INVARIANTI DI NODI

PAOLO PAPI
CLAUDIO PROCESI
CON LA COLLABORAZIONE DI
PAOLA CELLINI

Prefazione 1

Parte I: Invarianti classici

§1 Definizioni basilari

§1.1 Nodi, links, isotopia 4
§1.2 Esempi. Simmetrie di un nodo 6
§1.3 Nodi tame e equivalenza combinatoria 8

§2 Diagrammi ed equivalenze

§2.1 Diagrammi e associati invarianti 12
§2.2 Il teorema di Reidemeister 14

§3 Il gruppo delle trecce

§3.1 Trecce e links 16
§3.2 Presentazione con generatori e relazioni di P_n e B_n (P. CELLINI) 19
§3.3 Gruppo delle trecce e automorfismi del gruppo libero 27

§4 Topologia del complementare di un nodo

§4.1 Il complementare di un nodo 31
§4.2 Il gruppo fondamentale del complementare di un nodo . . . 34

§5 Il polinomio di Alexander

§5.1 Superfici di Seifert e forme di intersezione 42
§5.2 Il rivestimento ciclico infinito 50
§5.3 Calcolo differenziale nei gruppi liberi 54
§5.4 Calcolo di Fox: un approccio geometrico 61
§5.5 Il polinomio di Alexander per i links 63
§5.6 Il polinomio di Conway 64

§6 Polinomi di Jones e HOMFLY

§6.1 Relazioni di skein e invariante universale 68
§6.2 Algebre di Hecke e polinomio HOMFLY 71
§6.3 Modelli di stato e polinomio di Jones 75

§6.4 Algebre di Hopf: definizioni ed esempi 81
§6.5 Algebre di Hopf quasitriangolari, Quantum Groups e polinomio di Jones 84

Parte II: Invarianti di Vassiliev

§7 Invarianti finiti

§7.1 Definizioni fondamentali 92
§7.2 Diagrammi di corde 95
§7.3 Relazioni tra invarianti finiti 98

§8 Costruzione analitica dell'integrale di Kontsevich

§8.1 L'invariante universale e la definizione di integrale di Kontsevich 102
§8.2 L'algebra di olonomia 106
§8.3 La connessione K-Z e l'integrale iterato di Chen 109
§8.4 Invarianza dell'integrale di Kontsevich 113

§9 Costruzione combinatoria dell'integrale di Kontsevich

§9.1 La serie di Drinfeld 118
§9.2 Esistenza di soluzioni speciali dell'equazione K-Z 121
§9.3 La rappresentazione di monodromia 129
§9.4 Calcolo della rappresentazione di monodromia 131
§9.5 L'invariante universale di Kontsevich: costruzione combinatoria 135

§10 Costruzione categoriale dell'integrale di Kontsevich

§10.1 Categorie, intrecciamenti, intrecciamenti infinitesimali . . . 140
§10.2 Quantizzazione di una categoria simmetrica con intrecciamento infinitesimale 148
§10.3 Costruzione di un invariante universale 153

§11 Razionalità degli associatori e dell'integrale di Kontsevich

§11.1 Quasi-Hopf algebre 159
§11.2 p-trecce, p-diagrammi di corde, associatori 164
§11.3 Esistenza e costruzione ricorsiva di un associatore razionale 173
§11.4 Associatori, invarianti di tangles e integrale di Kontsevich . 178

Appendice : Rappresentazioni notevoli del gruppo delle trecce 184

Note e commenti 188

Bibliografia 190

Indice analitico 193

PREFAZIONE

Queste note sono la rielaborazione degli argomenti trattati in un ciclo di seminari tenuti dagli autori nell'ambito dell'attività della Scuola di Dottorato di Ricerca in Matematica dell'Università di Roma "La Sapienza" nell'anno accademico '94/'95. La finalità principale del seminario era sostanzialmente quella di fornire un'introduzione alla teoria degli invarianti di tipo finito - o invarianti di Vassiliev -, un'area della ricerca nel settore che, pur essendo recente ed ancora in rapida evoluzione, ha già prodotto notevoli risultati ed ha aperto prospettive assai interessanti.

Non discuteremo l'approccio originario di Vassiliev, per cui si rimanda a [Vas] ma quello di Birman-Lin e principalmente Kontsevitch, come esposto da Bar-Natan.

A questo scopo si è parallelamente proceduto da una parte ad ampliare e chiarificare alcune parti di un importante lavoro sull'argomento ([BN]), dall'altra a presentare, in un contesto opportunamente semplificato, l'approccio combinatorio agli invarianti di tipo finito e la correlazione con l'equazione di Kniznik-Zamolodchikov sviluppati in [DP].

La parte riguardante gli invarianti di Vassiliev è preceduta da una selezione di risultati di teoria dei nodi classica e dall'esposizione dettagliata di alcuni teoremi di struttura sul gruppo delle trecce. Al riguardo l'idea iniziale del seminario - cui ci si è sostanzialmente attenuti anche nella redazione delle note - era quella di evidenziare, senza alcuna pretesa di organicità o completezza, gli approcci classici alla teoria degli invarianti dei nodi, assumendo come prerequisito soltanto conoscenze di base di topologia algebrica (il materiale coperto in [Ma] e [S] è più che sufficiente). Pertanto, in particolare, la trattazione non differisce nell'impostazione da quella dei numerosi e validi testi reperibili in letteratura - per una guida ragionata a questi testi e per le indicazioni bibliografiche si vedano i commenti finali -.

Descriviamo ora brevemente il contenuto dei singoli capitoli.

PARTE I

Dopo il necessario materiale preliminare (§1), si analizzano le varie nozioni di equivalenza sui nodi, evidenziando gli aspetti combinatori (mosse di Reidemeister, §2.2) e i legami con la teoria delle trecce (teorema di Markov-Birman, §3.1). La discussione di quest'ultimo risultato è seguita da un'analisi abbastanza approfondita della teoria di struttura del gruppo delle trecce B_n. In §3.2, proviamo i teoremi di Artin, che forniscono presentazioni per generatori e relazioni per B_n e per il gruppo delle trecce pure P_n, usando metodi di teoria dei gruppi combinatoria (la "riscrittura di Reidemeister"); nel paragrafo successivo analizziamo i legami tra B_n ed il gruppo degli automorfismi del gruppo libero.

In §4 si affronta il problema degli invarianti utilizzando i metodi classici della topologia algebrica. In particolare si discute il teorema di Wirtinger, che dà una presentazione per generatori e relazioni del gruppo fondamentale del complementare di un nodo.

Il paragrafo 5 è dedicato al più importante invariante polinomiale classico, il polinomio di Alexander; si discutono compattamente i diversi modi di introdurre tale invariante: tramite la forma di Seifert, mediante l'omologia del rivestimento

ciclico infinito del complementare del nodo e infine tramite il calcolo differenziale di Fox. Si prova poi la consistenza dei vari approcci.

Il materiale sviluppato nel paragrafo successivo può considerarsi come un ponte tra la teoria classica sviluppata e la teoria degli invarianti di Vassiliev. Si prova anzitutto che una riparametrizzazione del polinomio di Alexander, il polinomio di Conway, è di fatto caratterizzato da una relazione combinatoria che può leggersi "localmente" su un diagramma del nodo; una relazione dello stesso tipo caratterizza l'ormai famoso polinomio di Jones, la cui scoperta (1984) ha ravvivato notevolmente l'interesse per la ricerca nel settore. Dimostriamo poi l'esistenza del polinomio di Jones usando un approccio combinatorio dovuto a Kauffmann. Tale discussione è preceduta in §6.1 da un'analisi degli invarianti definiti da questo tipo di relazioni "diagrammatiche"; in particolare dimostriamo che tra essi il polinomio HOMFLY è universale e ne proviamo l'esistenza costruendo una traccia di Markov sull'algebra di Hecke (§6.2). Descriviamo anche, in §6.4-5, una costruzione del polinomio di Jones tramite la R-matrice dell'algebra di Hopf $\mathcal{U}_q sl(2)$, che è in un senso ben preciso "duale" della costruzione descritta in §6.2.

PARTE II

Introduciamo la nozione di invariante di tipo finito tramite la condizione di Birman-Lin (§7.1). Dopo aver descritto in dettaglio alcuni fondamentali strumenti combinatori (i diagrammi di corde, §7.2), discutiamo le relazioni tra gli invarianti finiti e riduciamo di fatto la descrizione dello spazio di tali invarianti alla dimostrazione dell'esistenza di un "invariante universale" secondo le idee di Kontsevitch.

Il voluto invariante universale è il cosiddetto integrale di Kontsevich $\tilde{Z}$: esso viene costruito in 8.1; successivamente (§8.3-4) si prova che $\tilde{Z}$ è effettivamente un invariante, fornendo al contempo ulteriori descrizioni combinatorie di oggetti usati nella costruzione (l'algebra di olonomia $\mathcal{P}$, §8.2).

Per quanto riguarda l'approccio combinatorio all'integrale di Kontsevich sviluppato in [DP], iniziamo studiando l'equazione K-Z; questa può riguardarsi come un'equazione di trasporto parallelo per una connessione piatta a valori in $\mathcal{P}$ definita nel complementare delle diagonali in $\mathbb{C}^n$, e proviamo l'esistenza di soluzioni speciali per tale equazione. Ciascuna di tali soluzioni induce una rappresentazione di monodromia del gruppo delle trecce in $\mathcal{P}^\times \rtimes S_n$, $\mathcal{P}^\times$ essendo il gruppo degli elementi invertibili di $\mathcal{P}$; in §9.3-4 descriviamo la costruzione di tale rappresentazione e la sua "effettiva" calcolabilità : nella descrizione gioca un ruolo fondamentale la cosidetta serie di Drinfeld, introdotta in 9.1. Scegliendo una particolare soluzione saremo infine in grado di descrivere (§9.5) l'integrale di Kontsevich mediante la rappresentazione di monodromia e una naturale "operazione di chiusura".

Nel capitolo successivo illustriamo alcuni notevoli risultati di P. Cartier che possono essere pensati, in un senso molto preciso, come un analogo della costruzione di Kontsevich in ambito "categoriale"; dopo aver richiamato alcune definizioni (§10.1), illustriamo la costruzione di Cartier (§10.2) ed infine deduciamo un invariante universale dei nodi (§10.3).

Nell'ultimo capitolo illustriamo un recentissimo lavoro di Bar-Natan, nel quale l'autore, utilizzando in un opportuno contesto tecniche e risultati dovuti a Drinfeld (gli associatori, le quasi-Hopf algebre), riesce a provare la "razionalità " dell'inte-

grale di Kontsevich di un nodo, ovvero che il valore di tale invariante è una serie formale di elementi dell'algebra di olonomia a coefficienti razionali.

Gli argomenti sopra elencati costituiscono il filo conduttore della trattazione; parallelamente abbiamo cercato di fornire spunti per ulteriori approfondimenti o almeno sufficienti indicazioni bibliografiche, in genere sotto la forma di osservazioni successive alla dimostrazione di un teorema "principale"; in particolare alcuni argomenti di fondamentale importanza sono stati del tutto trascurati oppure presi in considerazione solo marginalmente: tutti gli aspetti più specialistici della teoria dei nodi classica (studio di particolari classi di nodi, analisi della struttura del derivato del gruppo fondamentale di un nodo...), il collegamento con la teoria delle 3-varietà e con la geometria iperbolica, lo studio dei rivestimenti ramificati del complementare di un nodo, l'approccio alle congetture di Tait tramite il polinomio di Jones, la trattazione via teoria delle singolarità degli invarianti finiti, l'approccio all'invariante di Kontsevich tramite la teoria di Chern-Simon, le generalizzazioni degli invarianti finiti alle 3-varietà . La scelta del livello di dettaglio e, in particolare, delle dimostrazioni da includere, è stata ispirata al criterio di evitare approfondimenti troppo tecnici (specialmente nei non pochi casi in cui è presente un'ampia letteratura sull'argomento): non abbiamo però quasi mai rinunciato a fornire una concisa traccia delle idee e delle tecniche utilizzate.

Nell'appendice descriviamo la costruzione di alcune importanti rappresentazioni del gruppo delle trecce mediante il calcolo di Fox. La discussione in §5 di tali argomenti avrebbe interrotto la linea generale del testo; abbiamo comunque voluto includere tali argomenti perchè , a partire dagli strumenti tecnici precedentemente sviluppati, essi possono essere trattati in modo conciso ed esauriente.

Il paragrafo 3.2, relativo alla presentazione per generatori e relazioni del gruppo delle trecce, è stato redatto da Paola Cellini.

Vogliamo esprimere un cordiale ringraziamento a Maria Dedò , per la disponibilità dimostrata nel rivedere versioni preliminari di queste note, e a Corrado De Concini, per aver letto accuratamente la versione finale: le loro osservazioni hanno contribuito ad eliminare sviste ed imprecisioni nonchè a migliorare sensibilmente la chiarezza espositiva.

Parte I: Teoria dei nodi e invarianti classici

§1 Definizioni basilari

§1.1 Nodi, links, isotopia.

Matematicamente, un nodo è un'embedding di un cerchio nello spazio ambiente $\mathbb{R}^3$ o nella sfera $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$. La teoria dei nodi classica ha come obiettivo centrale la soluzione del seguente problema: dati due nodi X, Y in $\mathbb{R}^3$, determinare quando esiste un omeomorfismo φ di $\mathbb{R}^3$ in sè tale che $\varphi(X) = Y$. Risolvere questo problema significa, come vedremo, stabilire quando X possa deformarsi continuamente in Y tramite una deformazione dello spazio ambiente. Iniziamo formalizzando alcune definizioni e precisando la nozione di deformazione.

Siano X, Y spazi topologici di Hausdorff; un'applicazione continua $f : X \to Y$ si dice un embedding se $f : X \to f(X)$ è un omeomorfismo.

Definizione 1.1.1. *Un nodo in S^3 è un embedding $f : S^1 \longrightarrow S^3$. Un link è un'unione di nodi a due a due disgiunti. Infine un nastro in S^3 è un embedding $S^1 \times [0,1] \to S^3$, mentre un link di nastri è un'unione di nastri a due a due disgiunti.*

Definizione 1.1.2. *Un nodo si dice banale se borda un disco immerso; un link si dice banale se ciascun nodo componente è banale e i dischi di cui tali componenti sono bordo possono scegliersi a due a due disgiunti.*

Nella nostra trattazione ci occuperemo quasi esclusivamente di nodi; buona parte della teoria classica si estende senza difficoltà al caso dei links. Con lieve abuso di notazione, chiameremo nodo sia l'embedding f sia la sua immagine $f(S^1)$; in effetti l'indipendenza dall'embedding f, fissata $f(S^1)$, segue dall'equivalenza modulo la quale considereremo i nodi e che ora introduciamo.

Definizione 1.1.3. *Siano X, Y spazi topologici di Hausdorff e $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ due embeddings; f_0, f_1 si dicono:*

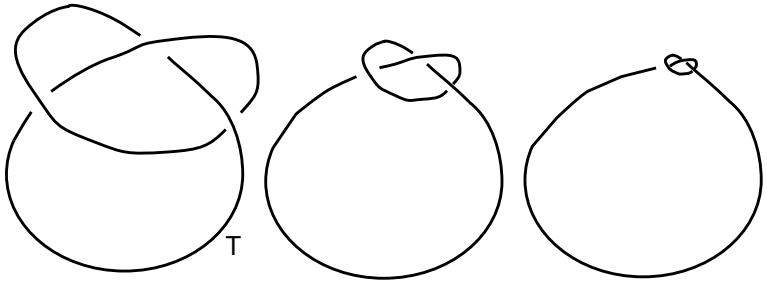
(1) *<u>isotopi</u> se f_0, f_1 fanno parte di una famiglia $f_t : X \longrightarrow Y$, $t \in I$ per cui la funzione $F : X \times I \longrightarrow Y \times I$ definita da $F(x,t) = (f_t(x), t)$ $\forall\, t \in I$ $\forall\, x \in X$ sia un embedding;*

(2) *<u>ambientalmente isotopi</u> se esiste un'isotopia $H : Y \times I \longrightarrow Y \times I$, $H(y,t) = (h_t(y), t)$ con $h_0 = id_Y$ e $f_1 = h_1 f_0$.*

Osservazioni.

(1) Un'isotopia ambientale H come sopra definisce un'isotopia F tra due embeddings f_0, f_1, tramite la relazione $F(x,t) = (h_t f_0(x), t)$.

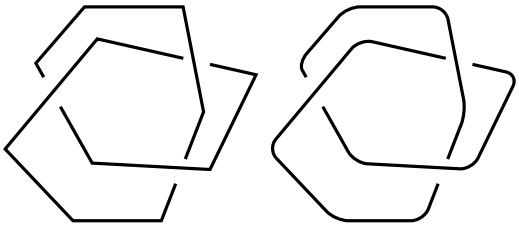
(2) Si può dimostrare che tutti gli embeddings $S^1 \hookrightarrow S^3$ sono isotopi: dato un nodo T come in figura, esiste sempre un'isotopia che "stringe" T a un cerchio:



Osserviamo che un tale argomento non sarebbe valido assumendo qualche ipotesi di regolarità per gli embeddings. Notiamo anche che un'isotopia muove continuamente $f_0(X)$ su $f_1(X)$ in Y, senza porre vincoli sul comportamento del complementare di $f_t(X)$ in Y; la definizione di isotopia ambientale richiede invece che anche $Y \setminus f_t(X)$ si muova con continuità seguendo il "movimento" di $f_0(X)$ su $f_1(X)$.
In altri termini $h_1|_{Y\setminus f_0(X)} : Y \setminus f_0(X) \longrightarrow Y \setminus f_1(X)$ è un omeomorfismo.

Parleremo di qui in avanti semplicemente di isotopia intendendo isotopia ambientale.

(3) La definizione di nodo può darsi nella categoria p.l.[1] e in quella differenziabile, richiedendo che f sia, rispettivamente, lineare a tratti o C^∞:



Nel caso differenziabile un nodo può definirsi anche come una sottovarietà connessa chiusa di S^3 di dimensione 1; l'equivalenza tra le due definizioni è giustificata dal fatto che *ogni 1-varietà compatta connessa senza bordo è diffeomorfa a* S^1 (cfr. [GP]).

Nelle categorie p.l. e differenziabile risulta corrispondentemente modificata la definizione di isotopia.

Si può dimostrare che per immersioni "non patologiche" (cfr. def. 1.3.1) in S^3 la teoria topologica coincide con quella p.l.

(4) Qualunque sia la categoria di riferimento, possiamo considerare un'orientazione su nodi e links; in tal caso è necessario richiedere che le isotopie in gioco preservino la assegnata orientazione sul nodo.

(5) Lo studio dei nodi in S^3 si colloca nel più generale contesto dello studio delle immersioni $S^p \hookrightarrow S^q$, $p < q$, che costituisce una importante area di ricerca. Limitandosi al caso p.l. (il caso C^∞ è ancora più complesso: cfr. [Hae]) è noto che i nodi sono banali in codimensione maggiore di due (i.e. $q - p \geq 3$) e in codimensione uno con l'eccezione del caso $q = 4$ in cui il risultato non è noto (per una discussione precisa si veda [RS]). Nel prossimo paragrafo proveremo elementarmente queste asserzioni nel caso $p = 1$.

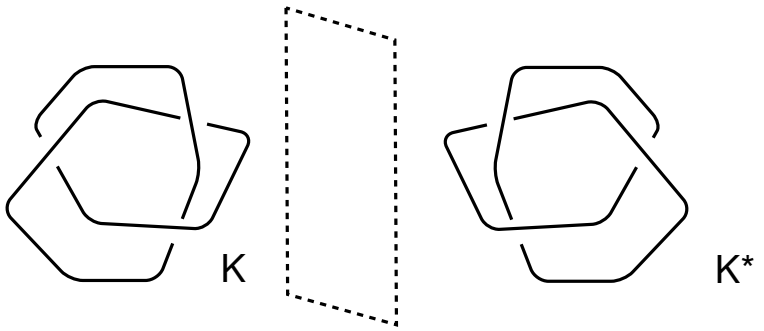
[1] Ricordiamo che nella categoria p.l. *(piecewise linear)* gli oggetti sono i poliedri e i morfismi sono le applicazioni tra poliedri il cui grafico è un poliedro: cfr. [RS].

§1.2 Esempi. Simmetrie di un nodo.

Fino ad ora non abbiamo dato alcun esempio di nodo non banale: per farlo (*dimostrando* che l'esempio fornito è quello di un nodo non banale) siamo costretti ad anticipare metodi che verranno sviluppati più ampiamente nel capitolo 4.
Vedremo infatti che il gruppo fondamentale del complementare $S^3 \setminus K$ di un nodo K è un notevole invariante isotopico; usando il teorema di Seifert-Van Kampen (4.2.1) non è difficile provare che, per il nodo K disegnato nella figura seguente, $\pi_1(S^3 \setminus K) \cong F(x,y)/N$ ove $F(x,y)$ è il gruppo libero nei generatori x, y e N è il minimo sottogruppo normale di $F(x,y)$ contenente x^2y^{-3}. Tale gruppo non è abeliano, perchè ha il gruppo simmetrico S_3 come immagine omomorfa: l'applicazione $F(x,y) \to S_3$ definita da $x \mapsto (12)$, $y \mapsto (123)$ induce un epimorfismo di gruppi $F/N \to S_3$; dunque, dato che $\pi_1(S^3 \setminus S) = \mathbb{Z}$ se S è il nodo banale, il nodo K, che si chiama *trifoglio*, non è banale.

Nella teoria dei nodi classica hanno particolare importanza i nodi costruti da un nodo dato tramite simmetrie elementari; un problema centrale, spesso sorprendentemente difficile, è quello di stabilire se il nodo costruito per simmetria è o meno equivalente a quello di partenza; descriviamo le costruzioni fondamentali.

Se K è un nodo, denotiamo con K^* l'immagine speculare di K, ottenuta riflettendo K rispetto a un piano come in figura.



Si noti che avremmo potuto porre, per definizione, $K^* = \rho(K)$, $\rho : S^3 \to S^3$ omeomorfismo che inverte l'orientazione; infatti, a meno di equivalenze di $\rho(K)$, la scelta di ρ è inessenziale.

Dato un nodo orientato K, il nodo ottenuto da K cambiando l'orientazione si dice nodo inverso e si denota con $-K$;

Definizione 1.2.1. *Un nodo si dice amphicheiral se K è isotopo a K^*. Un nodo orientato K si dice invertibile se K è isotopo a $-K$.*

Il trifoglio è invertibile ma non amphicheiral, il nodo otto (disegnato in 4.4) è invertibile e amphicheiral, il nodo 8_{17} (disegnato in 1.6) è amphicheiral ma non invertibile mentre il nodo 9_{32} (cfr.[BZ]: la notazione fa riferimento alle tavole dei diagrammi "minimali" - cfr. 2.1 - che classicamente venivano usate per "enumerare" i nodi: il diagramma di 9_{32} ha 9 incroci ed appare al trentaduesimo posto nell'ordinamento tradizionale di tale lista, stabilito da Tait e Little nel secolo scorso) non è ne' invertibile ne' amphicheiral. Dunque $9_{32}, -9_{32}, 9^*_{32}, -9^*_{32}$ sono nodi orientati inequivalenti.

Una classe di esempi elementari ma significativo da prendere in considerazione è quella dei *nodi torali*; dato che l'analisi di tali nodi può reperirsi in un notevole numero di referenze bibliografiche ([BZ], [R], [Mur1]) nonchè in alcuni testi di topologia algebrica ([Kos]), ci limitiamo ad alcuni brevi cenni. Il primo risultato basilare è la seguente

Proposizione 1.2.2. *Se T è un toro e se $[\mathfrak{l}]$, $[\mathfrak{m}]$ sono due generatori di $\pi_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, una classe di omotopia $p[\mathfrak{l}] + q[\mathfrak{m}]$ è rappresentabile da un embedding $f : S^1 \to T$ se e solo se $p = q = 0$ ovvero p e q sono interi coprimi.*

Riguardiamo S^1, S^3 come $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\}$; sia poi T il toro immerso in S^3 assegnato tramite l' embedding

$$j : S^1 \times S^1 \to S^3 \qquad j(x, y) = \left(x/\sqrt{2}, y/\sqrt{2}\right).$$

Dati allora p, q coprimi sia $f_{p,q}$ l'embedding

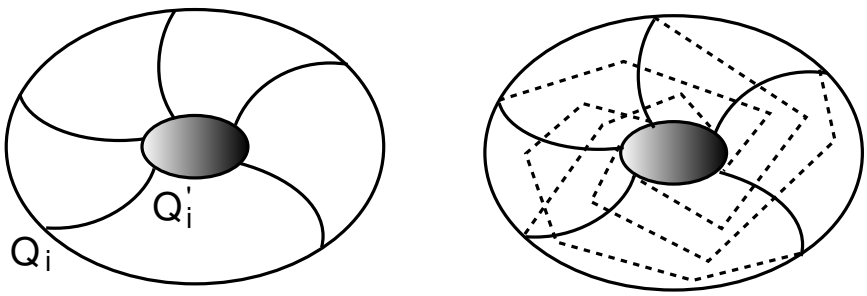
$$f_{p,q} : S^1 \to S^1 \times S^1, \qquad z \mapsto (z^p, z^q).$$

Possiamo definire il *nodo torale di tipo (p,q)*, $K_{p,q}$, come l'immagine di $j \circ f_{p,q}$. In generale, se p e q non sono primi tra loro, $K_{p,q}$ è un link con $M.C.D.(p, q)$ componenti.

