiamenti di scala e^f, $f : M \to \mathbb{R}$ quello che resta invariante è il modo di misurare gli angoli ossia il *modulo della struttura conforme*.

L'aspetto notevole di questa costruzione è che l'insieme dei moduli è una notevole varietà algebrica

$$\mathcal{M}_g$$

di dimensione $3g-3$ nel caso Σ compatta di genere $g > 1$.

Questi due gruppi insieme lasciano invariata la azione data.

10. Mirror symmetry

Abbiamo detto che la superstringa appare naturalmente in 10 dimensioni, una delle idee perseguite per darle senso a 4 dimensioni è che in effetti 6 delle dimensioni siano piccole dimensioni compattificate (Candelas)

Una serie di considerazioni teoriche portano a scegliere

i 6 parametri compattificati devono descrivere una opportuna varietà detta di Calabi Yau

(tecnicamente è una varietà Kähleriana con prima classe di Chern nulla, la congettura i Calabi provata da Yau afferma l'esistenza di una unica metrica con tensore di Ricci nullo)

Questo è un punto delicato legato al fatto che la teoria delle stringhe è un tentativo di costruire una teoria di gravità quantistica e la condizione di Calabi Yau è legata alle equazioni di Einstein della relatività generale.

pertanto l'integrale funzionale si separa in una parte integrata sulle 6 dimensioni compattificate

questa parte è responsabile per la

Mirror symmetry

Si tratta di uno strano fenomeno non bene compreso che ha una motivazione euristica nella teoria delle stringhe.

E' legata al cosidetto diamante di Hodge per le Calabi Yau

una simmetria fra moduli delle varietà e moduli delle metriche sulla varietà.

Uno dei punti consiste nella idea che l'integrale funzionale ha una approssimazione semiclassica che si ottiene sommando su tutte le soluzioni classiche delle stringhe.

Ne viene la necessità di calcolare dei numeri che sono proprio dei numeri di intersezione come nella Teoria da cui abbiamo iniziato.

Gli invarianti di Gromov-Witten, che contano quante superfici puntate incontrano delle varietà prescritte (che descrivono la coomologia).

Il calcolo di questi invarianti (che sono integrali su spazi di moduli), si organizza in una idea molto profonda che è quella di coomologia quantica e si collega tramite la congettura mirror ad altri fenomeni complessi (variazione della struttura di Hodge).