Proposizione 1.2.3. *I nodi $K_{\pm 1,p}, K_{q,\pm 1}$ sono banali. Gli altri nodi torali sono non banali e $K_{p,q}$ è isotopo a $K_{p',q'}$ se e solo se $\{p, q\} = \pm\{p', q'\}$*[2].

Risulta inoltre $K^*_{p,q} = K_{p,-q}$, $-K_{p,q} = K_{-p,-q}$: pertanto i nodi torali sono invertibili ma non amphicheiral (se non banali); in particolare i nodi K, K^* della precedente figura sono inequivalenti (e si chiamano rispettivamente *trifoglio sinistro e trifoglio destro*).

Per disegnare il nodo $K_{p,q}$, si considerino come nella figura di sinistra p coppie di punti $Q_1, Q'_1, \ldots Q_p, Q'_p$ sui due equatori del toro standard (che immaginiamo sezionato simmetricamente dal piano della pagina): si uniscano i punti Q_i, che si trovano sull'equatore esterno, con i corrispondenti punti Q'_i tramite un arco nella parte superiore del toro. Si colleghi poi con un arco nella parte inferiore del toro ciascun punto Q_i al punto Q'_j che si trova q punti più avanti di Q'_i (dunque, modulo p, $j = i + q$).



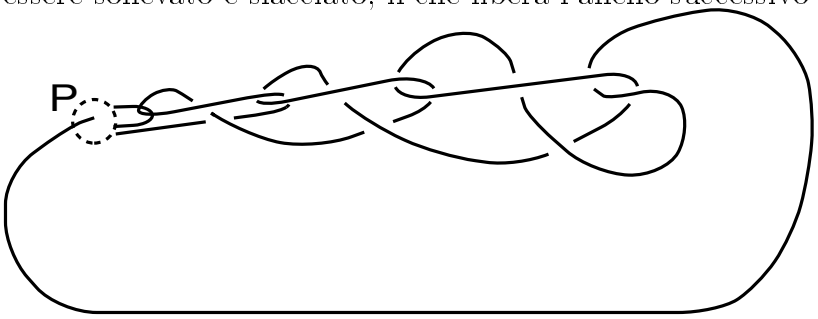
[2] i.e., $(p, q) = (p', q')$, $(p, q) = (q', p')$, $(p, q) = (-p', -q')$, $(p, q) = (-q', -p')$.

§1.3 Nodi tame e equivalenza combinatoria.

Nel seguito ci limiteremo a studiare una particolare classe di links, i cosiddetti links "tame" (letteralmente "domestico").

Definizione 1.3.1. *Un link si dice tame se è ambientalmente isotopo a un'unione disgiunta di poligoni chiusi semplici (cioè privi di autointersezioni) immersi in S^3. Altrimenti si dice wild ("selvaggio").*

Un nodo tame è un poliedro compatto,unione di un numero finito di segmenti; ogni sua parte connessa propria ξ è isotopa ad un segmento, perciò $S^3 \setminus \xi$ è semplicemente connessa. Ciò aiuta a capire quali "patologie" può presentare un nodo wild: nell'esempio seguente, tratto da [F2], ogni intorno del punto "di accumulazione" P ha complementare non semplicemente connesso (cfr. [AF]). Inoltre il complementare di tale curva in S^3 è diverso da quello del nodo banale; si noti d'altra parte che, fissato comunque un intorno di P, esiste un'isotopia ambientale che è l'identità in tale intorno e che "scioglie" la restante parte di nodo: il tratto discendente sulla destra può essere sollevato e slacciato, il che libera l'anello successivo e così via.



Un nodo wild è un'embedding con proprietà di regolarità assai deboli; vale difatti la seguente proposizione (cfr. [CF]).

Proposizione 1.3.2. *Se un nodo è di classe C^1, allora è tame.*

Ritorniamo a quanto accennato nella precedente osservazione (5); ricordiamo preliminarmente il *teorema di Schoenflies* ([R]).

Se $\mathcal{C}$ è una curva semplice chiusa in $\mathbb{R}^2$ (i.e. un'immagine omeomorfa di S^1 in $\mathbb{R}^2$), allora $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ ha due componenti e la chiusura di una delle due è omeomorfa al disco unitario D^2.

Il teorema di Schoenflies si puó raffinare al seguente enunciato (cfr.[R], cap. 2.A).

Esistono esattamente due classi di omeomorfismo di coppie $(\mathbb{R}^2, L)$, $L = S^1 \cup S^1$ essendo un link a due componenti in $\mathbb{R}^2$: quella in cui un S^1 giace nella componente limitata del complementare dell'altro S^1 e l'altra.

Proposizione 1.3.3.

(1) *Ogni embedding $S^1 \hookrightarrow S^2$ è banale.*
(2) *Ogni embedding p.l. $S^1 \hookrightarrow S^n, n > 3$ è banale.*

Dim. La prima parte è semplice conseguenza dell'enunciato precedente. Proviamo ora (2) assumendo che il nodo sia C^1: il caso p.l. è simile (si veda [RS]); possiamo limitarci a considerare embeddings in $\mathbb{R}^n$. Sia $K = f(S^1)$, $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$; si consideri l'applicazione $\varphi : ((K \times K) \setminus \Delta) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, ove $\Delta = \{(x, x) \mid x \in K\}$, definita

da $\varphi(p_1, p_2, t) = P$, P essendo il punto sulla retta per p_1, p_2 di coordinata t nel riferimento affine di origine p_1 e punto unità p_2. Tale applicazione è differenziabile e per il teorema di Sard non è suriettiva se $n > 3$. I punti non appartenenti all'immagine di φ non appartengono a nessuna retta che passi per due punti del nodo: un tale punto x è in "posizione generale" rispetto a K, dunque il cono $xK = \{\lambda x + \mu k \mid k \in K,\ \lambda + \mu = 1\}$ fornisce il cercato disco che borda K. □

Di qui in avanti lavoreremo nella categoria p.l. Dunque, a meno che non sia precisato esplicitamente il contrario, nodo significherà nodo tame e per isotopia intenderemo isotopia ambientale p.l. (Per comodità , continueremo a disegnare i nodi come immersioni non necessariamente lineari a tratti).

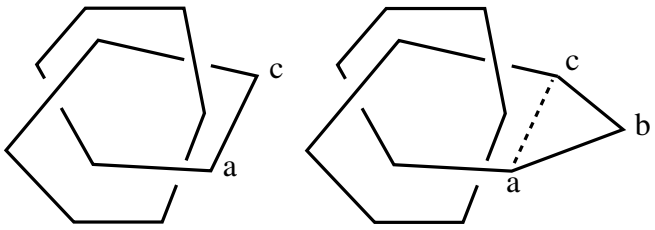
Per la classe dei nodi tame, l'equivalenza data dall'isotopia ambientale può caratterizzarsi in modo più semplice. Introduciamo alcune nozioni preliminari.

Se $a_0, \ldots, a_n$ sono punti di $\mathbb{R}^3$, denotiamo con $[a_0, \ldots, a_n]$ il loro inviluppo convesso. Sia L un link, ac un lato di L e $b \notin L$; se

$$[a] \cap [b, c] = [a, b] \cap [c] = \emptyset \qquad [a, b, c] \cap L = [a, c]$$

definiamo la mossa elementare (che chiameremo concisamente Δ-*mossa*):

$$\boxed{\Delta^b_{ac} L = L - ac + ab + bc}$$



Chiamiamo Δ^{-1} la mossa inversa.

Definizione 1.3.4. *Diciamo che due link sono combinatoriamente equivalenti se esiste una successione (finita) di $\Delta^{\pm 1}$-mosse che porta l'uno nell'altro.*

Teorema 1.3.5. *[BZ] Siano L_1, L_2 links tame; le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(1) *L_1, L_2 sono ambientalmente isotopi.*
(2) *L_1, L_2 sono combinatoriamente equivalenti.*
(3) *Esiste un omeomorfismo f di S^3 che preserva l'orientazione tale che $f(L_1) = L_2$.*

Traccia della Dim. (3) $\Rightarrow$ (1). L'idea è di usare il seguente *Lemma di Alexander*:

Ogni omeomorfismo p.l. g di una n-palla p.l. B che è l'identità sul bordo è isotopo all'identità tramite una isotopia ambientale che è l'identità sul bordo.

In effetti basta definire

$$F_{|_{\partial(B \times I)}} = \begin{cases} id & t = 0 \\ id & x \in \partial B \\ g \times 1 & t = 1 \end{cases}$$

ed estendere linearmente F a $B \times I$ usando il fatto che ogni punto (x,t) giace su un segmento congiungente un fissato punto interno $P \in B \times 0$ a un punto di $\partial(B \times I)$. Ritornando alla dimostrazione dell'implicazione, il punto cruciale (in cui si usa tra l'altro il fatto che f preserva l'orientazione) consiste nel provare l'esistenza di una isotopia ambientale $H(x,t) = (h_t(x),t)$ di S^3 tale che $h_1 f$ fissa un 3-simplesso Σ. A questo punto si usa il teorema di Schoenflies p.l.: se $i : S^2 \to S^3$ è un embedding p.l., allora $i(S^2)$ divide S^3 in due 3-palle p.l. B_1, B_2 di cui è il bordo comune:

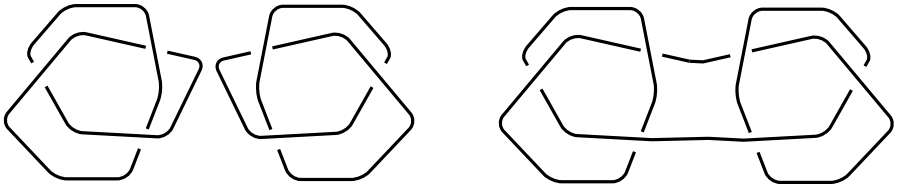
$$S^3 = B_1 \cup B_2, \qquad i(S^2) = B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$$

Dunque il complementare di Σ in S^3 è una 3-palla p.l. e $h_1 f$ induce un omeomorfismo di $S^3 \setminus \Sigma$ in sè che fissa il bordo; per il lemma di Alexander $h_1 f$ è isotopa all'identità di S^3. L'implicazione (1) $\Rightarrow$ (3) segue dalle definizioni.

(3) $\Rightarrow$ (2). Come in precedenza si prova che esiste un omeomorfismo h di S^3 che preserva l'orientazione tale che $h(L_1) = L_1$ e tale che fh fissa un 3-simplesso Σ disgiunto da fissati intorni tubolari[3] di L_1, L_2; scelto P nella parte interna di Σ, esiste una traslazione τ di $S^3 \setminus \{P\} \approx \mathbb{R}^3$ tale che $\tau(L_1) \subset \Sigma \setminus \{P\}$. Si vede facilmente che L_1e $\tau(L_1)$ sono combinatoriamente equivalenti, dunque, risultando $L_2 = fh(L_1)$, $fh\tau(L_1) = \tau(L_1)$, basta vedere che L_2 e $\tau(L_1)$ sono combinatoriamente equivalenti. A tale scopo scegliamo una suddivisione della triangolazione della sfera in modo tale che i triangoli coinvolti nell'equivalenza combinatoria $L_1 \to \tau(L_1)$ formino un sottocomplesso di S^3. Si può dimostrare che l'immagine tramite $fh : S^3 \to S^3$ di tale sottocomplesso è un sottocomplesso sul quale può effettuarsi la voluta equivalenza combinatoria.

(2) $\Rightarrow$ (3). È sufficiente provare l'asserto quando L_1, L_2 differiscono per una Δ-mossa. Sia U un intorno del triangolo che dà luogo alla Δ-mossa il cui bordo interseca L_1 in due punti. Non è difficile costruire un omeomorfismo della sfera che preserva l'orientazione e induce la Δ-mossa in U e l'identità fuori di U. □

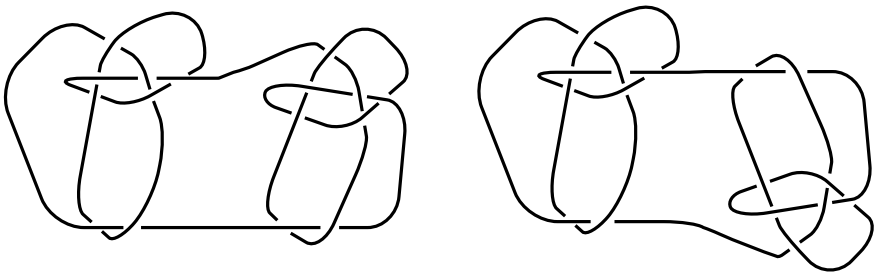
1.3.6. Descriviamo infine un'importante tecnica che permette di costruire un nuovo nodo a partire da due nodi dati: la *somma connessa* di due nodi: questa è un'operazione associativa e commutativa, rispetto alla quale il nodo banale è elemento neutro. La somma connessa può essere informalmente descritta tramite la figura seguente



In realtà tale definizione è ben posta solo nella classe dei nodi orientati. Denotiamo infatti con K_1, K_2, K_3 rispettivamente i nodi che appaiono da sinistra a

[3] Rcordiamo che se M è una sottovarietà di dimensione m di una n-varità N, il dato di un intorno U di M in N e di un fibrato $\pi : U \to M$ tale che la sezione nulla $M \to U$ è l'inclusione di M in U si dice *intorno tubolare* di M in N. Se M è compatta, allora ammette un intorno tubolare equivalente al fibrato normale di M in N. Nel caso dei nodi ($M = S^1 \hookrightarrow S^3 = N$) il fibrato normale è sempre banale, per cui assegnare un intorno tubolare significa semplicemente dare un embedding $\varphi : S^1 \times B^2 \to S^3$ tale che $\varphi(x,0) = x \ \forall x \in S^1$.

destra nella figura precedente; supponiamo K_1, K_2 orientati: allora se effettuiamo la somma connessa in modo tale che K_3 sia orientabile compatibilmente con le orientazioni di K_1, K_2 – il che è chiaramente sempre possibile –, l'operazione effettuata non dipende dai punti in cui sono stati tagliati i nodi componenti e dunque $K_1 \# K_2$ è ben definito. Se invece l'incollamento è effettuato con orientazioni non compatibili, il nodo ottenuto può non essere equivalente a $K_1 \# K_2$ (definito come sopra). Ad esempio, si può dimostrare che i nodi della figura seguente, costruiti a partire dal nodo *non invertibile* 8_{17} e da $(8_{17})^*$, sono inequivalenti. Per un'analisi più accurata di questo tipo di problemi tecnici si veda, ad esempio, [R], 2.G.



Una nozione collegata a quella di somma connessa è quella di nodo primo.

Definizione 1.3.7. *Un nodo K si dice primo se $K = K_1 \# K_2$ implica che K_1 o K_2 è banale.*

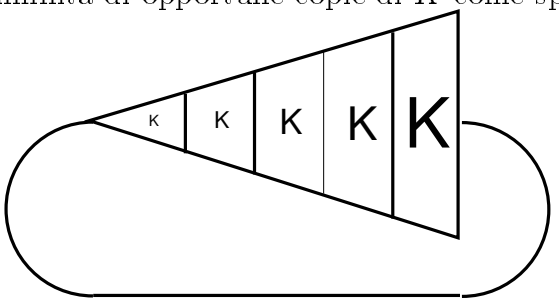
Vale il seguente teorema di "fattorizzazione unica".

Teorema 1.3.8. *Dato un nodo K, esistono nodi primi $K_1, \dots, K_t$ tali che $K = K_1 \# \dots \# K_t$; tale fattorizzazione è unica a meno dell'ordine.*

Una curiosa conseguenza del teorema di "equivalenza delle equivalenze" è il seguente risultato, del quale daremo più avanti un'altra dimostrazione.

Proposizione 1.3.9. *Se K, K' sono nodi tali che $K \# K'$ è banale allora K e K' sono banali.*

Dobbiamo per un attimo ritornare nel "mondo" dei nodi wild, esplicitando un modo di ottenere un nodo wild a partire da un nodo tame K: basta considerare una somma connessa infinita di opportune copie di K come spiegato in figura



Dim. Consideriamo $K \# K'$ e formiamo il nodo wild $(K \# K') \# (K \# K') \# \dots$. Denotiamo poi con $\sim$, $\approx$ rispettivamente le equivalenze definite nelle parti (2), (3) del teorema precedente (osserviamo che per un nodo wild ha senso solo $\approx$). Poichè $K \# K' \sim 0$, usando l'associatività e la commutatività della somma connessa deduciamo $0 \approx (K \# K') \# (K \# K') \# \dots \approx K \# (K' \# K) \# (K' \# K) \# \dots \approx K$.
Per il teorema, $K \approx 0$ implica $K \sim 0$, che è quanto si voleva. $\square$

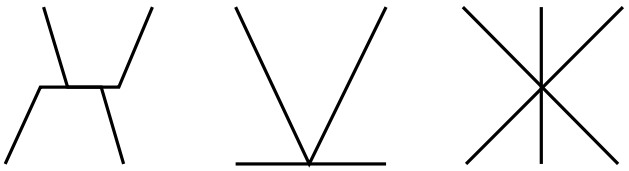
§2 Diagrammi ed equivalenza fra diagrammi

§2.1 Diagrammi e associati invarianti.

Dal momento che la descrizione geometrica di un nodo in $\mathbb{R}^3$ è assai complicata, è naturale pensare di considerare "proiezioni piane".

Definizione 2.1.1. *Se L è un link, un diagramma di L è il dato di una proiezione generica di L su un piano (tale cioè da ammettere come singolarità solo un numero finito di punti doppi) e di una specifica sopra-sotto (una normale orientata al piano di proiezione).*

Osservazione. Con un argomento standard di posizione generale si prova che un nodo ammette diagrammi (cfr. [BZ], [CF]). In effetti ogni proiezione su un piano π per l'origine è individuata dal versore normale $\mathbf{n}_\pi \in S^2$ e $\mathbf{n}_\pi = \mathbf{n}_{-\pi}$, per cui le proiezioni sono in corrisponenza biunivoca con i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = S^2/\rho$ (ρ è la relazione che identifica punti antipodali). Proviamo che l'insieme Σ delle proiezioni regolari è denso mostrando che il suo complementare ha dimensione uno in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Una proiezione non è regolare se e solo se contiene configurazioni del tipo



Riguardiamo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come l'insieme delle rette dello spazio passanti per l'origine. Definiamo

$$A := \{r \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid r \parallel \text{retta } vP, v \text{ vertice di } L,\ P \in L\}$$
$$B := \{r \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid Card(r \cap L) \geq 3\}.$$

Le singolarità dei primi due tipi corrispondono a proiezioni determinate da rette in A mentre quelle del terzo tipo sono determinate da rette in B. Si conclude osservando che $\Sigma^c = A \cup B$ e che quest'ultimo insieme è un'unione finita di curve.

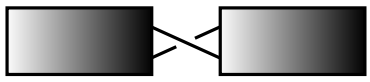
Diamo alcuni significativi esempi di invarianti che possono naturalmente associarsi alla combinatoria dei diagrammi. In genere essi sono molto difficili da calcolare, e si hanno risultati significativi solo per particolari classi di nodi, come quella dei nodi (link) *alterni* (quelli che ammettono un diagramma con la proprietà seguente: muovendosi su ciascuna componente del diagramma in un verso prefissato si passa alternativamente sopra e sotto agli incroci; tutti i nodi disegnati finora sono alterni: per esempi di nodi non alterni si veda 5.2.6 (3)).

Nel seguito D denota un diagramma di un nodo K; $\mathcal{D}_K$ sarà poi l'insieme dei diagrammi di K.

- *Il minimo numero di incroci $c(K)$.*

Sia $c(D)$ il numero di incroci del diagramma D. Tale quantità non è un invariante del nodo, ma tramite essa possiamo costruirne uno ponendo

$$c(K) = \min_{D \in \mathcal{D}_K} c(D).$$

A tutt'oggi è nota la lista completa dei nodi con $c(K) \leq 13$. Uno dei risultati più importanti derivati dalla teoria del polinomio di Jones (cap. 6) è la dimostrazione della seguente classica congettura di Tait; un diagramma si dice è ridotto se non è del tipo 

Teorema 2.1.2. *Se D è un diagramma connesso alterno ridotto con $c(D) = n$, allora $c(K) = n$.*

Anche per la classe dei nodi torali si ha un risultato completo ([Sc]):

$$c(K_{p,q}) = \min\{|p|, |q|\}.$$

Si congettura che $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$ (l'asserto è un facile esercizio se K_1, K_2 sono alterni).

- *Il "bridge number" $br(K)$.*

Diciamo che $br(D) \leq n$ se è possibile decomporre D in $2n$ archi poligonali semplici $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ in modo tale che $a_1, \ldots, a_n$ (risp. $b_1, \ldots, b_n$) siano disgiunti e che essi passino sopra (risp. sotto) agli incroci. Diciamo poi che $br(D) = n$ se $br(D) \leq n$, $br(D) \not\leq n-1$. In altri termini, $br(D)$ è il numero di "ponti massimali" (archi che passano sopra gli incroci e massimali rispetto a questa proprietà) in D. Si pone, come in precedenza

$$br(K) = \min_{D \in \mathcal{D}_K} br(D).$$

Si può dimostrare che $br(K_1 \# k_2) = br(K_1) + br(K_2) - 1$ e si congettura che $c(K) \geq 3(br(K) - 1)$, con l'uguaglianza valida solo per il nodo banale, il trifoglio e la somma connessa di trifogli. Per i nodi torali $K_{p,q}$ (con p o q non nulli) si ha ([Mur2])

$$br(K_{p,q}) = \min\{|p|(|q|-1), |q|(|p|-1)\}.$$

- *Il numero di snodamento $u(K)$.*

Osserviamo preliminarmente che un diagramma D di un nodo K può sempre trasformarsi in un diagramma del nodo banale con un numero finito di scambi sopra-sotto agli incroci. Si fissi infatti una orientazione sul diagramma e si faccia percorrere ad un punto il diagramma in un verso assegnato; si modifichino poi gli incroci in modo tale che il punto passi sempre sopra agli incroci (naturalmente non si deve modificare un incrocio che è già stato modificato). Il diagramma così ottenuto può evidentemente pensarsi come proiezione ortogonale del nodo banale.
Ha senso allora considerare il minimo numero $u(D)$ di scambi necessari per mutare D in un diagramma del nodo banale. Poniamo al solito

$$u(K) = \min_{D \in \mathcal{D}_K} u(D).$$

Per i nodi torali $K_{p,q}, p, q > 0$ (cfr. [KM])

$$u(K_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

- *Il linking number*

Questo è un esempio di invariante per links orientati. Nel caso dei links a due componenti la definizione è data in 5.1.3. Nel caso generale $L = L_1 \sqcup \cdots \sqcup L_m$ si pone

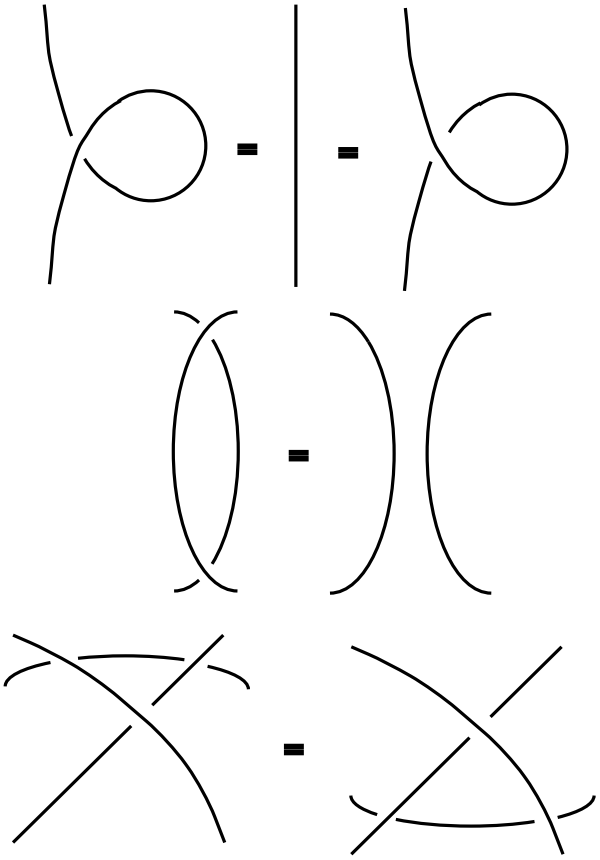
$$lk(L) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} lk(L_i, L_j).$$

§2.1 Il teorema di Reidemeister.

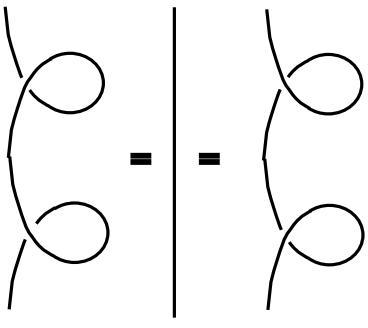
Evidentemente, per studiare i links tramite i diagrammi è necessario determinare le relazioni che intercorrono tra i diagrammi di due nodi isotopi.

Dobbiamo tener conto anzitutto di una classe di deformazioni "banali": diciamo che *due diagrammi D_1, D_2 sono isotopi (come diagrammi)* se esiste un'isotopia ambientale di $\mathbb{R}^2$ tra le proiezioni associate ai due diagrammi che rispetta le specifiche sopra-sotto. Non distingueremo diagrammi isotopi; con tale convenzione, la prossima definizione e il successivo teorema risolvono la questione precedente.

Definizione 2.2.1. *Due diagrammi D_1, D_2 sono equivalenti se è possibile passare da D_1 a D_2 tramite un numero finito delle seguenti mosse locali (dette mosse di Reidemeister).*



Osservazione. La seconda e la terza mossa generano, insieme alla seguente altra mossa combinatoria



una relazione di equivalenza detta *isotopia regolare*. Per links in S^3 possiamo anche considerare diagrammi su S^2 (se si suppone che il link in esame non passi per $(0,0,0,\pm 1)$ un tale diagramma può ottenersi tramite la proiezione $p : S^3 \to S^2 = \{(x,y,z,w) \in S^3 \mid w = 0\}$, $p((x,y,z,w)) = \frac{(x,y,z,0)}{||(x,y,z,0)||}$; in tal caso l'ultima mossa non è più necessaria). Si può dimostrare che l'isotopia regolare sui diagrammi corrisponde all'isotopia (ambientale) tra nastri. Un esempio classico di invariante di isotopia regolare è il writhe[4] di K, definito in 6.3.7 (lo si verifichi per esercizio).

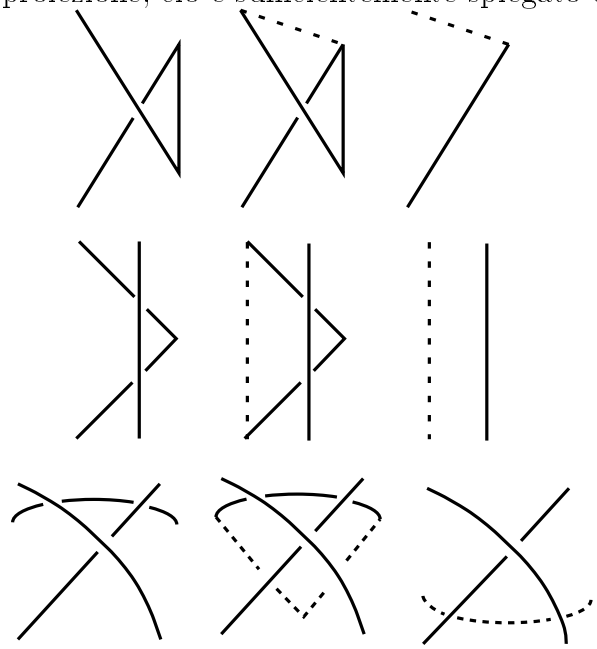
Teorema 2.2.2. *([BZ]) Siano K_1, K_2 links e D_1, D_2 rispettivi diagrammi; allora K_1 è isotopo a K_2 se e solo D_1 è equivalente a D_2.*

Traccia della dim. È chiaro che le mosse di Reidemeister possono realizzarsi con isotopie ambientali, dunque diagrammi equivalenti definiscono nodi isotopi.
Il viceversa si prova in due passi; precisamente si dimostra che:

(1) si può passare da un diagramma di un link K ad un'altro tramite le mosse di Reidemeister;
(2) nodi isotopi ammettono diagrammi equivalenti.

Per quanto riguarda la prima asserzione, siano D_1, D_2 diagrammi di K, che possiamo pensare come punti della sfera unitaria[5] S^2. Abbiamo visto che l'insieme delle proiezioni regolari è denso in S^2 (dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^3$) e il suo complementare è un'unione finita di curve. Scegliamo un cammino poligonale da p_1 a p_2 in posizione generale rispetto alle curve di proiezione singolare in S^2; si può dimostrare che quando si interseca una tale curva il diagramma cambia per una mossa di Reidemeister il cui tipo dipende dal tipo di singolarità corrispondente alla curva.

Per provare l'altra asserzione basta dimostrare che una Δ-mossa induce mosse di Reidemeister sulla proiezione; ciò è sufficientemente spiegato dalle figure seguenti.



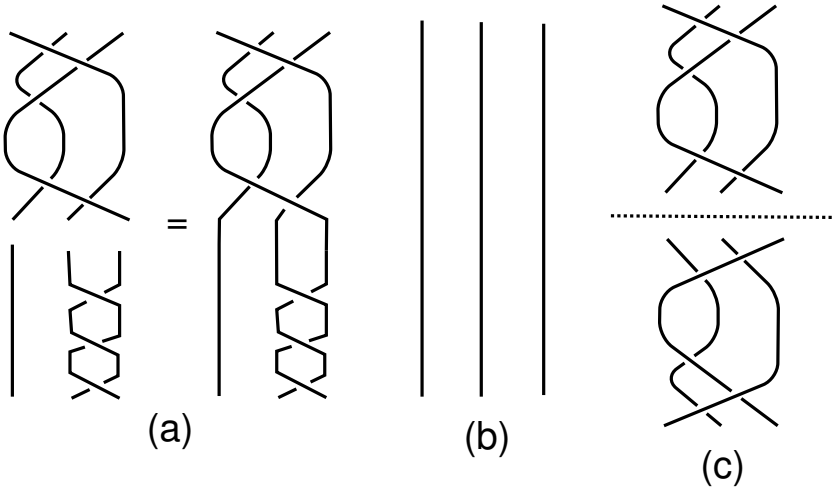
[4] letteralmente: avvitamento. Tale quantità è detta anche *numero di Tait*.

[5] Le proiezioni sono in corrisponenza biunivoca con i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = S^2/\rho$: d'altra parte quando si considerano i diagrammi è necessario tenere conto della specifica sopra-sotto, dunque non si devono più identificare punti antipodali su S^2, che pertanto "parametrizza" i diagrammi.

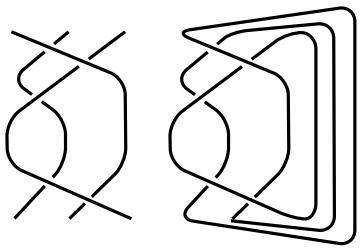
§3 Il gruppo delle trecce

§3.1 Trecce e links.

Vogliamo studiare le relazioni che intercorrono tra trecce e links. Rimandando al prossimo paragrafo per una definizione più precisa, una treccia a m fili è il dato di m cammini in $\mathbb{R}^3$ "discendenti" e non intersecantesi (come in figura), da riguardarsi a meno di isotopie ambientali che preservano gli estremi. Due trecce si possono concatenare ottenendo una nuova treccia (fig.(a)); questa è una operazione di gruppo: è infatti chiaramente associativa; l'elemento neutro è dato dalla treccia "banale" (fig.(b)) mentre l'inverso di una treccia α è la treccia che si ottiene per riflessione rispetto ad una retta come nella figura (c).



È chiaro che una treccia τ a n fili origina un link a m componenti - m essendo il numero dei cicli della permutazione indotta da τ sugli estremi della treccia - tramite la naturale operazione di "chiusura":



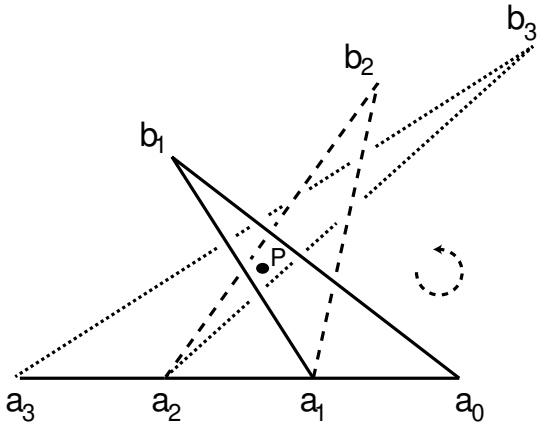
Di fatto vale il viceversa:

Teorema 3.1.1. *(Alexander) Ogni link è isotopo alla chiusura di una treccia.*

Traccia della dimostrazione. Sia s un arbitrario asse in $\mathbb{R}^3$ che non interseca il link L; diciamo che L è in posizione generale rispetto ad s se L non ha lati complanari con s; è facile vedere che ogni link è combinatoriamente equivalente a un link in posizione generale rispetto a s (se il link L contiene un lato ac complanare con s, si scelga $b \notin L$ fuori dal piano per s e ac e vicino ad ac; allora $\Delta^b_{ac} L$ ha un lato meno di L complanare con s; si conclude per induzione).

Fissiamo un verso positivo di rotazione attorno ad s; si ha così un orientazione indotta sui lati di L; si verifica che L è chiusura di una treccia se e solo se tutti

i lati sono positivi (negativi). Per provare il teorema basta quindi esibire una costruzione che rimpiazza un lato negativo con una sequenza di lati positivi senza alterare la classe di equivalenza combinatoria. Ciò è descritto in figura (per maggiori dettagli cfr. [Bir1], Lemma 2.1.2.): se $a_0 a < 0$, è sempre possibile suddividere tale lato con punti $a_0, \dots, a_m = a$ e trovare punti $b_1, \dots, b_m$ in modo tale che $a_{i-1}b_i > 0, b_i a_i > 0, a_{i-1}a_i < 0 \ \forall\, i = 1, \dots m$, $\sum_{i=1}^{m} [a_{i-1}, b_i a_i] \cap L = [a_0, a_m]$.

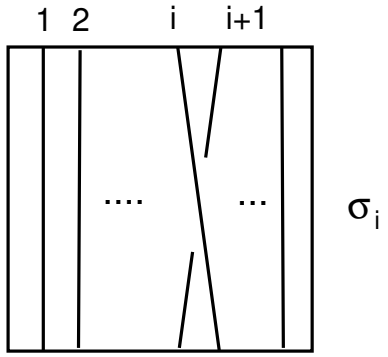


(In figura l'asse s è perpendicolare e incidente in P il piano della pagina.) Allora la seguente composizione di Δ-mosse è la voluta equivalenza:

$$\left(\prod_{i=m}^{1} \Delta^{b_i}_{a_{i-1}a_i}\right)\left(\prod_{i=m}^{1} \Delta^{a_i}_{a_{i-1}a_m}\right) L = L - a_0 a_m + \sum_{i=1}^{m}(a_{i-1}b_i + b_i a_i). \quad \square$$

Introduciamo adesso delle particolari "trecce elementari" $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, che avranno una rilevante importanza nel seguito: proveremo infatti in 3.2 che $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ è un insieme di generatori per B_n e determineremo una presentazione di B_n in termini di S.

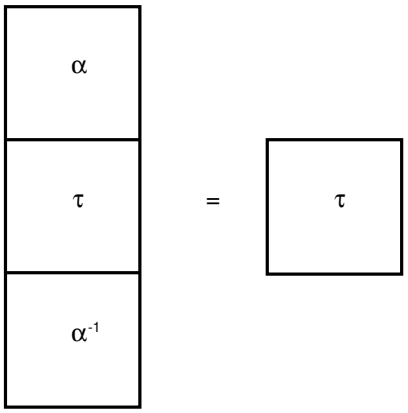
σ_i è la treccia elementare che intreccia semplicemente i fili i, $i+1$ come spiegato in figura:

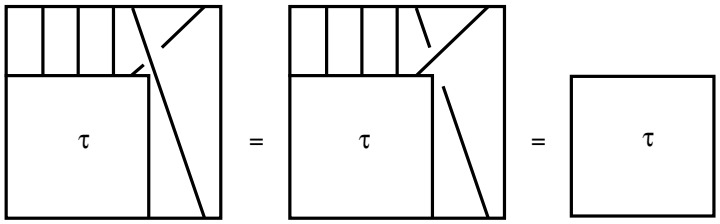


Esercizio Si provi che il nodo torale $K_{p,q}$ è la chiusura della treccia $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{q-1})^p$.

In virtù del teorema di Alexander, ha senso chiedersi quando due trecce differenti generano per chiusura lo stesso link a meno di isotopia.

Teorema 3.1.2. *(Markov-Birman)[Bir1] Due diagrammi di treccia inducono lo stesso link a meno di isotopia se e solo se esiste una sequenza finita delle seguenti mosse locali ($\tau, \alpha \in B_n$) che mutano un diagramma nell'altro.*





Le mosse descritte nel teorema precedente si dicono *mosse di Markov*; più formalmente, denotando con $\iota : B_n \to B_{n+1}$ l'inclusione naturale, esse possono essere descritte come segue:

$$\begin{aligned} &\textit{Prima mossa di Markov}: && \tau \leftrightarrow \alpha\tau\alpha^{-1}, && \alpha, \tau \in B_n. \\ &\textit{Seconda mossa di Markov}: && \tau \leftrightarrow \iota(\tau)\sigma_n^{\pm 1}, && \tau \in B_n. \end{aligned}$$

Se denotiamo con $\mathcal{L}_{S^3}$ l'insieme delle classi di isotopia ambientale di links in S^3, abbiamo in definitiva stabilito le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S^3} &\leftrightarrow \text{Diagrammi/mosse di Reidemeister} \\ &\leftrightarrow \text{Diagrammi di treccia/mosse di Markov} \end{aligned}$$

Possiamo pertanto pensare ad invarianti dei links come a "quantità " associate ad un diagramma ed invarianti per opportune mosse; è questa la strada che seguiremo nel produrre esplicitamente alcuni notevoli esempi di tali invarianti.

§3.2 Presentazione con generatori e relazioni di P_n e B_n.

Vogliamo introdurre il gruppo delle trecce B_n come gruppo di omotopia di uno spazio "naturale" e far vedere che tale definizione coincide con quella più intuitiva cui si è accennato all'inizio di 3.1.

Anzitutto osserviamo che se decomponiamo lo spazio $\mathbb{R}^3$ nel prodotto $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ e prendiamo come estremi di una treccia "geometrica" (pensata come in 3.1) i punti $(i,0),\ i = 1,\dots,n$ e $(i,1),\ i = 1,\dots,n$, allora assegnare una treccia consiste nel dare, per ogni $t \in [0,1]$, i valori delle coordinate orizzontali $z_i(t) \in \mathbb{C}$ degli n fili della treccia: in altritermini bisogna specificare una funzione $(z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))$ a valori nell'aperto di $\mathbb{C}^n$ con coordinate distinte, tale che $z_i(0) = i$ mentre $z_i(1) = \sigma(i)$ per una qualche permutazione dei numeri $1,\dots,n$.

In modo più formale poniamo $\Delta_n = \bigcup_{1 \le i < j \le n} \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j\}$ e

$$X_n = \mathbb{C}^n \setminus \Delta_n.$$

Una treccia è un cammino in X_n dal punto $(1,2,\dots,n)$ al punto$(\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n))$.

Il gruppo simmetrico su n elementi, S_n, agisce su X_n permutando le coordinate e ogni permutazione delle coordinate è un omeomorfismo; poniamo

$$Y_n = \mathbb{C}^n \setminus \Delta_n / S_n.$$

Pertanto *una treccia è il sollevamento ad X_n dal punto $(1,2,\dots,n)$ di un laccio in Y_n con punto base la classe di $(1,2,\dots,n)$*. È chiara dunque la seguente:

Definizione 3.2.1. *Il gruppo delle trecce B_n, è il gruppo fondamentale dello spazio quoziente $Y_n = X_n/S_n$; il gruppo delle trecce pure, P_n, è il gruppo fondamentale di X_n:*

$$B_n = \pi_1(Y_n), \quad P_n = \pi_1(X_n).$$

S_n è un gruppo di omeomorfismi di X_n *propriamente discontinuo*, cioè ogni punto di X_n ha un intorno la cui orbita mediante l'azione di S_n consta di $n!$ intorni a due a due disgiunti; ciò equivale al fatto che X_n è un *rivestimento regolare* di Y_n, cioè la proiezione canonica $X_n \xrightarrow{p} Y_n$ è un rivestimento di cui S_n è il gruppo degli automorfismi; pertanto $p_*(P_n)$, che da ora in poi identificheremo con P_n, è un sottogruppo normale di B_n e il quoziente B_n/P_n è isomorfo al gruppo degli automorfismi del rivestimento, S_n. Nel linguaggio delle trecce, un elemento di B_n rappresentato da una treccia terminante nei punti $(\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n))$ ha immagine in S_n esattamente la permutazione σ; una treccia pura è quindi formata da fili congiungenti $(i,0)$ ad $(i,1)$ per ogni i.

Su X_n possiamo considerare anche l'azione di S_{n-1} data dalle permutazioni delle prime $n-1$ coordinate: sia

$$Y_{n,n-1} = X_n/S_{n-1}, \qquad B'_n = \pi_1(Y_{n,n-1}).$$

È chiaro che anche le proiezioni naturali $X_n \to Y_{n,n-1} \to Y_n$ sono dei rivestimenti; possiamo quindi identificare B'_n con un sottogruppo di B_n che include P_n.

Consideriamo ora la proiezione di $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}^{n-1}$ sulle prime $n-1$ coordinate. Tale proiezione induce un'applicazione surgettiva

$$\varphi : Y_{n,n-1} \to Y_{n-1};$$

si prova facilmente che tale applicazione è una fibrazione localmente banale:

Lemma 3.2.2. *Siano $z_1, \dots, z_{n-1}$, $n-1$ punti distinti, fissati, di $\mathbb{C}$. Sia*

$$i : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-1}\} \to Y_{n,n-1}$$

$$i(z) = (z_1, \dots, z_{n-1}, z) \quad (mod\, S_{n-1}).$$

Allora

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-1}\} & \xrightarrow{\ i\ } & Y_{n,n-1} \\ & & \downarrow \varphi \\ & & Y_{n-1} \end{array}$$

è un fibrazione localmente banale.

Fissiamo dei punti base compatibili, $z_n \in \mathbb{C}$, $[(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)] \in Y_{n,n-1}$, $[(z_1, \dots, z_{n-1})] \in Y_{n-1}$. Dal Lemma otteniamo la seguente successione esatta di omotopia:

$$\cdots \to \pi_{i+1}(Y_{n-1}) \to \pi_i(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-1}\}) \xrightarrow{i_*} \pi_i(Y_{n,n-1}) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_i(Y_{n-1}) \to \cdots$$

$\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ è omotopo ad un bouquet $n-1$ di circonferenze e il suo rivestimento universale è, quindi, omotopo ad un albero, in particolare è contraibile; perciò $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-1}\}) \cong F_{n-1}$, dove F_{n-1} denota il gruppo libero su $n-1$ generatori, e $\pi_i(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-1}\}) = 1$ per $i > 1$. Poiché si ha una naturale applicazione di rivestimento $Y_{n,n-1} \to Y_n$, con un argomento induttivo si ottiene che

Teorema 3.2.3. *Tutti i gruppi di omotopia di ordine superiore al primo, di X_n, Y_n, $Y_{n,n-1}$ sono banali. In particolare X_n e Y_n sono spazi classificanti per B_n e P_n, rispettivamente.*

Scrivendo la parte non banale della precedente successione esatta di gruppi di omotopia, otteniamo la successione esatta corta

$$(*) \qquad 1 \to F_{n-1} \xrightarrow{i_*} B'_n \xrightarrow{\varphi_*} B_{n-1} \to 1$$

Notiamo che se γ è un cammino in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$, $i_*(\gamma)$ è il cammino con le prime $n-1$ componenti costanti, uguali a $z_1, \dots, z_{n-1}$ e l'n-esima componente uguale a γ; se σ è un cammino in $Y_{n,n-1}$, $\varphi_*\sigma$ è il cammino in Y_{n-1} ottenuto da σ eliminando l'n-esima componente.

In realtà possiamo immergere B_{n-1} in B'_n e spezzare la successione $(*)$ in prodotto semidiretto nel modo seguente. Sia D il disco unitario di $\mathbb{C}$; l'immersione di $D^{n-1} \setminus \Delta_{n-1}$ in $\mathbb{C}^{n-1} \setminus \Delta_{n-1}$ è un retratto di deformazione equivariante rispetto al gruppo S_{n-1} ed induce una retrazione di Y_{n-1} su $\overline{Y_{n-1}} = D^{n-1} \setminus \Delta_{n-1} / S_n$; possiamo assumere per il punto base $(z_1, \dots, z_{n-1}) \in D^{n-1}$, e $|z_n| > 1$; allora $\overline{Y_{n-1}} \times \{z_n\}$ si immerge in $Y_{n,n-1}$ e, chiaramente, l'applicazione indotta da tale immersione sui gruppi di omotopia inverte φ_*. Abbiamo quindi

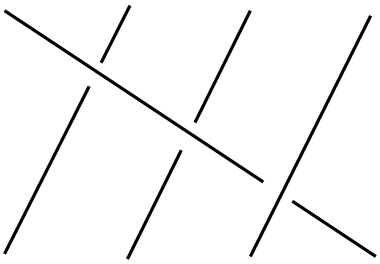
Lemma 3.2.4.

$$B'_n \cong F_{n-1} \rtimes B_{n-1} \text{ (prodotto semidiretto).}$$

Dunque identificheremo B_{n-1} con un sottogruppo di B'_n, sul quale φ_* è l'identità.

Abbiamo già osservato, nel motivare la definizione 3.2.1 che un laccio $f : [0,1] \to Y_n$ basato in $(1, \dots, n)$, equivale ad un insieme di n cammini in $\mathbb{C}$, $\{f_1(t), \dots, f_n(t)\}$ tali che $f_i(0) = i$, $f_i(1) = \sigma(i)$ con $\sigma \in S_n$, e, per ogni $t \in [0,1]$, $f_1(t), \dots, f_n(t)$ sono distinti. Equivalentemente $(f_1(t), t), \dots, (f_n(t), t)$ sono curve in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ prive di intersezioni reciproche, con punti iniziali $(1,0), \dots, (n,0)$, rispettivamente e punti finali $(\sigma(1), 1), \dots, (\sigma(n), 1)$, dove σ è una permutazione di $1, \dots, n$ univocamente determinata da f.

Quest'ultima descrizione coincide con la definizione originale di Artin di treccia ad n fili come insieme di n curve in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, parametrizzabili in funzione di $t \in [0,1]$, prive di intersezioni reciproche, con punti iniziali $(1,0), \dots, (n,0)$ e punti finali $(\sigma(1), 1), \dots, (\sigma(n), 1)$, ordinatamente.



Una treccia a quattro fili

In questa rappresentazione, a meno di cambiamenti di parametro, il prodotto di due trecce è dato dalla loro giustapposizione, in verticale.

Un'omotopia $F : I \times I \to Y_n$ di due cammini f e g in Y_n, equivale, in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, ad una deformazione continua, $((F_1(t,s), t), \dots, (F_n(t,s), t))$, ad estremi fissi, della n-upla di curve $((f_1(t), t), \dots, (f_n(t), t))$ in $((g_1(t), t), \dots, (g_n(t), t))$; questa deformazione è, in ogni istante, una treccia, cioè per ogni $s \in I$ fissato, le curve $(F_1(t,s), t), \dots, (F_n(t,s), t)$ non hanno intersezioni reciproche; inoltre è una deformazione *orizzontale*, nel senso che preserva l'altezza t. Si prova che tale deformazione può essere estesa ad una deformazione continua di $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ in sè, uguale alla trasformazione identica al di fuori di un compatto, dunque ad una isotopia ambientale. È facile provare, inoltre, che, affinché f e g siano omotope, non è necessario che esista una deformazione *orizzontale* di $(f(t), t)$ in $(g(t), t)$; è sufficiente che esistano delle omotopie $G_i : I \times I \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $(i = 1, \dots, n)$ tali che $G_i(t,0) = (f_i(t), t)$, $G_i(t,1) = (g_i(t), t)$ e, per ogni s fissato, le curve $G_1(t,s), \dots G_n(t,s)$ non abbiano intersezioni reciproche in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Ad f, g sono associate le permutazioni $\overline{f}, \overline{g} \in S_n$: è geometricamente evidente che $\overline{fg} = \overline{f}\,\overline{g}$, quindi l'applicazione $B_n \to S_n$, $f \mapsto \overline{f}$ è un omomorfismo.

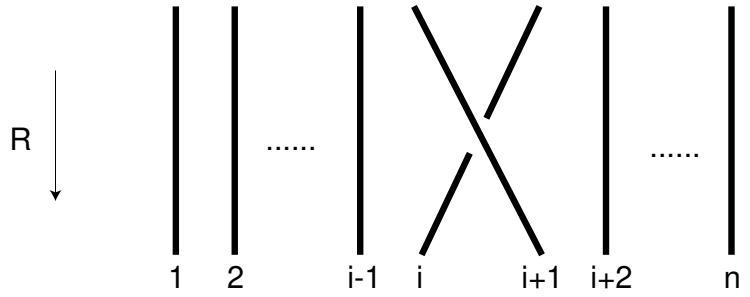
Definiamo, per $i = 1, \dots, n-1$,

$$\sigma_i(t) = (1, \dots, i-1, f_i(t), g_{i+1}(t), i+2, \dots, n),$$

con

$$f_i(t) = i + t + \sqrt{-1}\sqrt{t - t^2}, \quad g_i(t) = i - t - \sqrt{-1}\sqrt{t - t^2}.$$

La figura sottostante rappresenta $(\sigma_i(t), t)$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Notiamo che nella nostra rappresentazione grafica le trecce sono percorse dall'alto verso il basso.



È intuitivamente chiaro che i σ_i generano B_n. Si ha $\overline{\sigma_i} = (i, i+1)$: da ciò segue che l'omomorfismo $B_n \to S_n$ è surgettivo, poiché le trasposizioni $(i, i+1)$ generano S_n. Si verifica, inoltre, che i σ_i soddisfano le relazioni valide per i $\overline{\sigma_i}$:

$$R(\sigma) = \{\sigma_i\sigma_k = \sigma_k\sigma_i,\ k \neq i, i \pm 1;\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-2\}.$$

Le relazioni in $R(\sigma)$ sono chiamate "relazioni di treccia " sui generatori σ. Proveremo effettivamente quanto segue.

Teorema 3.2.5. *I σ_i generano B_n e le relazioni di treccia definiscono B_n, cioè tutte le altre relazioni tra i σ_i sono deducibili da esse.*

Ciò sarà provato induttivamente passando attraverso il sottogruppo B'_n.

Torniamo alla successione esatta

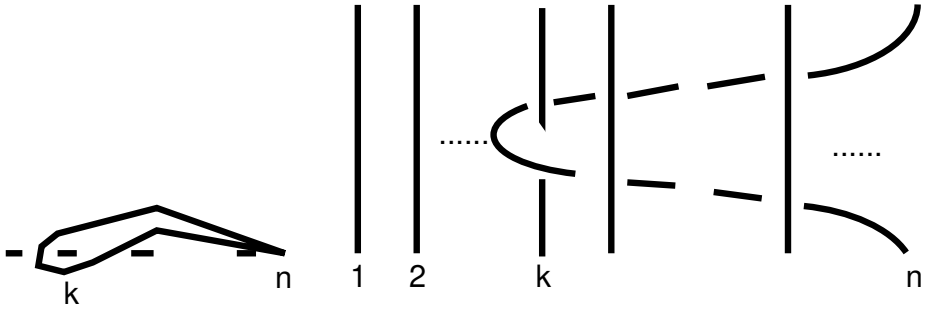
$$1 \to F_{n-1} \xrightarrow{i_*} B'_n \xrightarrow{\varphi_*} B_{n-1} \to 1.$$

Notiamo che, nella rappresentazione in $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$, B'_n corrisponde all'insieme delle trecce in cui l'n-esimo filo ha inizio in $(n, 0)$ e fine in $(n, 1)$; B_{n-1} corrisponde all'insieme delle trecce in cui sono intrecciati solo i primi $n-1$ fili, nelle quali, cioè, a meno di omotopia, è possibile separare con un piano l'n-esima curva dalle altre.

I primi $n-2$ generatori di B_n, $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$, appartengono a B'_n; per induzione generano la copia di B_{n-1} che interviene nel prodotto semidiretto e su cui φ_* è un isomorfismo. Poniamo

$$a_k = \sigma_{n-1} \cdots \sigma_{k+1}\sigma_k^2\sigma_{k+1}^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1}.$$

Dalla figura è chiaro che è possibile scegliere dei cammini γ_k in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ tali che $i_*\gamma_k = a_k$ per $k = 1, \ldots, n-1$ e che essi sono generatori liberi di F_{n-1}.



Poniamo

$$\tilde{B}_n = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \,|\, R(s) \rangle,$$

dove $R(s)$ è l'insieme delle relazioni di treccia su $s_1, \ldots, s_{n-1}$.

Poiché i generatori $(i, i+1)$, $i = 1, \ldots, n-1$ di S_n verificano le relazioni di treccia, è ben definito un omomorfismo $\pi : \tilde{B}_n \to S_n$ tale che $\pi s_i = (i, i+i)$.

Premettiamo ora alcuni richiami sul *metodo di Reidemeister-Schreier*: per ulteriori dettagli e applicazioni si veda [M], §2.3.

Sia G un gruppo presentato con generatori $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ e relazioni $\{R_j\}_{j \in J}$; vogliamo determinare una presentazione per un sottogruppo H di G.

Sia $\mathcal{R} = \{\rho_k\}_{k \in K}$ un sistema di rappresentanti delle classi laterali destre $H \backslash G$; supponiamo fissata un'espressione di ρ_k come parola nei σ_i e supponiamo che $1 \in \mathcal{R}$.

Per ogni $w \in G$ sia $\overline{w} \in \mathcal{R}$ il rappresentante di w in $\mathcal{R}$; poniamo poi, per $\rho_k \in \mathcal{R}$,

$$\tilde{s}_{\rho_k \sigma_i} := \rho_k \sigma_i (\overline{\rho_k \sigma_i})^{-1}.$$

Si noti che $\tilde{s}_{\rho_k \sigma_i} \in H$.

Proposizione. $\{\tilde{s}_{\rho_k \sigma_i} \mid k \in K, i \in I\}$ *genera* H. *Se* $w = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_h} \in H$, *allora* $w = \tilde{s}_{\tau_1 \sigma_{i_1}} \ldots \tilde{s}_{\tau_h \sigma_{i_h}}$ *con* $\tau_\rho = \overline{\sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_l}}$.

Questa riscrittura di w come parola nei $\tilde{s}_{\rho_k \sigma_i}$ si dice *riscrittura di Reidemeister* di w ripetto al sistema $\mathcal{R}$.

Definizione. $\mathcal{R}$ *si dice "di Schreier" se ogni segmento iniziale di ciascun* $\rho_k \in \mathcal{R}$ *appartiene ad* $\mathcal{R}$.

Sia $\{s_{\rho_h \sigma_i}\}$ un insieme di simboli in corrispondenza biunivoca con $\{\tilde{s}_{\rho_h \sigma_i}\}$ e per ogni $w \in G$ poniamo

$$\varphi(w) = s_{\tau_1 \sigma_{i_1}} \ldots s_{\tau_h \sigma_{i_h}}$$

ove $\tilde{s}_{\tau_1 \sigma_{i_1}} \ldots \tilde{s}_{\tau_h \sigma_{i_h}}$ è la riscrittura di Reidemeister di w.

Teorema. Se $\mathcal{R}$ *è di Schreier, allora* H *ha la seguente presentazione:*

$$H = \langle s_{\rho_h \sigma_i} \,|\, s_{\rho_k \sigma_j}, \varphi(\rho_i^{-1} R_j \rho_i) \rangle$$

ove $s_{\rho_k \sigma_j}$ *compare tra i relatori se e solo se* $\tilde{s}_{\rho_k \sigma_j}$ *è liberamente equivalente*[6] *ad* 1.

Consideriamo il sottogruppo di $\tilde{B}_n$ costituito dagli elementi la cui immagine in S_n è una permutazione che fissa n.

$$\tilde{B}'_n = \left\{ s \in \tilde{B}_n \,|\, \pi s : n \mapsto n \right\}.$$

[6] Una parola w rappresentante un elemento di un gruppo libero F si dice liberamente equivalente ad 1 se, in F, si ha $w = 1$.

Lemma 3.2.6. *Sia* $M_n = 1$, $M_i = s_{n-1} \cdots s_i$, *per* $i = 1, \ldots, n-1$. *Allora* $S = \{M_1, \ldots, M_n\}$ *è un sistema di rappresentanti, di Schreier, delle classi laterali destre* $\tilde{B}'_n \backslash \tilde{B}_n$; *in particolare* $[\tilde{B}_n : \tilde{B}'_n] = n$

Dim. Si ha $\pi M_i : i \mapsto n$. Sia $x \in \tilde{B}_n$ e $\pi x : n \mapsto i$. allora $(\pi x)(\pi M_i)^{-1} : n \mapsto n$, quindi $xM_i^{-1} \in \tilde{B}'_n$ e $x = (xM_i^{-1})M_i \in \tilde{B}'_n S$. Poiché, chiaramente, se $i \neq j$, M_i ed M_j appartengono a classi laterali diverse, modulo $\tilde{B}'_n$, S è un sistema di rappresentanti di $\tilde{B}'_n \backslash \tilde{B}_n$. È evidente che S è un sistema di Schreier. □

Vogliamo scrivere una presentazione con generatori e relazioni di $\tilde{B}'_n$, col metodo di Reidemeister-Schreier , rispetto al sistema S.

Per ogni $s \in \tilde{B}_n$ sia $\overline{s}$ il suo rappresentante in S; come è chiaro dalla dimostrazione del Lemma 3.2.6, risulta $\overline{s} = M_i$ se e solo se $(\pi s)^{-1}(n) = i$.

Scriviamo $\overline{s_j^\varepsilon}$ e $\overline{M_i s_j^\varepsilon}$ per ogni i, j in $\{1, \ldots, n-1\}$ e per $\varepsilon = \pm 1$. Notiamo che $s_{n-1}^\varepsilon = \overline{s_{n-1}^\varepsilon} = M_{n-1}$, mentre $\overline{s_j^\varepsilon} = M_n = 1$ se $j \neq n-1$; inoltre $\overline{M_i s_i^\varepsilon} = M_{i+1}$, $\overline{M_i s_{i-1}^\varepsilon} = M_{i-1}$ e $\overline{M_i s_j^\varepsilon} = M_i$ se $j \neq i, i-1$. Dalle relazioni precedenti, utilizzando anche le relazioni di treccia, otteniamo

$$
\begin{aligned}
M_i s_j^\varepsilon \overline{M_i s_j^\varepsilon}^{-1} &= M_i s_j^\varepsilon M_i^{-1} = \begin{cases} s_j^\varepsilon & \text{se } j < i-1 \\ s_{j-1}^\varepsilon & \text{se } j > i \end{cases} \\
M_i s_i^\varepsilon \overline{M_i s_i^\varepsilon}^{-1} &= M_i s_i^\varepsilon M_{i+1}^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon = -1 \\ M_{i+1} s_i^2 M_{i+1}^{-1} & \text{se } \varepsilon = 1 \end{cases} \\
M_i s_{i-1}^\varepsilon \overline{M_i s_{i-1}^\varepsilon}^{-1} &= M_i s_{i-1}^\varepsilon M_{i-1}^{-1} = \begin{cases} M_i s_{i-1}^{-2} M_i^{-1} & \text{se } \varepsilon = -1 \\ 1 & \text{se } \varepsilon = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Poniamo, per $i = 1, \ldots, n-1$

$$a_i = M_{i+1} s_i^2 M_{i+1}^{-1}.$$

Allora $\tilde{B}'_n$ è generato da $\{s_1, \ldots, s_{n-2}, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Le relazioni sugli s_i ed a_j che definiscono $\tilde{B}'_n$ si ottengono mediante la riscrittura di Reidemeister delle relazioni in

$$R = \{M_i [s_j, s_k] M_i^{-1} = 1,\ k \neq j, j \pm 1;\ M_i s_j s_{j+1} s_j s_{j+1}^{-1} s_j^{-1} s_{j+1}^{-1} M_i^{-1} = 1\}.$$

Chiaramente, le relazioni di treccia in $s_1, \ldots, s_{n-2}$ coniugate con $M_n = 1$, restano invariate e quindi compaiono nella presentazione di B'_n. Notiamo che $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ equivale anche a $s_{i+1} s_i s_{i+1}^{-1} s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} s_i = 1$. Dalla riscrittura di

$$
\begin{aligned}
&M_i s_{i+1} s_i s_{i+1}^{-1} s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} s_i M_i^{-1} = 1, \\
&M_i s_{i+1} s_i s_{i+1} s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} s_i^{-1} M_i^{-1} = 1, \\
&M_i s_i s_k s_i^{-1} s_k^{-1} M_i^{-1} = 1 \quad (k \neq i, i-1,\ k < n),
\end{aligned}
$$

otteniamo, rispettivamente,

$$s_i a_i s_i^{-1} = a_{i+1},\ s_i a_i a_{i+1} s_i^{-1} = a_i a_{i+1},\ s_i a_k s_i^{-1} = a_k\ (k \neq i, i+1),$$

che, insieme, equivalgono alle seguenti

$$\begin{aligned} &s_i a_i s_i^{-1} = a_{i+1}, \\ &s_i a_{i+1} s_i^{-1} = a_{i+1}^{-1} a_i a_{i+1}, \\ &s_i a_k s_i^{-1} = a_k \quad (k \neq i, i+1). \end{aligned}$$

Chiamiamo $R(s,a)$ l'insieme delle relazioni sopra scritte ed $R'(s)$ l'insieme delle relazioni di treccia su $s_1, ..., s_{n-2}$. Si può verificare direttamente che tutte le altre relazioni che si ottengono mediante la riscrittura di Reidemeister delle relazioni in R sono deducibili da $R'(s)$ ed $R(s,a)$, quindi:

Teorema 3.2.7.

$$\tilde{B}'_n = \langle s_1, ..., s_{n-2}, a_1 ..., a_{n-1} \,|\, R'(s), R(s,a) \rangle.$$

Sia $\tilde{F}_{n-1}$ il sottogruppo di $\tilde{B}'_n$ generato da $a_1, ..., a_{n-1}$. Dalle relazioni di $\tilde{B}'_n$ è evidente che $\tilde{F}_{n-1}$ è normale, inoltre $\tilde{B}'_n \diagup \tilde{F}_{n-1}$ è il gruppo generato dalle classi laterali di $s_1, ..., s_{n-2}$ modulo $\tilde{F}_{n-1}$ con le relazioni di treccia, quindi è isomorfo, per definizione, a $\tilde{B}_{n-1}$. Sia φ la proiezione di $\tilde{B}'_n$ su $\tilde{B}_{n-1}$.

Lemma 3.2.8. *Il sottogruppo di $\tilde{B}'_n$ generato da $s_1, ..., s_{n-2}$ è isomorfo a $\tilde{B}'_n \diagup \tilde{F}_{n-1}$ ed è identificabile con $\tilde{B}_{n-1}$. In particolare $\tilde{B}'_n$ è il prodotto semidiretto $\tilde{F}_{n-1} \rtimes \tilde{B}_{n-1}$.*

Dim. Sia H il sottogruppo generato dagli s_i. Poiché gli s_i verificano le relazioni di treccia, è ben definito un omomorfismo, di $\tilde{B}'_n \diagup \tilde{F}_{n-1}$ su H, che trasforma $s_i \tilde{F}_{n-1}$ in s_i; è ovvio che la restrizione di φ ad H inverte tale omomorfismo, quindi H è isomorfo a $\tilde{B}'_n \diagup \tilde{F}_{n-1}$ ed è identificabile con $\tilde{B}_{n-1}$. □

Denotiamo, dunque, con $\tilde{B}_{n-1}$ il sottogruppo di $\tilde{B}'_n$ generato dagli s_i. Mediante la proiezione naturale di $\tilde{B}_n$ su B_n, $\tilde{B}'_n$ si proietta su B'_n, $\tilde{F}_{n-1}$ su F_{n-1}, $\tilde{B}_{n-1}$ su B_{n-1}; inoltre il seguente diagramma, a righe esatte e frecce verticali surgettive, risulta commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \tilde{F}_{n-1} & \xrightarrow{i} & \tilde{B}'_n & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{B}_{n-1} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & F_{n-1} & \xrightarrow{i_*} & B'_n & \xrightarrow{\varphi_*} & B_{n-1} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Proveremo che le frecce verticali sono degli isomorfismi e da ciò otterremo direttamente che B_n è definito dalle relazioni di treccia.

Teorema 3.2.9.

$$B_n \cong \tilde{B}_n.$$

Dim. Cosideriamo il diagramma commutativo sopra scritto. Poiché i generatori liberi di F_{n-1} corrispondono ordinatamente ai generatori a_i di $\tilde{F}_{n-1}$, e poiché i gruppi liberi finitamente generati sono hopfiani (non sono cioè isomorfi a un loro

quoziente proprio, [M] Th. 2.13), $\tilde{F}_{n-1}$ è il gruppo libero su $a_1, ..., a_{n-1}$ e la sua proiezione su F_{n-1} è un isomorfismo.

Per $n = 2$ si ha $\tilde{B}_{n-1} = B_{n-1}\{1\}$ quindi, per il *five lemma*, $\tilde{B}'_n \cong B'_n$. Assumiamo, per induzione, che la proiezione di $\tilde{B}_{n-1}$ su B_{n-1} sia un isomorfismo. Allora, per il *five lemma*, anche la freccia centrale $\tilde{B}'_n \to B'_n$ è un isomorfismo. Dunque abbiamo provato che la proiezione naturale $\tilde{B}_n \to B_n$, ristretta al sottogruppo $\tilde{B}'_n$, è un isomorfismo di $\tilde{B}'_n$ con B'_n; poiché $[\tilde{B}_n : \tilde{B}'_n] = [B_n : B'_n] = n$, la proiezione deve essere iniettiva (quindi bigettiva), su tutto $\tilde{B}_n$. □

Da ora in poi possiamo identificare tutti i gruppi "tildati"che abbiamo introdotto con i gruppi concreti corrispondenti.

Le costruzioni precedenti forniscono, per induzione, un teorema di struttura per P_n ed una soluzione del problema della parola in P_n e B_n. Per $1 < k \leq n$, identifichiamo B_k con il sottogruppo di B_n delle trecce sui primi k fili. Poniamo, $M_{kk} = 1$ e, per $1 \leq j < k \leq n$,

$$M_{kj} = \sigma_{k-1} \cdots \sigma_{j+1}, \quad a_{kj} = M_{kj} \sigma_j^2 M_{kj}^{-1};$$

allora, per $1 < k \leq n$,

$$F_{k-1} = \langle a_{k1}, \ldots, a_{k,k-1} \rangle$$

è un gruppo libero su $a_{k1}, ..., a_{k\,k-1}$.

Teorema 3.2.10. *F_{k-1} è un sottogruppo normale, libero, di P_k e P_k è il prodotto semidiretto $F_{k-1}P_{k-1}$. Quindi P_n è il prodotto semidiretto di gruppi liberi*

$$P_n = F_{n-1} \rtimes F_{n-2} \rtimes \cdots \rtimes F_1.$$

Ogni elemento in B_n si scrive in modo unico nella forma

$$a_n \cdots a_2 M_2 \cdots M_n,$$

con $a_k \in F_{k-1}$ e M_k di tipo $\sigma_k \cdots \sigma_j$, con $j < k$, o $M_k = 1$.

Osservazione. La decomposizione di P_n asserita nel teorema è "associativa", nel senso che, per $1 \leq k < n$, $F_{n-1} \rtimes \cdots \rtimes F_k$ è normale in P_n ed ha intersezione banale con $F_{k-1} \rtimes \cdots \rtimes F_1$. È poi chiaro che dall'enunciato precedente segue la soluzione del problema della parola per B_n.

Dim. Per il Lemma 3.2.6, ogni elemento in B_n si scrive in modo unico nella forma xM_i con $x \in B'_n$, $M_i = 1$ per $i = n$, $M_i = \sigma_{n-1} \cdots \sigma_i$, per $1 \leq i \leq n-1$. Per il Lemma 3.2.4, $B'_n = F_{n-1} \rtimes B_{n-1}$, quindi ogni elemento in B'_n si scrive in modo unico nella forma $a_{n-1} b_{n-1}$, con $a_{n-1} \in F_{n-1}$ e $b_{n-1} \in B_{n-1}$. Induttivamente, otteniamo che ogni $x \in B_n$ si scrive in modo unico nella forma

$$a_n \cdots a_2 M_{2\,j_2} \cdots M_{n j_n},$$

con $a_k \in F_{k-1}$ e $j_k \leq k$.

Poniamo $\overline{\sigma_i} = (i, i+1) \in S_n$, e $\overline{M_{kj}} = \overline{\sigma_{k-1}} \cdots \overline{\sigma_j}$. Notiamo che ogni elemento di S_n si scrive in modo unico nella forma $\overline{M_{2j_2}} \cdots \overline{M_{nj_n}}$, e quindi l'insieme degli

elementi di B_n di tipo $M_{2j_2}\cdots M_{nj_n}$ costituisce un sistema di rappresentanti di $P_n\backslash B_n$.

Per costruzione, se $x = a_n\cdots a_2 M_{2j_2}\cdots M_{nj_n}$, allora $\overline{M_{2j_2}}\cdots\overline{M_{nj_n}}$ è esattamente la permutazione indotta da x, quindi x è una treccia pura se e solo se $x = a_n\cdots a_2$, con $a_k \in F_{k-1}$. Questo prova che P_n è il prodotto $F_{n-1}\rtimes\cdots\rtimes F_1$ e, ovviamente, che $P_k = F_{k-1}\rtimes\cdots\rtimes F_1$ anche per $k \le n$. Per concludere occorre solo provare che F_{n-1} è normale in P_n ed ha intersezione banale con P_{n-1}. Questo segue dal Lemma 3.2.4, poiché P_n è incluso in B'_n e P_{n-1} è incluso in B_{n-1}. □

Per il Teorema 3.2.10, gli elementi a_{kh}, $1 \le h < k \le n$, generatori dei sottogruppi $F_1,\dots,F_{n-1}$, costituiscono un insieme di generatori per P_n. Per avere una presentazione di P_n è sufficiente descrivere l'azione di coniugio che definisce il prodotto semidiretto $F_{n-1}\rtimes\cdots\rtimes F_1$ in funzione dei generatori a_{kh}. Il sottogruppo libero F_{k-1} è generato dagli a_{kh} ed è normalizzato da tutti gli a_{ij} con $i<k$; è sufficiente descrivere l'azione di coniugio di a_{ij} su a_{kh} per $i<k$.

Dalle relazioni di B'_n (Teorema 3.2.7), segue:

$$\begin{aligned}
&\sigma_j a_{kj}\sigma_j^{-1} = a_{k\,j+1}, && \sigma_j a_{k\,j+1}\sigma_j^{-1} = a_{k\,j+1}^{-1}a_{kj}a_{k\,j+1}\\
&\sigma_j^{-1} a_{kj}\sigma_j = a_{kj}^{-1}a_{k\,j+1}a_{kj}, && \sigma_j^{-1} a_{k\,j+1}\sigma_j = a_{kj}\\
&\sigma_j a_{kh}\sigma_j^{-1} = \sigma_j^{-1}a_{kh}\sigma_j = a_{kh} && k>h>j+1,\quad k>j+1>j>h
\end{aligned}$$

Scrivendo a_{ij} come prodotto di σ_l e applicando direttamente le formule precedenti, si ottiene:

Teorema 3.2.11. *Il gruppo P_n è generato dall'insieme $\{a_{ij} \mid 1 \le i < j \le n\}$, con le relazioni*

$$\begin{aligned}
&a_{ij}^{-1}a_{hk}a_{ij} = a_{hk}, && se\quad h>k>i>j,\quad o\quad h>i>j>k\\
&a_{ij}^{-1}a_{hk}a_{ij} = [a_{hi},a_{hj}]^{-1}a_{hk}[a_{hi},a_{hj}], && se\quad h>i>k>j\\
&a_{ij}^{-1}a_{hi}a_{ij} = a_{hj}a_{hi}a_{hj}^{-1}, && se\quad h>i>j\\
&a_{ij}^{-1}a_{hj}a_{ij} = a_{hj}a_{hi}a_{hj}(a_{hj}a_{hi})^{-1}, && se\quad h>i>j
\end{aligned}$$

dove $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$. □

§3.3 Gruppo delle trecce e automorfismi del gruppo libero.

Iniziamo provando il seguente risultato, la cui prima parte può dedursi da 3.2.7.

Proposizione 3.3.1. *L'applicazione $\sigma_i \mapsto T_i$, ove*

$$(\bullet)\qquad x_j.T_i = \begin{cases} x_i & se\ j = i+1\\ x_i x_{i+1} x_i^{-1} & se\ j = i\\ x_j & se\ j \ne i, i+1\end{cases}$$

si estende ad una una rappresentazione $\beta : B_n \to Aut(F_n)$ *nel gruppo degli automorfismi del gruppo libero* F_n *sui generatori* $x_1, \dots, x_n$. *Tale rappresentazione è fedele.*

Dim. Dobbiamo dimostrare che la rappresentazione è fedele, cioè che $Ker(\beta) = \{1\}$. Ricordiamo due fatti che seguono facilmente da quanto provato in precedenza:

(1) Se U_{n+1} è il sottogruppo di P_{n+1} generato da $\{a_{1\,n}, \dots a_{n\,n+1}\}$, allora U_{n+1} è libero e $P_{n+1} = P_n \ltimes U_{n+1}$.

(2) Ogni elemento $b \in P_n$ si scrive in modo unico come $b = b_2 \dots b_i$ con $b_i \in U_i$.

Ritornando alla dimostrazione del teorema, ci si riduce facilmente a provare che la restrizione di β a P_n è fedele; infatti β induce una rappresentazione[7] di F_n/F_n' in cui σ_i agisce come $y_i \mapsto y_{i+1},\ y_{i+1} \mapsto y_i$ e fissa gli altri y_k – questo è chiaro dalle formule $(\bullet)$ –. Allora gli elementi di P_n inducono l'identità , e dal *five lemma* segue che β è fedele se lo è la sua restrizione a P_n.

Dall'osservazione (1) deduciamo che P_n agisce per coniugazione su U_n; inoltre l'applicazione $\phi : U_{n+1} \to F_n,\ \phi(a_{j\,n+1}) = x_j,\ j = 1, \dots, n$ è un isomorfismo, pertanto si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{\text{coniugazione}} & Aut(U_{n+1}) \\ = \downarrow & & \downarrow \cong \\ P_n & \xrightarrow{\beta} & Aut(F_n) \end{array}$$

da cui deduciamo che $Ker(\beta)$ è costituito esattamente dagli elementi di P_n che appartengono al centralizzatore di U_{n+1} in P_{n+1}.

Supponiamo per assurdo che esista $1 \neq b \in Ker(\beta)$; per (2) possiamo scrivere $b = b_2 \dots b_i$ con $b_j \in U_j$ e $i = \max\{j \mid b_j \neq 1\}$. Poichè $b \in Ker(\beta)$, b commuta in particolare con $a_{i\,n+1}$, che per definizione dipende solo da $\sigma_i, \dots, \sigma_n$; dalle definizioni si deduce d'altra parte che b_j dipende solo da $\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}$: pertanto dalle relazioni di treccia segue che b_j commuta con $a_{i\,n+1}$ se $j \leq i-1$. In definitiva

$$b_i a_{i\,n+1} = a_{i\,n+1} b_i, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{$\triangle$}$$

Deriveremo da questa relazione la cercata contraddizione. Sia $p = \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_i$. Dalle relazioni di treccia e dalle definizioni segue che

$$(i.) \qquad p a_{i\,n+1} p^{-1} = a_{n\,n+1} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$(ii.) \qquad p a_{k\,i} p^{-1} = a_{k\,n+1} \qquad k = 1, \dots, i-1.$$

Combinando (i.) e $(\triangle)$ otteniamo

$$(p b_i p^{-1}) a_{n\,n+1} (p b_i^{-1} p^{-1}) = a_{n\,n+1}.$$

D'altra parte (ii.) implica che $p b_i p^{-1} \in U_{n+1}$: ma se due elementi in un gruppo libero commutano, allora sono necessariamente potenze di uno stesso elemento. Poichè $a_{n\,n+1}$ è un generatore di U_{n+1}, si ha $p b_i p^{-1} = a_{n\,n+1}^t$ per qualche $t \in \mathbb{Z}$.

Ora, $b_i = p^{-1} a_{n\,n+1}^t p = a_{i\,n+1}^t$ – l'ultima uguaglianza segue da (i.) –, e $b_i \in U_i$: ne segue $t = 0$ e a sua volta $b = 1$, come si voleva. □

[7] Se G è un gruppo denoteremo con G' il *derivato* di G, ovvero il sottogruppo (normale) generato dagli elementi del tipo $uvu^{-1}v^{-1}$, $u, v \in G$.

In virtù del teorema precedente possiamo riguardare B_n come sottogruppo di $Aut(F_n)$, e quindi chiederci quando un automorfismo β del gruppo libero appartiene a B_n; sussiste al riguardo il seguente teorema di Artin.

Teorema 3.3.2. *$\beta \in B_n$ se e solo se β verifica le due seguenti condizioni:*

(1) $x_i.\beta = A_i x_{\mu_i} A_i^{-1} \quad 1 \leq i \leq n.$

(2) $(x_1 \dots x_n).\beta = x_1 \dots x_n.$

ove $(\mu_1 \dots \mu_n)$ è una permutazione di $(1, \dots, n)$ e gli A_i sono parole nei generatori.

Dim. Le condizioni sono ovviamente necessarie, dunque basta provare la loro sufficienza. La dimostrazione si basa sull'analisi della seguente uguaglianza, che si deduce da (2) usando (1) e il fatto che β è un omomorfismo:

$$A_1 x_{\mu_1} A_1^{-1} \dots A_n x_{\mu_n} A_n^{-1} = x_1 \dots x_n. \qquad (*)$$

Più precisamente vogliamo capire come avvengono le cancellazioni nel primo membro. Abbiamo bisogno di alcune considerazioni preliminari. Se p, $q \in F_n$, diciamo che p *assorbe q a destra (risp. sinistra)*,e scriviamo $p \to q$ (risp $q \leftarrow p$) se esistono $p', p'' \in F_n$ tali che $p = p'p''$, $pq = p'$ (risp. $p = p'p''$, $qp = p''$).

Introduciamo una funzione lunghezza ℓ tra gli elementi $\beta \in Aut(F_n)$ che verificano (1) ponendo

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \#(A_i x_{\mu_i} A_i^{-1}),$$

ove $\#(A_i x_{\mu_i} A_i^{-1})$ è il numero di generatori liberi nella parola $A_i x_{\mu_i} A_i^{-1}$ (assunta liberamente ridotta[8]). Dimostriamo, per induzione sulla lunghezza, che ogni automorfismo verificante (1), (2) è prodotto dei $T_i^{\pm 1}$. Proveremo che se vale $(*)$, allora esiste un indice j, $1 \leq j \leq n$ tale che

$$(a) \quad x_{\mu_j} A_j^{-1} \leftarrow A_{j+1} \qquad \text{ovvero} \qquad (b) \quad A_j^{-1} \to A_{j+1} x_{\mu_{j+1}}.$$

Ciò conclude, perchè se vale (a), allora

$$x_j.\beta = A_j x_{\mu_j} A_j^{-1}$$
$$x_{j+1}.\beta = A_j x_{\mu_j}^{-1} A'_{j+1} x_{\mu_{j+1}} A_{j+1}^{'-1} x_{\mu_j} A_j^{-1}$$

(ove $A'_{j+1} := x_{\mu_j} A_j^{-1} A_{j+1}$) mentre, usando $(\bullet)$

$$x_j.(T_j\beta) = A_j A'_{j+1} x_{\mu_{j+1}} A_{j+1}^{'-1} A_j^{-1}$$
$$x_{j+1}.(T_j\beta) = A_j x_{\mu_j} A_j^{-1};$$

Poichè β, $T_j\beta$ concidono su x_k, $k \neq j, j+1$, $\ell(T_j\beta) < \ell(\beta)$; per induzione $T_j\beta \equiv \beta' \in B_n$, ma allora $\beta = T_j^{-1}\beta' \in B_n$ come si voleva. Nel caso (b) ragionando come sopra si ottiene $\ell(T_j^{-1}\beta) < \ell(\beta)$.

[8] Una parola w rappresentante un elemento di un gruppo libero F si dice liberamente ridotta se in essa non appaiono sottostringhe del tipo $\cdots x^{\nu} x^{-\nu} \cdots$, $\nu = \pm 1$, x essendo un generatore di F

Per provare l'asserzione precedente esaminiamo nuovamente $(*)$.

Supponiamo dapprima che esista un indice j per il quale $A_j x_{\mu_j} A_j^{-1}$ sia assorbito completamente nelle cancellazioni che mutano il primo membro di $(*)$ nel secondo:

$$\underbrace{\ldots\ldots}_{U} x_{\mu_{j-1}} A_{j-1}^{-1} A_j x_{\mu_j} A_j^{-1} A_{j+1} x_{\mu_{j+1}} \underbrace{\ldots\ldots}_{V} = x_1 \ldots x_n$$

Ci sono a riguardo quattro possibilità:

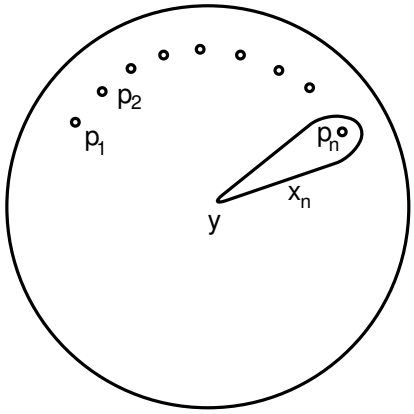
$$\exists x \in U : x \to x_{\mu_j} \implies \text{vale (a)}, \qquad \exists x \in A_{j-1}^{-1} : x \to x_{\mu_j} \implies \text{vale (b)},$$
$$\exists x \in A_{j+1} : x_{\mu_j} \leftarrow x \implies \text{vale (a)}, \qquad \exists x \in V : x_{\mu_j} \leftarrow x \implies \text{vale (b)}.$$

Resta da esaminare il caso in cui non ci sono assorbimenti di fattori del tipo $A_i x_{\mu_i} A_i^{-1}$. Consideriamo allora $A_1 x_{\mu_1} A_1^{-1}$: tale fattore comincia necessariamente con x_1; se non è identicamente x_1, potrà scriversi come

$$A_1 x_{\mu_1} A_1^{-1} = x_1 A_1' x_{\mu_1} A_1^{'-1} x_1^{-1}.$$

Ora, dal momento che $A_1' x_{\mu_1} A_1^{'-1} x_1^{-1}$ deve essere assorbito, x_{μ_1} è assorbito o da A_2 (e in tale caso vale (a)) oppure da una lettera alla destra di x_{μ_2} (nel qual caso vale (b)). Se invece $A_1 x_{\mu_1} A_1^{-1} = x_1$, iteriamo l'argomento a partire da $A_2 x_{\mu_2} A_2^{-1}$ e così via. □

Vogliamo dedurre dal risultato precedente una ulteriore interpretazione geometrica di B_n. Sia D un 2-disco e $\mathcal{P}_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$ un insieme di punti distinti in D. $\pi_1(D \setminus \mathcal{P}_n)$ è un gruppo libero con n generatori $x_1, \ldots, x_n$; x_i può rappresentarsi come il loop con punto base y che allaccia semplicemente il punto p_i e nessuno dei punti $p_j, j \neq i$.



Proposizione 3.3.3. *Sia G_n il gruppo degli automorfismi di $\pi_1(D \setminus \mathcal{P}_n, y)$ che sono indotti da omeomorfismi di $D \setminus \mathcal{P}_n$ che fissano (puntualmente) il bordo. Allora G_n può identificarsi a B_n.*

Dim. È geometricamente evidente che ogni elemento di G_n verifica entrambe le condizioni del teorema precedente, pertanto $G_n \subseteq B_n$. Viceversa, per quanto osservato all'inizio del paragrafo, l'azione del generatore canonico $\sigma_i \in B_n$ sul gruppo libero $\pi_1(D \setminus \mathcal{P}_n)$ può pensarsi indotta da un omeomorfismo di D che scambia tra loro i punti p_i, p_{i+1} ed è l'identità fuori di un disco $\tilde{D} \subset D$ tale che $\tilde{D} \cap \mathcal{P}_n = \{p_i, p_{i+1}\}$. Pertanto $B_n \subseteq G_n$ e dunque $G_n = B_n$. □

§4 Topologia del complementare di un nodo

§4.1 Il complementare di un nodo.

Nella ricerca di invarianti dei nodi è naturale cercare di utilizzare le tecniche della topologia algebrica; d'altronde si otterranno invarianti non banali soltanto quando tali strumenti siano "sensibili" al particolare embedding $f : S^1 \longrightarrow S^3$.

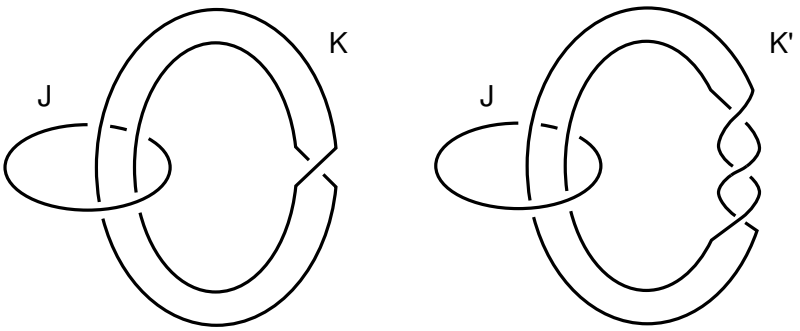
Sia U un intorno tubolare di un nodo K in S^3. Il *complementare del nodo* K è , per definizione, la varietà $C = \overline{S^3 \setminus U}$. C è una 3-varietà compatta connessa orientata, con bordo ∂C omeomorfo a un toro.

Si può dimostrare che C e il complementare insiemistico $S^3 \setminus K$ del nodo (che è una varietà non compatta senza bordo) sono invarianti equivalenti: chiaramente C determina $S^3 \setminus K$; in [E] si prova che due 3-varietà compatte sono omeomorfe se lo sono le loro parti interne, dunque $S^3 \setminus K$ determina C.

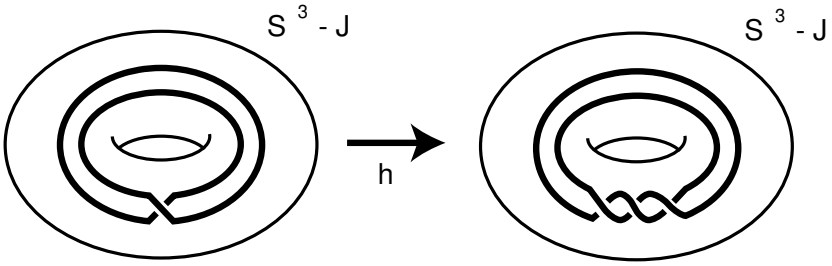
Abbiamo già osservato che se K, K' sono nodi isotopi, allora $S^3 \setminus K$ è omeomorfo a $S^3 \setminus K'$. È d'altronde noto che un nodo e la sua immagine speculare, pur potendo essere inequivalenti, hanno complementari omeomorfi; a meno di ciò , il tipo topologico del complementare è un invariante completo, come hanno recentemente provato Gordon e Luecke.

Teorema 4.1.1. *[GL] Siano K, K' nodi in S^3; esiste un omeomorfismo $f : S^3 \longrightarrow S^3$ con $f(K) = K'$ se e solo se i complementari di K, K' in S^3 sono omeomorfi.*

In altri termini, due nodi hanno complementari omeomorfi se e solo se due loro diagrammi sono equivalenti rispetto alle mosse di Reidemeister e all'inversione (simultanea) di tutti gli incroci - ciò corrisponde a considerare l'immagine speculare del nodo -. Osserviamo peraltro che l'asserto analogo è falso per i link, come segue da un famoso controesempio di Whitehead: $J \cup K$ non è isotopo a $J \cup K'$ (J, K sono nodi banali mentre K' è un trifoglio), ma i complementari di tali links in S^3 sono omeomorfi.



Per provare la precedente asserzione osserviamo anzitutto che $S^3 \setminus J$ è omeomorfo a $S^1 \times int(D^2)$. Riguardiamo ora S^1, D^2 come $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 1\}$ rispettivamente; l'omeomorfismo "twist" $h(z, w) = (z, zw)$ descritto nella seguente figura è un omeomorfsmo di $S^3 \setminus J$ in sè che manda K in K', dunque $S^3 \setminus (J \cup K)$ e $S^3 \setminus (J \cup K')$ sono omeomorfi.



Insieme al risultato di Gordon e Luecke ricordiamo anche che Hemion, basandosi su una teoria sviluppata da Haken e Waldhausen, ha fornito un algoritmo finito per distinguere il tipo topologico delle *varietà Haken*, una classe particolarmente importante di 3-varietà comprendente anche i complementari dei nodi (cfr. [He] e [He2] per una esposizione elementare). La combinazione dei due teoremi risolve in linea di principio il problema generale che abbiamo posto all'inizio di §1.1; d'altra parte, malgrado l'importanza teorica, l'algoritmo è praticamente inutilizzabile.

Essendo estremamente difficile analizzare direttamente il tipo topologico del complementare di un nodo, cerchiamo di studiarne omologia, coomologia e omotopia. Le due prime teorie non sono interessanti, perchè manca la dipendenza dall'embedding.

Proposizione 4.1.2. *Sia U un intorno tubolare di un nodo K e $C = \overline{S^3 \setminus U}$. Allora*

(1) $H_0(C) \cong H_1(C) \cong \mathbb{Z}$.
(2) $H_n(C) = 0 \ \forall n \geq 2$.

Dim. Usiamo la successione di Mayer-Vietoris della coppia (C, U); poichè $C \cup U = S^3$, U è omeomorfo a un toro solido $S^1 \times D^2$ e quindi $U \cap C = \partial U$ è omeomorfo a un toro. In particolare si ha un isomorfismo $H_1(\partial U) \cong H_1(U) \oplus H_1(C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$: non è difficile provare che come generatori di $H_1(\partial U)$ possiamo considerare due curve chiuse semplici su ∂U, $\mathfrak{m}$,$\mathfrak{l}$ (meridiano, parallelo), univocamente determinate a meno di isotopie di U (cfr. la discussione successiva). □

Osservazioni.

(1) Nel caso di un link a m componenti L l'enunciato d1 4.1.2 diviene il seguente:

$$H_i(S^3 \setminus L) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, \\ \mathbb{Z}^m & i = 1, \\ \mathbb{Z}^{m-1} & i = 2, \\ 0 & i > 2. \end{cases}$$

(2) La proposizione precedente poteva dedursi dal seguente risultato classico (cfr. [S]), la *dualità di Alexander*. *Se $A \neq \emptyset$ un poliedro in S^n,*

$$\widetilde{H}^k(A) \cong \widetilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus A)$$

ove $\widetilde{H}_*$, $\widetilde{H}^*$ sono gruppi di omologia e coomologia ridotta.

Discutiamo più in dettaglio le nozioni di meridiano e parallelo, con particolare riguardo alla loro "canonicità ". Sia U un toro solido, cioè uno spazio topologico omeomorfo a $S^1 \times D^2$; un omeomorfismo $h : S^1 \times D^2 \to U$ si dice *framing* di U.

Definizioni 4.1.3. *Un meridiano di U è una curva chiusa semplice $\mathfrak{m}$ in ∂U non omotopa a zero in ∂U che verifica una delle seguenti condizioni equivalenti:*

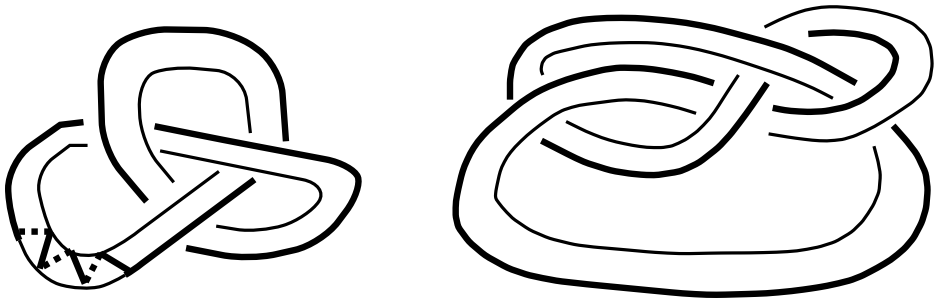
(1) $[\mathfrak{m}] = 0$ *in* $H_1(U)$.
(2) $[\mathfrak{m}] = 0$ *in* $\pi_1(U)$.
(3) $\mathfrak{m}$ *borda un disco in* U.
(4) *Esiste un framing* $h : S^1 \times D^2 \to U$ *tale che* $\mathfrak{m} = h(1 \times \partial D^2)$.

Un parallelo di U è una curva chiusa semplice $\mathfrak{l}$ in ∂U che verifica una delle seguenti condizioni equivalenti:

(1) $[\mathfrak{l}]$ *è un generatore di* $H_1(U) \cong \pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$.
(2) $\mathfrak{l}$ *interseca trasversalmente in un solo punto qualche meridiano di* U.
(3) *Esiste un framing* $h : S^1 \times D^2 \to U$ *tale che* $\mathfrak{l} = h(S^1 \times 1)$.

Ora, soltanto la nozione di meridiano è ben definita a meno di isotopia in U: i paralleli sono tutti omeomorfi tramite un omeomorfismo di U ma non necessariamente isotopi in U. Dati infatti $\mathfrak{m}$,$\mathfrak{l}$ come sopra e fissato $k \in \mathbb{N}$, sia $\mathfrak{a} = k\mathfrak{m}+\mathfrak{l}$; allora $\mathfrak{a}$ è un parallelo perchè $[\mathfrak{a}] = [\mathfrak{l}] = \pm 1$, ed è chiaramente non isotopo ad $\mathfrak{l}$.

Se consideriamo però un toro solido U *immerso* in S^3 esiste una scelta canonica a meno di isotopia di U del parallelo $\mathfrak{l}$ di U: basta richiedere che $\mathfrak{l}$ sia omologicamente banale in $\overline{S^3 \setminus U}$. In particolare, nel caso del complementare di un intorno tubolare di un nodo K possiamo legittimamente parlare *del* parallelo e del meridiano di K. In termini di linking number (cfr. §5.1) ciò equivale alla relazione $lk(\mathfrak{l}\ , K) = 0$ in S^3. Osserviamo che la scelta canonica del parallelo può non essere quella intuitivamente più naturale; questa eventualità è chiaramente illustrata dall'esempio del trifoglio (figura a sinistra; a destra è disegnato il parallelo canonico del nodo otto):



Per quanto riguarda l'omotopia, studieremo in dettaglio la struttura di $\pi_1(C)$: i gruppi di omotopia superiore non sono interessanti in virtù del seguente risultato, che segue facilmente da profondi risultati sulle 3-varietà (cfr. [H]).

Teorema 4.1.4. *Sia U un intorno tubolare di un nodo K in S^3; sia poi $C = \overline{S^3 \setminus U}$. Allora $\pi_n(C) = 0\ \forall n \geq 2$.*

Corollario 4.1.5. *$\pi_1(S^3 \setminus K_1) \cong \pi_1(S^3 \setminus K_2)$ se e solo se $S^3 \setminus K_1$ e $S^3 \setminus K_2$ hanno lo stesso tipo di omotopia.*

Dim. Useremo in modo cruciale il seguente *teorema della sfera*:

Sia M una 3-varietà orientabile e $H \neq \pi_2(M)$ un sottogruppo $\pi_1(M)$-invariante di $\pi_2(M)$ allora esiste un embedding $g : S^2 \to M$ la cui classe di omotopia non appartiene ad H.

Supponiamo per assurdo che sia $\pi_2(C) \neq 0$; applicando il teorema della sfera con $H = \{1\}$ deduciamo l'esistenza di una 2-sfera p.l. S immersa in C non omotopa a zero. Per il teorema di Schoenflies p.l. S divide S^3 in due 3-palle B_1, B_2, di cui è bordo comune. Poichè K è connesso risulterà , ad esempio, $K \subset B_2$; allora S è omotopa a zero in B_1 e a fortiori in $C \supset B_1$, contraddizione.

Per concludere che $\pi_n(C) = 0 \ \forall n \geq 3$ consideriamo il rivestimento universale $\tilde{C}$ di C; osserviamo che tale spazio § non è compatto, poichè in caso contrario ogni fibra del rivestimento universale sarebbe finita di cardinalità pari all'ordine di $\pi_1(C)$; d'altronde, è immediato dedurre da 4.1.2 che $\pi_1(C)$ è sempre infinito. Risulta $H_i(\tilde{C}) = 0, \forall i \geq 1$: ciò segue per $i = 1$ dal fatto che $\tilde{C}$ è semplicemente connesso, per $i = 2$ da $\pi_2(C) = 0$ e dal teorema di Hurewicz ([S]), per $i = 3$ dal fatto che $\tilde{C}$ non è compatto e per $i > 3$ dal fatto che $\tilde{C}$ è una 3-varietà (e quindi ha omologia banale in grado maggiore di 3). In particolare l'omomorfismo di Hurewicz $h_i : H_i(\tilde{C}) \longrightarrow \pi_i(\tilde{C})$ è un isomorfismo e quindi $\pi_i(\tilde{C}) = 0 \ \forall i \geq 1$.

Considerando la successione esatta di omotopia della fibrazione $\tilde{C} \longrightarrow C$ possiamo dedurre $\pi_n(C) = 0 \ \forall n \geq 2$ come volevamo.

Il corollario segue direttamente dal teorema di Whitehead. □

Osservazione. Il teorema è falso per i links; come controesempio basta considerare il link banale a m componenti L_m: si provi infatti per esercizio che il complementare di L_m ha il tipo di omotopia dello wedge $mS^1 \vee (m-1)S^2$.

§4.2 Il gruppo fondamentale del complementare di un nodo.

Passiamo ad esaminare $\pi_1(C)$, che chiameremo *gruppo del nodo*; la discussione seguente vale con ovvie modifiche anche nel caso dei links. Osserviamo inoltre che se $p \in C$, allora $\pi_1(C, p) \cong \pi_1(S^3 \setminus K, p)$ - l'isomorfismo è indotto dall'inclusione -. Essendo principalmente interessati alla classe di isomorfismo del gruppo fondamentale, ed essendo i complementari dei nodi spazi connessi per archi, ometteremo il punto base nella notazione.

Lo strumento basilare per calcolare il gruppo fondamentale è il teorema di Seifert-Van Kampen, che richiamiamo di seguito nella forma in cui sarà più frequentemete usato (cfr. [Ma]).

Teorema 4.2.1. *Sia X uno spazio topologico e siano X_1, X_2 sottospazi aperti di X connessi per archi tali che $X = X_1 \cup X_2$ e $X_0 := X_1 \cap X_2$ è non vuoto e connesso per archi. Siano poi $G_i, i = 0, 1, 2$, G i gruppi fondamentali di $X_i, i = 0, 1, 2$, X rispettivamente (riferiti ad un fissato punto base in X_0). Siano infine $i_j : X_0 \hookrightarrow X_j$, $j = 1, 2$ le inclusioni naturali.*

Se $(x_1, \dots ; r_1 \dots)$, $(y_1, \dots ; s_1 \dots)$, $(z_1, \dots ; t_1 \dots)$ sono presentazioni per G_i, $i = 0, 1, 2$ rispettivamente, allora

$$(x_1, \dots , y_1, \dots ; r_1 \dots , s_1 \dots , (i_1)_*(z_1) = (i_2)_*(z_1), \dots)$$

è una presentazione per G.

Esercizio. *([Ma], Prop. 6.2). Sia $K_{p,q}$ un nodo torale . Si provi usando il teorema precedente che*

$$\pi_1(S^3 \setminus K_{p,q}) \cong (x, y;\, x^p = y^q).$$

Lemma 4.2.2.

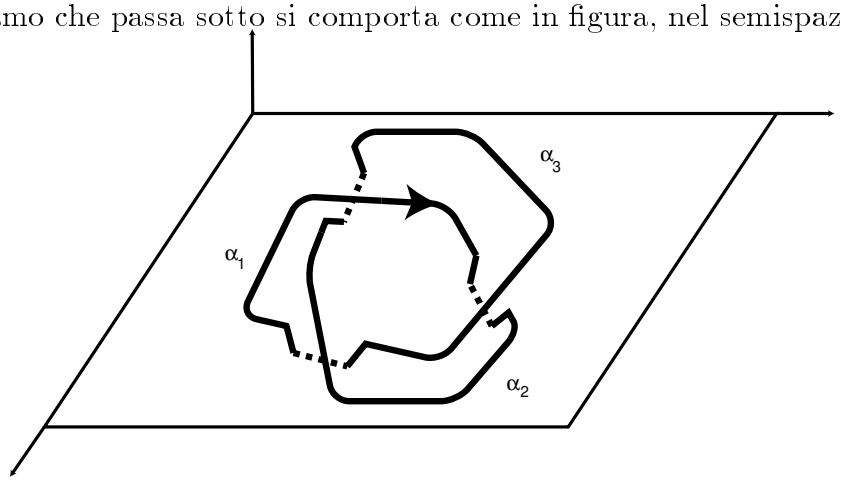
(1) $\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$.
(2) *Se S è un nodo banale,* $\pi_1(S^3 \setminus S) \cong \mathbb{Z}$.

Dim. Riguardiamo S^3 come compattificazione a un punto (∞) di $\mathbb{R}^3$. Sia U un intorno aperto di ∞ omeomorfo a $\mathbb{R}^3$ che non contiene K.
Applichiamo il teorema di Seifert-Van Kampen alla coppia $\mathbb{R}^3 \setminus K, U$: poichè $(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cap U = \mathbb{R}^3 \cap U \approx U - \infty \approx S^2$ è semplicemente connesso, la parte (1) è provata. L'asserzione in (2) segue, ad esempio, dal fatto già osservato che che $S^3 \setminus S$ è omeomorfo a $S^1 \times int(D^2)$. □

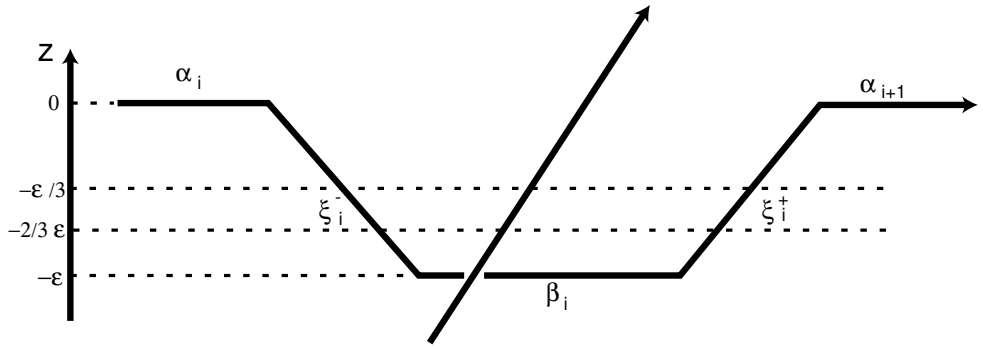
Determineremo ora, in generale, una presentazione per generatori e relazioni di $\pi_1(S^3 \setminus K)$ detta *presentazione di Wirtinger*; tale presentazione è facile da calcolare, ma dipende fortemente dalla proiezione scelta e non evidenzia eventuali simmetrie del nodo. Esistono altre presentazioni notevoli per il gruppo di un nodo: le cosiddette *over* e *under presentations* sono descritte molto dettagliatamente in [CF]; per un approccio al π_1 tramite le decomposizioni di Heegaard si veda [BZ]. Riferiremo i gruppi fondamentali di tutti gli spazi in gioco al punto base $p = (0, 0, 1)$ che possiamo supporre non appartenente a K; consideremo poi una orientazione su K.

Fissiamo $\epsilon > 0$; a meno di isotopia, possiamo assumere quanto segue.

(1) La proiezione ortogonale sul piano xy è regolare con (diciamo) n incroci.
(2) K è contenuto nel piano xy tranne che nell'intorno di ogni incrocio, ove il ramo che passa sotto si comporta come in figura, nel semispazio $z \geq -\epsilon$.



Nel seguito sarà utile suddividere il nodo K con archi chiusi $\alpha_i, \xi_i^{\pm}, \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$ come spiegato in figura. Gli archi α_i sono le componenti connesse di K intersecato con il semispazio chiuso $z \geq -\frac{\epsilon}{3}$, i β_i sono le componenti connesse di K intersecato con il semispazio chiuso $z \leq -\frac{2}{3}\epsilon$, mentre gli $\xi_i^{\pm}$ sono i segmenti (discendenti e ascendenti) di K nella regione residua $-\frac{2}{3}\epsilon \leq z \leq -\frac{\epsilon}{3}$.



Precisamente, se denotiamo con α° la parte interna dell'arco α e poniamo

$$A = \{z > -\frac{2}{3}\epsilon\} \qquad \tilde{B} = \{z < -\frac{\epsilon}{3}\}$$

si ha (con $\xi_0^+ \equiv \xi_n^+$):

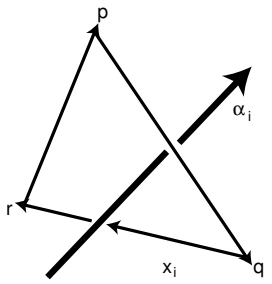
$$A \cap K = \bigcup_{i=1}^{n} \left((\xi_{i-1}^\circ)^+ \cup \alpha_i \cup (\xi_i^\circ)^- \right)$$

$$\tilde{B} \cap K = \bigcup_{i=1}^{n} \left((\xi_i^\circ)^- \cup \beta_i \cup (\xi_i^\circ)^+ \right)$$

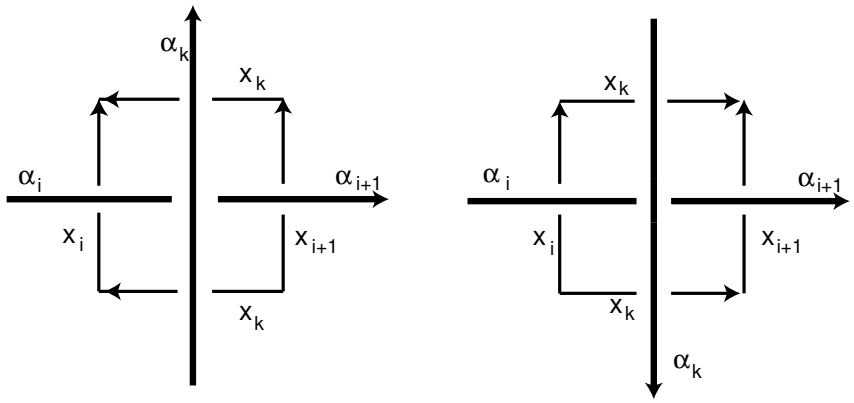
$$A \cap \tilde{B} \cap K = \bigcup_{i=1}^{n} \left((\xi_i^\circ)^- \cup (\xi_i^\circ)^+ \right)$$

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_i \cup \xi_i^- \cup \beta_i \cup \xi_i^+).$$

Denotiamo con x_i il loop "triangolare" orientato disegnato in figura, che parte da p, arriva in q, descrive in arco passando sotto ad α_i fino ad r e torna al punto base.



Ci sono ovvie relazioni tra i loops x_i, che evidenziamo nella figura seguente disegnando schematicamente soltanto la parte del loop x_i che passa "sotto" l'incrocio:



$$x_k x_i = x_{i+1} x_k, \qquad x_i x_k = x_k x_{i+1}.$$

Chiamiamo r_i quella delle due relazioni che vale all'i-esimo incrocio.

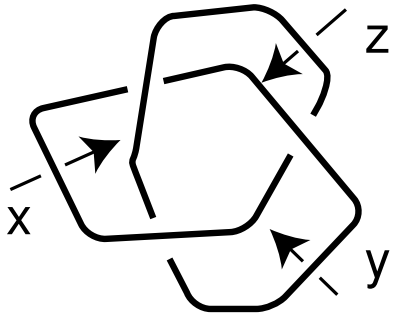
In pratica conviene marcare gli archi connessi del diagramma piano con simboli corrispondenti ai generatori del gruppo e, per ogni incrocio dei due tipi dati, scrivere la corrispondente relazione.

Teorema 4.2.3. *Sia K un link; allora*

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \cong (x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n)$$

Inoltre una qualsiasi delle relazioni r_i può essere omessa.

Esempio $\pi_1(S^3 \setminus T) \cong (x, y, z | xzy^{-1}z^{-1}, yxz^{-1}x^{-1}) \cong (x, y | xyx = yxy)$.



Dim. Useremo il teorema di Seifert-Van Kampen, decomponendo opportunamente il complementare $C = \mathbb{R}^3 \setminus K$ del nodo K. Possiamo servirci dei sottospazi $A, \tilde{B}$ precedentemente introdotti; per ovviare al fatto che il punto base $p \notin \tilde{B}$ consideriamo un arco b congiungente p a $\tilde{B}$ e non intersecante il nodo: fissato $\delta > 0$ definiamo:

$$T = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x, b) < \delta\}$$
$$B = \tilde{B} \cup T$$

e poniamo

$$X = A \setminus K \qquad Y = B \setminus K.$$

X, Y sono aperti connessi per archi in C tali che $C = X \cup Y$ e la cui intersezione è connessa per archi. Analizziamo il gruppo fondamentale di $X, Y, X \cap Y$.

(1) $\pi_1(X)$ è libero su $x_1, \dots, x_n$.

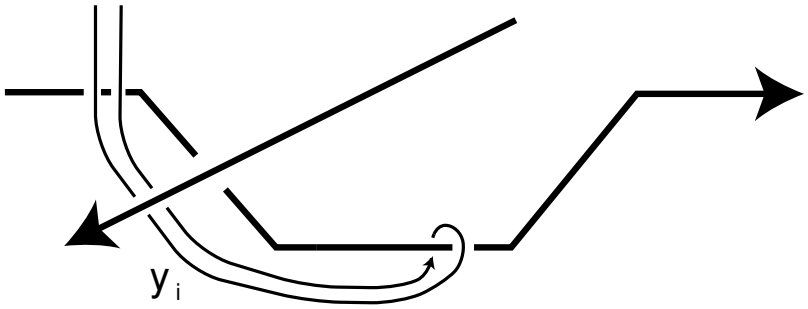
Dalle definizioni è chiaro che X è il semispazio $\{z > -\frac{2}{3}\epsilon\}$ privato degli n archi $(\xi_{i-1}^\circ)^+ \cup \alpha_i \cup (\xi_i^\circ)^-, i = 1, \dots, n$ che iniziano e terminano nel piano $\{z = -\frac{2}{3}\epsilon\}$; è sempre possibile trovare sottospazi aperti semplicemente connessi $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ in $\{z > -\frac{2}{3}\epsilon\}$ tali che

$$\tilde{A}_i \cap K = (\xi_{i-1}^\circ)^+ \cup \alpha_i \cup (\xi_i^\circ)^-$$
$$\cup_{i=1}^n \tilde{A}_i = \{z > -\frac{2}{3}\epsilon\}$$
$$\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j \text{ è semplicemente connesso } \forall\, i, j.$$

Posto allora $A_i := \tilde{A}_i \setminus \left((\xi_{i-1}^\circ)^+ \cup \alpha_i \cup (\xi_i^\circ)^-\right)$ si ha che $\pi_1(A_1)$ è ciclico infinito generato da x_1. Applicando induttivamente il teorema di Van Kampen, $\pi_1(\cup_{i=1}^k A_i)$ è libero generato da $x_1, \dots, x_k$, poichè $(\cup_{i=1}^{k-1} A_i) \cap A_k$ è semplicemente connesso. La tesi segue ora dal fatto che, per costruzione, $\cup_{i=1}^n A_i = X$.

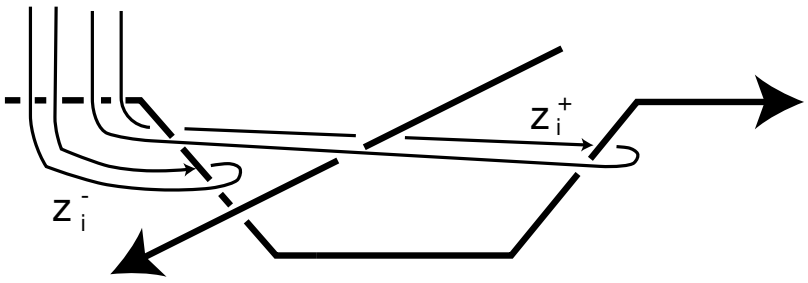
(2) $\pi_1(Y)$ è libero su n generatori.

Essendo Y il complementare in B degli n archi $(\xi_i^\circ)^- \cup \beta_i \cup (\xi_i^\circ)^+, i = 1, \dots, n$ si può ragionare come nel punto (1). Osserviamo poi che se y_i denota il loop disegnato in figura, $y_1, \dots, y_n$ sono generatori liberi di $\pi_1(Y)$.



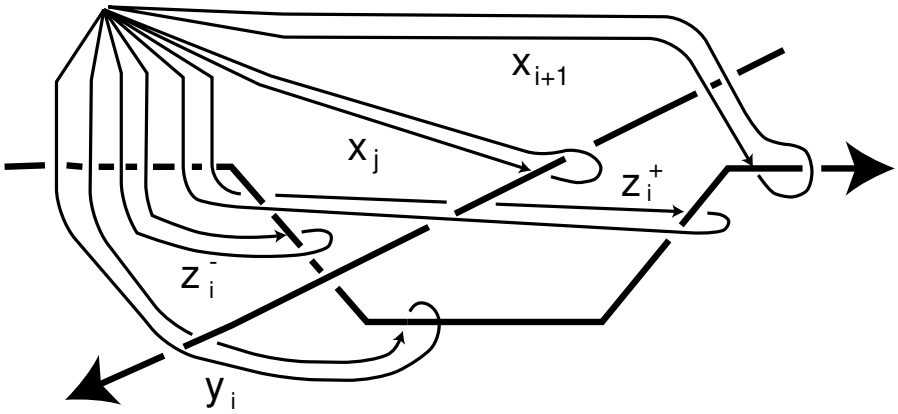
(3) $\pi_1(X \cap Y)$ è libero su $2n$ generatori

L'asserto segue dal fatto che $X \cap Y$ è il complementare in $\{-\frac{2}{3}\epsilon < z < -\frac{\epsilon}{3}\}$ dei $2n$ archi $(\xi_i^\circ)^\pm, i = 1, \dots, n$; non è difficile provare che se denotiamo con z_i^- il loop in $X \cap Y$ che allaccia semplicemente $(\xi_i^\circ)^-$ e con z_i^+ quello che allaccia $(\xi_i^\circ)^-$ e $(\xi_i^\circ)^+$ come in figura, allora $z_i^\pm, i = 1, \dots, n$ sono generatori liberi per $\pi_1(X \cap Y)$.



A questo punto possiamo concludere grazie al teorema di Van Kampen osservando che se $i : X \cap Y \to X$, $j : X \cap Y \to Y$ sono le inclusioni naturali, risulta, per $i = 1, \dots, n$:

$$i_*(z_i^-) = x_i \qquad i_*(z_i^+) = r_i$$
$$j_*(z_i^-) = y_i \qquad i_*(z_i^+) = 1.$$



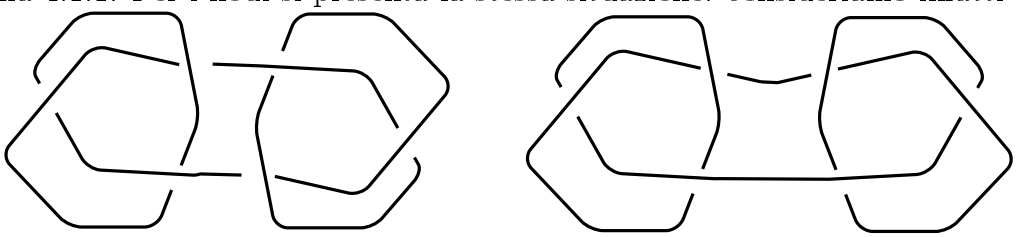
Resta da provare l'ultima asserzione dell'enunciato. Per la parte (1) del lemma precedente possiamo equivalentemente lavorare in $S^3 = \mathbb{R}^3 + \infty$.

Siano $X' = (A' \setminus K) + \infty$, $Y' = (B' \setminus K) + \infty$. Allora

$$X \cup Y = S^3 \setminus K, \quad \pi_1(X') \cong \pi_1(X), \quad \pi_1(Y') \cong \pi_1(Y).$$

D'altronde $X' \cap Y'$ ha il tipo di omotopia di una 2-sfera privata di $2n$ archi, quindi $\pi_1(X' \cap Y')$ è libero su $2n-1$ generatori (mentre $\pi_1(X \cap Y)$ è libero su $2n$ generatori): ne segue che, fissata comunque una relazione r_i, essa è conseguenza delle altre. □

Osservazioni. **(1)** Il gruppo fondamentale non è un invariante completo: per i links abbiamo implicitamente già visto un esempio di ciò nella discussione che segue il teorema 4.1.1. Per i nodi si presenta la stessa situazione: consideriamo infatti



Si ha $\pi_1(S^3 \setminus K_1) \cong \pi_1(S^3 \setminus K_2) \cong (x, y, z \,|\, xyx = yxy, xzx = zxz)$ (dimostrazione via teorema di Wirtinger; più elementarmente si osserva che K_1, K_2 sono rispettivamente somma connessa di due trifogli destri e di un trifoglio destro con uno sinistro. Dato che abbiamo già determinato il gruppo di un trifoglio, per concludere basta applicare il teorema di Seifert-Van Kampen ai complementari). D'altronde i nodi in esame sono inequivalenti: lo proveremo in 5.1.10 considerandone la segnatura.

Per i nodi primi vale il seguente "teorema di rigidità " di Whitten [Wh]: *nodi primi aventi gruppi isomorfi hanno complementari omeomorfi.* Combinando tale risultato con il teorema 4.1.1 possiamo concludere quanto segue.

Teorema 4.2.4. *Siano K_1, K_2 nodi primi; allora $\pi_1(S^3 \setminus K_1) \cong \pi_1(S^3 \setminus K_2)$ se e solo se esiste un omemorfismo $f : S^3 \to S^3$ tale che $f(K_1) = K_2$.*

(2) Il gruppo fondamentale distingue i nodi banali; vale cioè il seguente

Teorema 4.2.5. *K è banale se e solo se $\pi_1(S^3 \setminus K) = \mathbb{Z}$.*

Dim. Una implicazione è stata provata nel lemma precedente; l'altra è una conseguenza quasi immediata del lemma di Dehn-Papakyriakopulos (cfr. [H]): *Sia γ è una curva chiusa semplice contenuta nel bordo di una 3-varietà M; se γ è omotopicamente banale in M, allora borda un disco propriamente immerso in M.*

Sia U un intorno tubolare di K ed $\mathfrak{l}$ il parallelo canonico di U; essendo, per definizione, omologicamente banale in $S^3 \setminus K \approx S^3 \setminus U^\circ$, ($U^\circ \equiv int(U)$), $\mathfrak{l}$ è anche omotopicamente banale in $S^3 \setminus U^\circ$. Applicando il lemma di Dehn al loop $\mathfrak{l}$ nel bordo ∂U della 3-varietà $S^3 \setminus U^\circ$, deduciamo l'esistenza di un disco δ in $S^3 \setminus U^\circ$ che borda $\mathfrak{l}$; se ora consideriamo un anello A in U tale che $\partial A = K \cup \mathfrak{l}$, possiamo concludere che $\delta \cup A$ è un disco in S^3 che borda K e che dunque K è banale. □

Chiudiamo questo paragrafo deducendo un'altra presentazione per generatori e relazioni del gruppo di un nodo K a partire da una sua rappresentazione come chiusura di una treccia $b \in B_n$; ricordiamo (cfr. 3.3) che il gruppo delle trecce può riguardarsi come sottogruppo degli automorfismi del gruppo libero F_n.

Sia $b \in B_n$ e K il link ottenuto per chiusura da b; supponiamo che l'azione (destra) di b su F_n sia data da $x_i.b = A_i x_{\mu_i} A_i^{-1}$, $1 \leq i \leq n$ (cfr. §3.3).

Teorema 4.2.7. *$\pi_1(S^3 \setminus K)$ ammette una presentazione con generatori $y_1, \ldots, y_n$ e relazioni*

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \cong (y_1, \ldots, y_n | A_i(y_1, \ldots, y_n) y_{\mu_i} A_i^{-1}(y_1, \ldots, y_n) y_i^{-1} \ 1 \leq i \leq n-1).$$

Dim. Interpretiamo, come in 3.3.2, B_n come gruppo degli automorfismi del gruppo fondamentale di un disco n-puntato $D \setminus \mathcal{P}_n$ indotti da omeomorfismi che fissano il bordo. Dato $b \in B_n$, sia esso indotto da $\beta : D \setminus \mathcal{P}_n \to D \setminus \mathcal{P}_n$; sia $T_b := (D \setminus \mathcal{P}_n) \times [0,1] / \sim$ ove la relazione $\sim$ identifica $(z,1)$ e $(\beta(z),0)$. T_b è il complementare nel toro solido $T := D \times [0,1] / \approx$ ($\approx$ identifica $(z,0)$ e $(z,1)$) del link K ottenuto per chiusura da b. Per come è definito, T_b si fibra su S^1 con fibra $D \setminus \mathcal{P}_n$, e la successione esatta della fibrazione dà luogo a una successione esatta corta

$$1 \to \pi_1(D \setminus \mathcal{P}_n) \to \pi_1(T_b) \to \pi_1(S^1) \to 1$$

dal momento che $D \setminus \mathcal{P}_n$ è connesso per cammini e $\pi_2(S^1) = 0$.

Siano $y_1, \ldots, y_n$ le immagini di $x_1, \ldots, x_n$ nell'immersione di $\pi_1(D \setminus \mathcal{P}_n) = \pi_1((D \setminus \mathcal{P}_n) \times \{0\}) \hookrightarrow \pi_1(T_b)$. Sia t un parallelo di T rappresentato da $z \times [0,1]$, $z \in \partial D$; si noti che t è anche un sollevamento di un generatore di $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ a $\pi_1(T_b)$. Dalla precedente successione esatta deduciamo che $\pi_1(T_b)$ è prodotto semidiretto di $\pi_1(D \setminus \mathcal{P}_n)$ e $\pi_1(S^1)$; in particolare $\pi_1(T_b)$ ammette la seguente presentazione: generatori $y_1, \ldots, y_n, t$ e relazioni (cfr. 3.3.1):

$$t y_i t^{-1} = A_i(y_1, \ldots, y_n) y_{\mu_i} A_i^{-1}(y_1, \ldots, y_n) \quad 1 \leq i \leq n.$$

Per ottenere dalla precedente una presentazione per il complementare di K in S^3 applichiamo ora il teorema di Van-Kampen alla coppia T_b, $S^3 \setminus T$; più precisamente

sia T' un toro solido tale che $int(T) \equiv T^\circ \supset T' \supset K$. Poniamo $T_b^\circ := T^\circ \setminus K$. Allora $\pi_1(T_b) \cong \pi_1(T_b^\circ)$ e T_b°, $S^3 \setminus T'$ sono aperti connessi per archi in $S^3 \setminus K$; inoltre:

(1) $S^3 \setminus K = T_b^\circ \cup (S^3 \setminus T')$.

(2) $T_b^\circ \cap (S^3 \setminus T') = T^\circ \setminus T'$.
In particolare, $\pi_1(T_b^\circ \cap (S^3 \setminus T')) = \mathbb{Z}m \times \mathbb{Z}l \cong \pi_1(A^\circ \times S^1)$ ove A è un anello e m, l sono rispettivamente un meridiano e un parallelo di un toro $\mathcal{T}$, $T^0 \supset \mathcal{T} \supset T'$.

(3) $\pi_1(S^3 \setminus T') = \mathbb{Z}s$, s essendo un "meridiano" in $S^3 \setminus T'$.

(4) Se $i_1 : T_b^\circ \cap (S^3 \setminus T') \hookrightarrow T_b^\circ$, $i_2 : T_b^\circ \cap (S^3 \setminus T') \hookrightarrow S^3 \setminus T'$ sono le inclusioni naturali, si ha:

$$(i_1)_*(l) = 1 \quad (i_1)_*(m) = s \quad (i_2)_*(l) = t \quad (i_2)_*(m) = y_1 y_2 \dots y_n.$$

In definitiva otteniamo per $\pi_1(S^3 \setminus K)$ la presentazione seguente:

$$\begin{array}{ll} \text{generatori} & y_1, \dots, y_n, t, s \\ \text{relazioni} & t y_i t^{-1} = A_i(y_1, \dots, y_n) y_{\mu_i} A_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) \quad 1 \le i \le n \\ & t = 1 \qquad s = y_1 y_2 \dots y_n. \end{array}$$

Non è difficile vedere che questa presentazione può ridursi a quella descritta nello enunciato della proposizione. Infine una delle relazioni (ad esempio la n-esima), è conseguenza delle altre dal momento che $(y_1 \dots y_n).b = y_1 \dots y_n$ (cfr. 3.3.2). □

§5 Il polinomio di Alexander

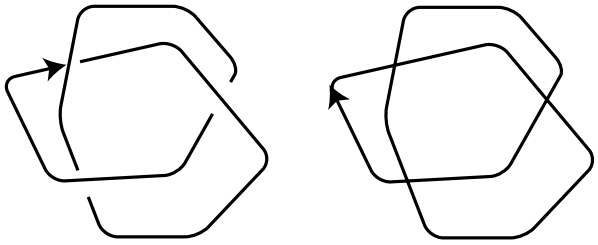
§5.1 Superfici di Seifert e forme di intersezione.

Abbiamo visto in §4 che l'omologia del complementare di un nodo è indipendente dall'embedding mentre l'omotopia è "concentrata" nel gruppo fondamentale, che è peraltro molto difficile da calcolare esplicitamente. È naturale allora pensare di associare ad un nodo un oggetto topologico la cui omologia dia informazioni sul nodo. Questa discussione motiva la seguente definizione. Dato un nodo K, una superficie compatta connessa orientabile immersa in S^3 il cui bordo coincide con K si dice *superficie di Seifert* per K. Di seguito dimostriamo che ogni nodo ammette una superficie di Seifert S e che a partire da una opportuna forma bilineare su $H_1(S)$ è possibile introdurre il polinomio di Alexander. Nella prossima sezione proviamo fra l'altro che tramite S si possono costruire *esplicitamente* dei rivestimenti canonici del complementare del nodo la cui omologia è un invariante del nodo stesso.

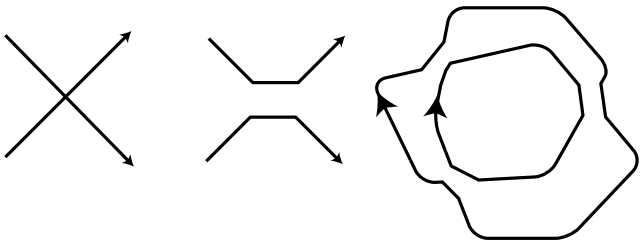
Teorema 5.1.1. *Dato un link orientato K esiste una superficie di Seifert per K.*

Dim. La dimostrazione è costruttiva: descriviamo l'algoritmo di Seifert, che produce una superficie con le proprietà enunciate a partire da un diagramma di K. Supponiamo preliminarmente che K sia un nodo.

(1) Dato un diagramma di K, consideriamo la proiezione associata.

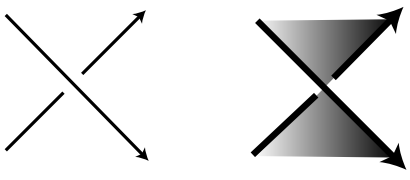


(2) Spezziamo la proiezione in ogni punto doppio come descritto nella figura,



ottenendo un insieme di curve chiuse orientate (dette cicli di Seifert), che a meno di isotopie di diagrammi possiamo assumere disgiunte.

(3) Se ci sono cicli uno dentro l'altro, solleviamoli in piani diversi a partire dal ciclo più interno; incolliamo poi un disco ad ogni ciclo. Ripristiniamo il bordo originario agli incroci con rettangoli half-twisted, attaccate come in figura



(se non considerassimo i cicli orientati, avremmo anche un'altra possibilità di incollamento, che potrebbe però dar luogo a una superficie non orientabile: per convincersene si analizzi l'esempio del trifoglio).

Se ora K è un link, basta modificare il diagramma di K in modo tale che la proiezione sia connessa: allora il procedimento precedente può applicarsi senza variazioni. □

Osservazioni.

(1) Il genere di una superfice di Seifert per un nodo (link) K non è univocamente determinato (si possono "aggiungere" e "togliere" manici senza alterare il bordo); per tale motivo si definisce il *genere $g(K)$ di un nodo K* come il minimo genere di una superficie di Seifert per K. È chiaro che $g(K)$ è un invariante di isotopia. Per definizione, *un nodo K è banale se e solo se* $g(K) = 0$; inoltre *i nodi di genere 1 sono primi.* Quest'ultima asserzione è conseguenza dell'additività del genere rispetto alla somma connessa: dati due nodi K, K'

$$g(K) + g(K') = g(K\#K').$$

Per la dimostrazione si veda [R], 5.A.14. In particolare possiamo nuovamente dedurre (cfr. 1.3.9) il fatto che se $K\#K'$ è banale, tali sono K, K'.

(2) Come sarà evidente dal prossimo esempio, nel caso di un link a più componenti un cambiamento di orientazione può addirittura cambiare il genere della superficie costruita tramite l'algoritmo di Seifert.

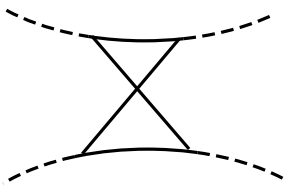
Sia D un diagramma con proiezione connessa di un link K a μ componenti: è possibile calcolare direttamente il genere della superficie di Seifert F costruita a partire da K tramite l'algoritmo precedentemente descritto. Supponiamo che nell'algoritmo di Seifert si formino c cicli e si debbano attaccare r rettangoli (in altri termini, che il diagramma abbia r incroci); allora si ha:

$$g(F) = 1 - \frac{1}{2}(c + \mu - r).$$

Dall'algoritmo di Seifert segue che F può descriversi come un complesso i cui vertici sono i quattro vertici di ogni rettangolo, i lati sono le curve poligonali costituite dai lati dei rettangoli e dai bordi dei dischi tra un vertice e l'altro; infine le facce sono i dischi e i rettangoli. Se m_k, $k = 0, 1, 2$ è il numero di k-celle del complesso risultante, si ha

$$m_0 = 4r, \quad m_1 = 6r, \quad m_2 = r + c.$$

Per calcolare m_1, consideriamo un rettangolo R:



Il contributo di R alle 1-celle è costituito dai due lati del rettangolo, dai due bordi dei dischi compresi tra i vertici di R e dai quattro lati tratteggiati; questi ultimi però

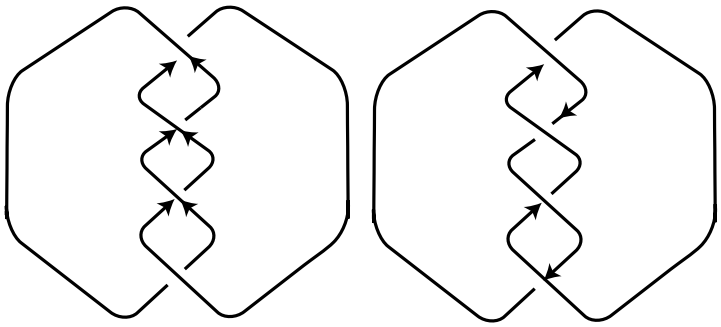
vengono contati esattamente due volte, al variare di R: si ha pertanto $m_1 = 6r$, come si voleva. Sia χ la caratteristica di Eulero-Poincare' di F, che è la usuale caratteristica di Eulero della superficie senza bordo ottenuta da F incollando un disco ad ogni componente di bordo; si ha allora

$$m_0 - m_1 + m_2 = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i dim\, H_i(F) = \chi(F) = 1 - (2g(F) + \mu - 1),$$

da cui si ottiene immediatamente quanto si voleva.

È noto che il genere così calcolato è effettivamente il genere del nodo per una classe di nodi comprendente i nodi torali e i nodi alterni (cfr. [K2]).

Esempio. Consideriamo il link torale $K_{2,4}$; ci sono due possibili orientazioni per $K_{2,4}$:



Per il link di destra si ha $r = 4,\ c = 4$, dunque $g = 0$; per quello di sinistra risulta $r = 4,\ c = 2$, pertanto $g = 1$.

Vogliamo costruire un invariante di K a partire da una superficie di Seifert per K. A tale scopo dobbiamo essere in grado di controllare come cambia la superficie di Seifert al variare di K per isotopia ambientale; ciò è il contenuto del seguente teorema.

Teorema 5.1.2. *[L] Siano K, K' links isotopi e F, F' superfici di Seifert per K, K'; allora F è equivalente a F' rispetto alla relazione di equivalenza generata da:*

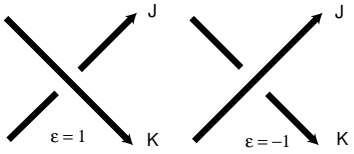
(1) *isotopie ambientali.*
(2) *0-chirurgie: se α è una curva su F che borda un disco in $S^3 \setminus F$, si rimuove $\alpha \times [0,1]$ da F e si incolla un disco a $\alpha \times \{0\}$, $\alpha \times \{1\}$ rispettivamente.*
(3) *1-chirurgie: si rimuovono due dischi D_0, D_1 da F e si incolla ad F un manico $S^1 \times [0,1]$, immerso in S^3, identificando ∂D_i con $S^1 \times \{i\}$, $i = 0, 1$.*

La relazione di equivalenza descritta, detta *s-equivalenza*, è estremamente complessa; fortunatamente, le informazioni necessarie a definire il polinomio di Alexander a partire da F sono "contenute" in una forma bilineare su $H_1(F)$ che cambia per s-equivalenza in modo facilmente controllabile.

Definizione 5.1.3. *Siano, J, K due nodi orientati in S^3. Consideriamo una proiezione regolare di $J \cup K$. Definiamo*

$$lk(J,K) = \frac{1}{2} \sum_{p \in J \cap K} \varepsilon(p)$$

ove il segno $\varepsilon(p)$ ad ogni incrocio p è attribuito come segue:



È facile vedere che questa definizione è ben posta, cioè indipendente dalla proiezione: basta verificare (esercizio) l'invarianza per mosse di Reidemeister. Peraltro esistono definizioni più intrinseche per il linking number: ad esempio, scelto un generatore ξ per $H_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$, se $[J] = n\xi$ è la classe di omologia definita da J in $S^3 \setminus K$, risulta $lk(J,K) = n$. Alternativalmente, possiamo riguardare J come un loop in $S^3 \setminus K$; se $\pi : \pi_1(S^3 \setminus K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ è l'abelianizzazione, si ha $\pi(J) = n = lk(J,K)$. Dato che π è esattamente l'omomorfismo di Hurewicz, le due ultime due definizioni introdotte coincidono; per l'equivalenza con la definizione combinatoria e per altre caratterizzazioni del linking number si veda [R], 5.D; vogliamo solo ricordare un'espressione integrale del linking number, dovuta a Gauss:

$$lk(J,K) = \frac{1}{4\pi} \int_J \int_K \frac{(x'-x)d(yz) + (y'-y)d(xz) + (z'-z)d(xy)}{\left((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\right)^{3/2}}.$$

L'integrale di Kontsevich, che sarà introdotto in §8, può riguardarsi come una generalizzazione di questa formula integrale.

Definizione 5.1.4. *Sia F una superficie orientata immersa in S^3. Definiamo la forma di Seifert $\theta : H_1(F) \times H_1(F) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ponendo $\theta(a,b) = lk(a^+, b)$, a^+ essendo la curva chiusa che si ottiene sollevando di poco a in $S^3 \setminus F$ nella direzione normale positiva ad F.*

Osservazione. È chiaro che θ è una forma bilineare. Non è difficile vedere che se $a \cdot b$ è la usuale forma di intersezione[9] di due 1-cicli a, b su F vale la relazione

$$\theta(a,b) - \theta(b,a) = a \cdot b.$$

Infatti, tenendo conto della simmetria del linking number e utilizzando, nell'ultima uguaglianza, la definizione della forma di intersezione, si ha:

$$\begin{aligned} \theta(a,b) - \theta(b,a) &= lk(a^+, b) - lk(b^+, a) = lk(a^+, b) - lk(a, b^+) \\ &= lk(a^+, b) - lk(a^-, b) = lk(a^+ - a^-, b) = a \cdot b. \end{aligned}$$

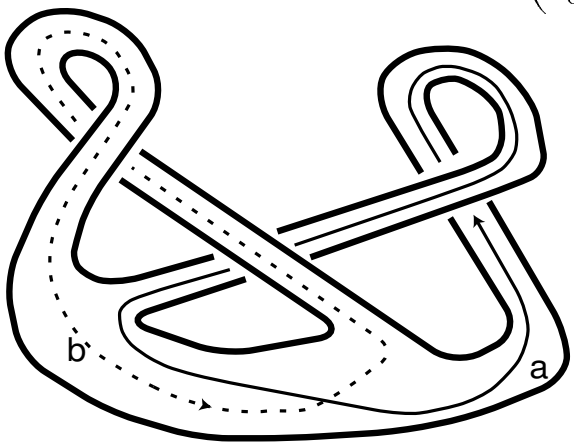
(a^- è il sollevamento di a in $S^3 \setminus F$ nella direzione normale negativa ad F). È possibile caratterizzare le "matrici di Seifert", ossia le matrici V che rappresentano in una qualche base la forma di Seifert (cfr.[BZ], prop. 8.7): se $V \in M(n, \mathbb{Z})$, occorre e basta che n sia pari[10] e che $V - V^t$ sia congruente tramite una matrice unimodulare a una matrice a blocchi del tipo $\bigoplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Osservando che $V - V^t$ è una matrice antisimmetrica deduciamo il seguente criterio.

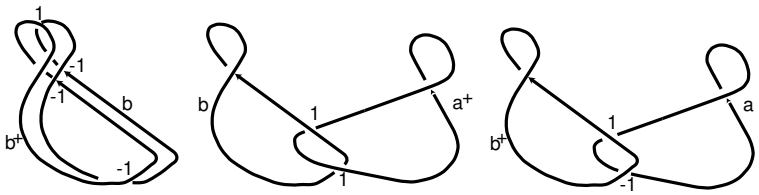
[9] La forma $x \cdot y$ è definita scegliendo per gli 1-cicli orientati x, y due rappresentanti che si intersecano trasversalmente, assegnando ad ogni loro intersezione peso $+1$ (risp. -1) se un osservatore posto nella direzione normale positiva vede x ruotare su y in senso orario (risp. antiorario), ed infine sommando tali pesi.

[10] Nel caso di un link a μ componenti, $\frac{n-\mu+1}{2}$ deve essere un intero non negativo.

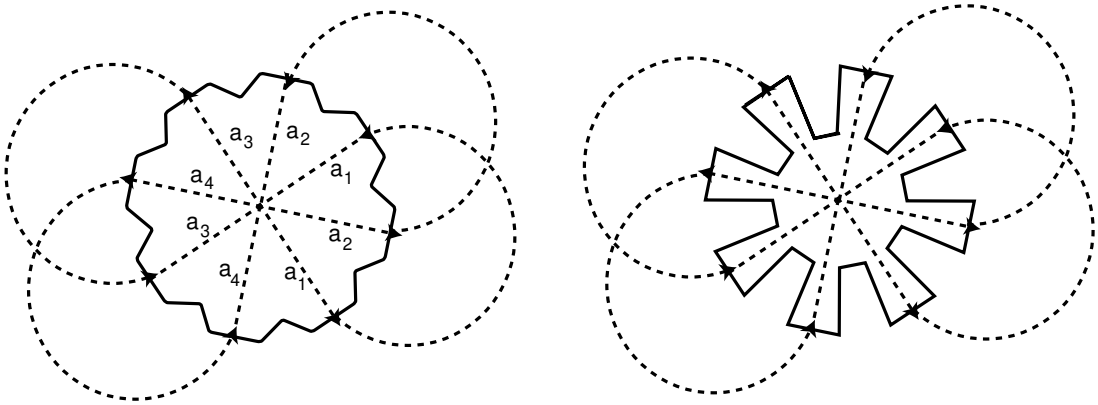
Teorema 5.1.5. *Una matrice quadrata V è una matrice di Seifert se e solo se* $\det(V - V^t) = 1$.

Esempio. Consideriamo il caso del trifoglio (destro): calcoliamo la forma di Seifert θ tramite la seguente superficie in "forma normale". Rispetto alla base dell'omologia costituita dai cicli (orientati) a, b, la matrice di θ è $[\theta] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Infatti



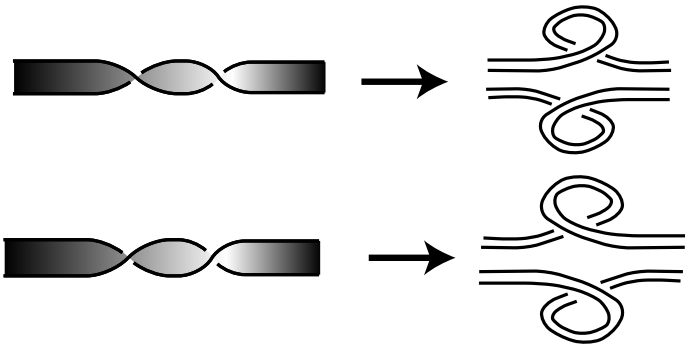


Una matrice della forma di Seifert può sempre leggersi direttamente su una particolare superficie di Seifert come quella disegnata precedentemente.
Sia F una qualsiasi superficie di genere g con una componente di bordo; F può retrarsi isotopicamente, come mostrato dalla figura seguente, su un modello formato da un disco con $2g$ nastri (cfr. [Ma], [F1]).



Si può dimostrare che un embedding p.l. di F in $\mathbb{R}^3$ può estendersi a un'isotopia dell'intero spazio, pertanto ogni classe di isotopia di embeddings di F contiene un rappresentante canonico di questo tipo; naturalmente, i nastri possono essere annodati, twistati e tra loro allacciati. Diciamo che le curve chiuse orientate $a_1, \ldots, a_{2g}$ costituiscono un sistema canonico su F se tagliando la superficie lungo di esse si ottiene un disco; evidentemente $H_1(F) \cong \oplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z} a_i$.

Sia ora F una superficie di Seifert per un nodo K; poichè F è orientabile, ogni nastro ha un numero pari di twists, pertanto possiamo deformare ulteriormente il modello canonico di F come mostrato in figura rimpiazzando sui nastri un twist di 2π con un "loop" del nastro:



Su una superficie di Seifert "normalizzata" in questo modo l'elemento θ_{ij} della matrice di Seifert è semplicemente il numero di volte che il j-esimo nastro, percorso lungo la cuva canonica in senso antiorario, passa sopra all'i-esimo con la convenzione che un passaggio da sinistra verso destra ha segno $+$ e uno da destra a sinistra ha segno $-$.

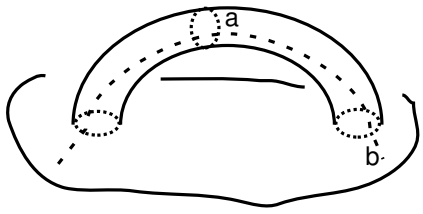
Vogliamo ora analizzare la dipendenza di θ dalla superficie di Seifert scelta per calcolarla; la risposta è fornita dal seguente risultato (che può provarsi anche senza far uso di 5.1.2: cfr. [Mur1], cap. 5).

Proposizione 5.1.6. *Siano, F, F' superfici di Seifert dotate di forme di Seifert θ, θ' rispettivamente. Se F è s-equivalente a F', allora la matrice $[\theta]$ è equivalente a $[\theta']$ secondo la relazione - che chiameremo ancora s-equivalenza - generata da:*

(1) *congruenze unimodulari (i.e. $A \leftrightarrow BAB^t$, $B \in GL(\mathbb{Z})$)*[11].

(2) $\theta \leftrightarrow \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *$\alpha$ essendo un arbitrario vettore riga.*

Dim. L'asserto segue direttamente dal teorema 5.1.2: supponiamo ad esempio che F' sia ottenuta da F per 1-chirurgia e che a, b siano rispettivamente un meridiano per il manico aggiunto e un ciclo che passa una sola volta lungo il manico intersecando semplicemente a.



$$\theta'(a,a) = 0,\ \theta'(a,b) = 1,\ \theta'(b,a) = 0,\ \theta'(a,x) = \theta'(x,a) = 0, \forall\, x \in H_1(F).$$

[11] Questa equivalenza è quella generata dalle operazioni elementari "simmetriche" sulle matrici: effettuare una stessa permutazione su righe e colonne, sommare ad una riga e colonna di stesso indice un multiplo di una riga e colonna di stesso indice.

Se estendiamo tramite $a,\ b$ la base fissata in $H_1(F)$ a una base di $H_1(F')$, otteniamo

$$[\theta'] = \begin{pmatrix} [\theta] & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

che, a meno di un cambiamento di base, è del tipo voluto. Sia infatti $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$; consideriamo la matrice unimodulare $E_{ij}(\lambda) := I_{n+2} + \lambda e_{ij}$ $(i \neq j)$ (e_{ij} è la matrice elementare che ha 1 al posto (i,j) e 0 altrove). Moltiplicando a sinistra $[\theta']$ per $E_{i\,n+1}(-\alpha_i)$ si rimpiazza l'elemento α_i dell'ultima colonna di $[\theta']$ con 0, mentre moltiplicando a destra per $E_{n+1\,i}(-\alpha_i)$ non si altera $[\theta']$. Pertanto operando congruenze con $E_{i\,n+1}(-\alpha_i), i = 1, \dots, n, E_{n+2\,n+1}(-\gamma)$ si modifica $[\theta']$ come si voleva. □

Dati $p(t), q(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, diciamo che $p(t) \doteq q(t)$ se $p(t) = t^h q(t)$, $h \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Corollario-Definizione 5.1.7. *Sia K un nodo orientato e θ una forma di Seifert per K. Il polinomio*

$$\Delta_K(t) = \det(\theta - t\theta^t)$$

è detto polinomio di Alexander di K. Se considerato a meno di potenze di t, Δ_K è un invariante di K.

Dim. Dobbiamo mostrare che Δ_K non cambia (a meno di potenze di t) se θ cambia per s-equivalenza. Sia allora θ' una matrice s-equivalente a θ. Poichè le congruenze unimodulari non cambiano il determinante, possiamo supporre $\theta' = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$; si ha, sviluppando il determinante secondo l'ultima colonna:

$$\begin{aligned} \det\left(\theta' - t\theta'^t\right) &= \begin{vmatrix} \theta - t\theta^t & 0 & -t\alpha^t \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & -t & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} \theta - t\theta^t & 0 \\ \alpha & -t \end{vmatrix} = t\det(\theta - t\theta^t) \doteq \Delta_K(t). \quad \square \end{aligned}$$

Osservazioni.

(1) Un modo di normalizzare il polinomio di Alexander consiste nel richiedere che esso contenga solo potenze positive di t; un modo in un certo senso più intrinseco è quello di definire (cfr. [Mur])

$$\underline{\Delta}_K(t) = t^{\frac{k}{2}} \det(\theta - t\theta^t)$$

se $\theta \in M(k, \mathbb{Z})$: è facile verificare che $\underline{\Delta}$ è un invariante di s-equivalenza.

(2) La definizione ha senso anche nel caso di un link L a $m \geq 1$ componenti; si parla in tal caso – per motivi che sarammo chiariti in §5.5 – di *polinomio di Alexander in una variabile del link L.*

Esempio. Nel caso del trifoglio K abbiamo già visto che una matrice di Seifert è $\theta = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; pertanto $\Delta_K(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ -t & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - t + 1$.

Possiamo adesso provare facilmente alcune notevoli proprietà del polinomio di Alexander:

Proposizione 5.1.8.

(a) $\Delta_K(t) = \Delta_{-K}(t)$.
(b) $\Delta_{K^*}(t) = \Delta_K(t)$.
(c) $\Delta_{K_1 \# K_2}(t) = \Delta_{K_1}(t)\Delta_{K_2}(t)$.

Dim. Per provare (a) e (b) osserviamo che se θ è un matrice di Seifert per K, allora $-\theta^t$, θ^t sono matrici di Seifert per K^*, $-K$ rispettivamente. Infatti nel primo caso un diagramma di K^* si ottiene da un diagramma di K invertendo simultaneamente tutti gli incroci, mentre quello di $-K$ si ottiene invertendo l'orientazione. Dunque:

$$\Delta_{K^*}(t) = \det(-\theta^t + t\theta) = \det(t(\theta - t\theta^t)) \doteq \det(\theta - t\theta^t) = \Delta_K(t)$$
$$\Delta_{-K}(t) = \det(\theta^t - t\theta) = \det((\theta - t\theta^t)^t) = \det(\theta - t\theta^t) = \Delta_K(t)$$

(c) segue dal fatto che se F_1, F_2 sono superfici di Seifert per K_1, K_2 rispettivamente, unendo opportunamente con un nastro F_1 a F_2 si ottiene una superficie di Seifert per $K_1 \# K_2$; la matrice di Seifert relativa a questa superficie è la somma diretta delle matrici relative a F_1, F_2, da cui l'asserto. □

Proposizione 5.1.9. *Δ_K ha le seguenti proprietà :*

(1) $\Delta(t) \doteq \Delta(t^{-1})$.
(2) $\Delta(1) = \pm 1$.

Dim.

$$\det(\theta - t\theta^t) = \det((\theta - t\theta^t)^t) = \det(\theta^t - t\theta) \doteq \det(t^{-1}\theta^t - \theta) \doteq \det(\theta - t^{-1}\theta^t)$$

e (1) è provata. Rimandiamo la dimostrazione di (2) a 5.6.3. □

Osservazione. La proposizione precedente si inverte, nel senso che, dato un polinomio di Laurent p simmetrico (i.e. $p(t) = p(t^{-1})$) e tale che $p(1) = \pm 1$, esiste un nodo K di cui p è il polinomio di Alexander (cfr. [R], §7 C5).

5.1.10. Un altro notevole invariante di che può costruirsi a partire da θ è la *segnatura* di un nodo. Precisamente, sia K un nodo, F una superficie di Seifert per K e θ la matrice della forma di Seifert su F. La matrice $\theta + \theta^t$ è una matrice simmetrica, pertanto possiamo considerarne la segnatura (cioè la differenza tra il numero di autovalori positivi e il numero di autovalori negativi) che definiamo segnatura del nodo. La segnatura è effettivamente un invariante del nodo: è infatti invariante per congruenza ed anche per la relazione 5.1.6 (2):

$$\sigma\begin{pmatrix} \theta+\theta^t & 0 & \alpha^t \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix} \theta+\theta^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma(\theta+\theta^t) + \sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma(\theta+\theta^t).$$

Non è difficile verificare le proprietà seguenti

(1) $\sigma(K_1 \# K_2) = \sigma(K_1) + \sigma(K_2)$.
(2) $\sigma(K^*) = -\sigma(K)$; in particolare un nodo amphicheiral ha segnatura 0.

Osserviamo in particolare che la segnatura permette di distinguere i nodi introdotti nell'osservazione (1) che segue il teorema 4.2.3: nonostante che i nodi abbiano gruppi isomorfi essi sono inequivalenti poiche' quello a sinistra in figura ha segnatura 4 mentre l'altro ha segnatura 0.

§5.2 Il rivestimento ciclico infinito.

In questo e nel prossimo paragrafo K denoterà un nodo: il caso dei links verrà trattato in §5.5.

Denotiamo al solito con X il complementare in S^3 di un nodo K, con G il gruppo fondamentale di X e con $\pi : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'abelianizzazione; ricordiamo da 5.1.3 che π può geometricamente realizzarsi tramite il linking number: $\pi(\alpha) = lk(\alpha, K)$. Osserviamo che $G \cong G' \rtimes \mathbb{Z}$: in particolare, scelto $t \in G$ tale che $\pi(t)$ genera $\mathbb{Z}$ – geometricamente ciò significa che t è un meridiano di K –, l'applicazione $x \mapsto t^{-1}xt$, $x \in G'$ induce una ben definita struttura di $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-modulo su G'/G'' (esercizio).

Sia $p_\infty : C_\infty \longrightarrow X$ il rivestimento di X corrispondente a $Ker(\pi) = G'$. Tenendo conto che il primo gruppo di omologia è isomorfo all'abelianizzato del gruppo fondamentale e ricordando teoremi generali di teoria dei rivestimenti possiamo dedurre la seguente proposizione.

Proposizione 5.2.1.

(1) *p_∞ induce, a livello di gruppi fondamentali, un isomorfismo*

$$(p_\infty)_* : \pi_1(C_\infty) \xrightarrow{\cong} G' \lhd G.$$

(2) *$(p_\infty)_*$ induce un isomorfismo tra gli abelianizzati*

$$\overline{(p_\infty)_*} : H_1(C_\infty) \xrightarrow{\cong} G'/G''.$$

(3) *Il gruppo degli automorfismi del rivestimento C_∞ è ciclico infinito:*

$$Aut(C_\infty) \cong \mathbb{Z}.$$

(4) *C_∞ è il rivestimento abeliano universale di X, ovvero C_∞ riveste ogni rivestimento Y di X tale che $Aut(Y)$ è abeliano.*

Osserviamo che, scelto un generatore t per $Aut(C_\infty) \cong \mathbb{Z}$, t opera su C_∞, dunque $t_* : H_1(C_\infty) \longrightarrow H_1(C_\infty)$ induce una struttura di $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-modulo su $H_1(C_\infty)$.
Il nostro scopo è provare il seguente teorema.

Teorema 5.2.2.

(1) *Le strutture di $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-modulo su $H_1(C_\infty)$, G'/G'' sono equivalenti; precisamente, l'isomorfismo di gruppi $\overline{(p_\infty)_*} : H_1(C_\infty) \xrightarrow{\cong} G'/G''$ è $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-equivariante.*
(2) *$H_1(C_\infty)$ è uno $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-modulo finitamente generato – detto modulo di Alexander di K – una cui matrice di relazioni è $\theta - t\theta^t$.*

La dimostrazione del teorema è basata sulla costruzione esplicita di C_∞; per fare ciò dobbiamo richiamare una tecnica standard di topologia delle 3-varietà detta "taglio lungo una superficie".

Definizione 5.2.3. *Sia M una 3-varietà e S una superficie orientata in M, con $\partial S = \partial M \cap S$. Sia U un intorno tubolare di S, cosicchè $U \setminus S = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_i \cong S \times (0,1]$, $i = 1,2$. Siano M_0', U_1', U_2' copie omeomorfe di $\overline{M \setminus U}, \overline{U_1}, \overline{U_2}$ rispettivamente; siano infine $f_0 : \overline{M \setminus U} \longrightarrow M_0'$, $f_i : \overline{U_1} \longrightarrow U_i'$, $i = 1,2$ omeomorfismi. La 3-varietà M' ottenuta tagliando M lungo S si ottiene dall'unione disgiunta $U_1' \cup M_0' \cup U_2'$ identificando $f_0(x)$ e $f_i(x)$ quando $x \in \overline{M \setminus U} \cap \overline{U_i} = \partial\overline{M \setminus U} \cap \partial U_i$, $i = 1,2$.*

Sia ora V un intorno tubolare di un nodo K e S' una superficie di Seifert per K. Allora $V \cap S'$ è un anello e $\lambda := \partial V \cap S'$ è il parallelo di K. Siano al solito $C = \overline{S^3 \setminus V}$ e $S = S' \cap C$, e sia C^* la varietà ottenuta tagliando C lungo S; ∂C^* è una superficie connessa formata da due copie omeomorfe S^+, S^- di S e da un anello R ottenuto tagliando il toro ∂V lungo λ. Dunque $\partial C^* = S^+ \cup R \cup S^-$, e posto $\lambda^\pm := S^\pm \cap R$ si ha $\partial R = \lambda^+ \cup \lambda^-$.

Sia $r : S^+ \longrightarrow S^-$ l'omeomorfismo che manda un punto di S^+ nel punto di S^- corrispondente allo stesso punto di S; siano infine $i^\pm : S^\pm \longrightarrow C^*$ le inclusioni naturali.

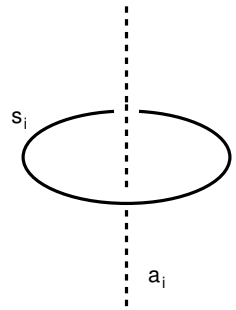
Consideriamo un'infinità numerabile $\{C_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$ di copie omeomorfe di C^* con espliciti omeomorfismi $h_j : C^* \longrightarrow C_j^*$. Definiamo C_∞ come lo spazio topologico quoziente dell'unione disgiunta $\cup_{j=-\infty}^{\infty} C_j^*$ per la relazione che identifica $h_j(x)$ con $h_{j+1}(r(x))$ per $x \in S^+$; c'è una naturale proiezione $p_\infty : C_\infty \longrightarrow C$ rispetto alla quale C_∞ è un rivestimento di C. Definiamo una trasformazione del rivestimento $t : C_\infty \longrightarrow C_\infty$ ponendo $t|_{C_j^*} = h_{j+1}h_j^{-1}$; dati $a, b \in C_\infty$ con $p_\infty(a) = p_\infty(b)$, esiste un unico m tale che $t^m(a) = b$, dunque C_∞ è un rivestimento regolare con $Aut(C_\infty) \cong \mathbb{Z}$, pertanto C_∞ è *il* rivestimento abeliano universale (in particolare non dipende dalla scelta di S').

Sia K un nodo di genere g, S una superficie di Seifert per K; possiamo assumere che S si retragga su una superficie in forma normale senza twists sui nastri (cfr. la discussione precedente la prop. 5.1.6). Esiste un handlebody[12] W di genere $2g$ contenuto in un intorno regolare di S tale che $S \subset W$,

$$\partial W = S^+ \cup S^-,\ S^+ \cap S^- = \partial S^+ = \partial S^- = S \cap \partial W = K,\ S^+ \cong S^- \cong S$$

e S è un retratto di deformazione di W. Consideriamo in S un sistema di curve canoniche $a_1, \ldots, a_{2g}$ e siano $a_1^+, \ldots, a_{2g}^+$, $a_1^-, \ldots, a_{2g}^-$ le curve proiettate su S^+, S^- rispettivamente da $a_1, \ldots, a_{2g}$. Se connettiamo con un arco i punti base per tali sistemi di curve in S^+, S^-, rimane definito un sistema canonico di curve in ∂W che è di fatto una base di $H_1(\partial W) \cong \mathbb{Z}^{4g}$. È inoltre chiaro che a_i^+ è omologa ad a_i^- in W. Per dualità di Alexander (cfr. 4.1.2, Oss.(2)) $H_1(W) \cong H^1(\overline{S^3 \setminus W})$; tale isomorfismo è espresso dal pairing non degenere $lk : H_1(\overline{S^3 \setminus W}) \times H_1(W) \to \mathbb{Z}$, in particolare, se scegliamo una curva s_i che borda un disco in W come in figura

[12] i.e. una 3-varietà ottenuta da $\mathbb{B}^3$ attaccando $2g$ manici $D^2 \times [0,1]$ in modo tale che il bordo sia una superficie orientabile di genere $2g$.



orientata in modo tale che $lk(s_i, a_i) = 1$ possiamo concludere:

Lemma 5.2.4. *$\{a_1^\varepsilon, \dots, a_{2g}^\varepsilon\}$, $\varepsilon = \pm$ è una base di $H_1(W)$ e $\{s_1, \dots, s_{2g}\}$ è una base di $H_1(\overline{S^3 \setminus W})$; tali basi sono duali rispetto al pairing lk.*

Manteniamo le notazioni precedenti e denotiamo con $[\theta] = (\theta_{ij})$, $\theta_{ij} = lk(a_i^+, a_j)$ la matrice della forma di Seifert di S rispetto alla base $\{a_1, \dots, a_{2g}\}$. Poichè $lk(a_i^+, a_j) = lk(a_i, a_j^-)$, vale chiaramente la seguente proposizione.

Proposizione 5.2.5. *Siano $\iota^\pm : S^\pm \to \overline{S^3 \setminus W}$ le inclusioni naturali; allora:*

$$\iota_*^+(a_j^+) = \sum_{k=1}^{2g} \theta_{jk} s_k \qquad \iota_*^-(a_j^-) = \sum_{k=1}^{2g} \theta_{kj} s_k.$$

In altri termini $[\theta^t]$ (risp. $[\theta]$) è la matrice di $\iota_*^+ : H_1(S^+) \cong H_1(W) \to H_1(\overline{S^3 \setminus W})$ (risp. $\iota_*^- : H_1(S^-) \cong H_1(W) \to H_1(\overline{S^3 \setminus W})$) rispetto alle basi Alexander-duali scelte in precedenza.

Dim. del teorema 5.2.2. Per provare (1) basta mostrare la commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_1(C_\infty) & \xrightarrow{\overline{(p_\infty)_*}} & G'/G'' \\ {\scriptstyle t_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ H_1(C_\infty) & \xrightarrow{\overline{(p_\infty)_*}} & G'/G''. \end{array}$$

Ciò segue dalla costruzione di C_∞; è chiaro anche che gli elementi $\{t^i s_j \mid 1 \le j \le 2g\}$ sono una $\mathbb{Z}$-base di $H_1(C_i^*)$, pertanto $\{t^i s_j \mid 1 \le j \le 2g, i \in \mathbb{Z}\}$ è un insieme di generatori per $H_1(C_\infty)$ su $\mathbb{Z}$. Dalla succesione di Mayer-Vietoris in omologia applicata a copie "adiacenti" di C^* non è difficile dedurre che le uniche relazioni definitorie derivano dall'identificazione $S_i^+ = S_{i+1}^-$: si ha dunque $t^i a_j^+ = t^{i+1} a_j^-$, che grazie alla proposizione precedente può riscriversi $\sum_{k=1}^{2g} t^i \theta_{jk} s_k = \sum_{k=1}^{2g} t^{i+1} \theta_{kj} s_k$, ovvero

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{2g} (\theta_{jk} - t\theta_{kj})\, t^i s_k = 0.$$

Se ora riguardiamo $H_1(C_\infty)$ come $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-modulo, dalle considerazioni precedenti è chiaro che esso è generato dai $2g$ cicli s_i mentre le infinite relazioni $(*)$

sono equivalenti, dato che t^i è invertibile in $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$, alle $2g$ relazioni espresse da $(\theta - t\theta^t)\, s = 0,\ (s = (s_1, \ldots, s_{2g})^t)$ come si voleva. $\square$

5.2.6. Osservazioni.

1. $H_1(C_\infty)$ è l'unico gruppo di omologia che ha una struttura interessante come $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-modulo: si ha infatti (cfr. [R], pag.171)

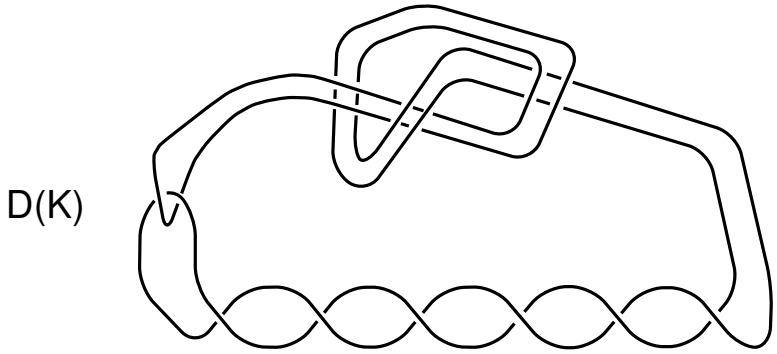
$$H_0(C_\infty) = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]/(t-1) \cong \mathbb{Z} \qquad H_i(C_\infty) = 0 \quad \forall\, i > 1.$$

2. In analogia a C_∞, possiamo considerare l'*h-esimo rivestimento ciclico finito* C_h di un nodo K, definito come il rivestimento corrispondente a $p_h : \pi_1(S^3 \setminus K) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_h} \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ (π è l'abelianizzazione e π_h la proiezione canonica). C_h ammette una costruzione esplicita simile a quella di C_∞; inoltre, $H_1(C_h)$ è un gruppo abeliano finitamente generato, dunque è prodotto diretto di gruppi ciclici:

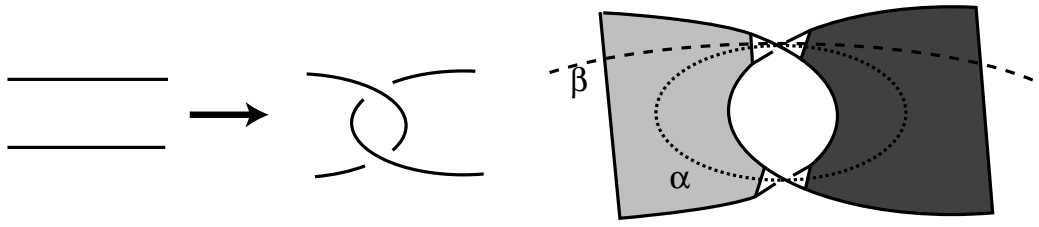
$$H_1(C_h) \cong \mathbb{Z}^s \times \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}.$$

Tale decomposizione è unica se richiediamo che $m_1 | m_2 \ldots | m_r$; $m_1, \ldots, m_r$ sono invarianti di K detti *h-esimi numeri di torsione* e possono essere calcolati geometricamente (cfr. [R] 6.B-C). Lo studio dei rivestimenti ciclici finiti ha importanti legami con la teoria dei rivestimenti ramificati di S^3; a proposito si veda [R], 10.C.

3. Diamo un esempio di nodo non banale avente invariante di Alexander banale.



$D(K)$ è detto "untwisted double" di un trifoglio K, e si costruisce come segue: si considerano due copie "parallele" di un trifoglio K, si aggiungono twists in modo che le due curve abbiano linking number nullo e infine si rende il tutto un nodo rimpiazzando due archi paralleli non allacciati con l'allacciamento disegnato in figura:



Una superficie di Seifert F per $D(K)$ si costruisce modificando come richiesto dall'algoritmo di Seifert il nastro che ha per bordo le due copie di K ove si è introdotto l'allacciamento di cui sopra. È chiaro che F ha genere 1, e come generatori

dell'omologia possono prendersi il ciclo α che "gira" attraverso l'allacciamento introdotto e il ciclo β che percorre longitudinalmente il nastro. Allora la matrice di Seifert nella base $\{\alpha, \beta\}$ di $H_1(F)$ è $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cosicchè il polinomio di Alexander è il polinomio costante 1 - come nel caso del nodo banale -.

Osserviamo che il diagramma disegnato per $D(K)$ non è alterno: in realtà $D(K)$ non ammette proiezioni alterne, come tutti i nodi non banali che hanno polinomio di Alexander "banale"; ciò segue immediatamente dal prossimo teorema ([BZ], 13.30).

Teorema 5.2.7. *Se $\tilde{\mathcal{D}}_K$ è l'insieme dei diagrammi alterni di K, allora*

$$\min_{D \in \tilde{\mathcal{D}}_K} c(D) \leq |\Delta_K(-1)|.$$

§5.3 Calcolo differenziale nei gruppi liberi.

Sia G un gruppo, assegnato tramite una presentazione finita; associeremo a G, in modo indipendente dalla presentazione, una catena ascendente di ideali $\ldots \subseteq E_k \subseteq E_{k+1} \ldots$ nell'anello gruppo $\mathbb{Z}[H]$ dell'abelianizzato $H = G/G'$ di G. Nel caso in cui G è il gruppo di un nodo K, il Corollario 4.1.2 implica che $H \cong \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[H] \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$; in particolare in questo caso costruiremo in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ una catena di ideali principali $\ldots \subseteq (\Delta_k) \subseteq (\Delta_{k+1}) \ldots$ che sono invarianti del nodo K. Il generatore Δ_k del k-esimo ideale principale, definito a meno di elementi invertibili in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, cioè di fattori $\pm t^h$, è detto *k-esimo polinomio di Alexander* di K. Classicamente si riserva il nome di polinomio di Alexander a Δ_1, normalizzato richiedendo che esso abbia termine noto non nullo e in esso compaiano solo potenze positive di t. Nel prossimo paragrafo mostreremo che Δ_1 è il polinomio introdotto in 5.1.7.

Ritorniamo al caso di un gruppo finitamente presentato G; sia $(\underline{x}|\,\underline{r})$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ una presentazione di G, cosicchè $G \cong F/R$ ove $F = F(\underline{x})$ è il gruppo libero nei generatori $x_1, \ldots, x_n$ e R è l'insieme delle conseguenze di $\underline{r}$, cioè la chiusura normale di $r_1, \ldots, r_m$ in F. Sia poi $\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ la counità dell'anello di Hopf $\mathbb{Z}[G]$($\varepsilon(\sum_i n_i g_i) = \sum_i n_i$, $g_i \in G$) (cfr. §6.4).

Definizione 5.3.1. *Un'applicazione $D : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$ è una $\varepsilon-$derivazione (per abuso di linguaggio diremo semplicemente derivazione) se per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{Z}[G]$*

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta) \tag{1}$$

$$D(\xi\,\eta) = D(\xi)\varepsilon(\eta) + \xi D(\eta). \tag{2}$$

Si verificano facilmente, per una derivazione D, le seguenti proprietà :

Lemma 5.3.2. *Per ogni $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$ risulta:*

(1) $D(n) = 0$.
(2) $D(g^{-1}) = -g^{-1}D(g)$.
(3) $D(g^n) = (1 + g + g^2 + \ldots + g^{n-1})D(g) \quad \forall\, n \geq 1$.
(4) $D(g^{-n}) = -(g^{-1} + g^{-2} + \ldots + g^{-n})D(g) \quad \forall\, n \geq 1$.

Esempio L'applicazione $\varphi : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$ definita da $\varphi(g) = g - \varepsilon(g)$ è una derivazione.

Lemma 5.3.3. *Sia F il gruppo libero nei generatori $x_1, \dots, x_n$. Dati $w_1, \dots, w_n$ in $\mathbb{Z}[F]$, esiste una e una sola derivazione $D : \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[F]$ tale che $D(x_i) = w_i$.*

Dim. Poichè $D(1) = 0$, si ha $D(x_i^{-1}) = -x_i^{-1} w_i$; le condizioni (1), (2) in 5.3.1 implicano l'unicità . Per quanto riguarda l'esistenza, se $w = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, definiamo $D(w)$ usando la regola del prodotto (e 5.3.2):

$$D(w) := D(x_1^{m_1}) + x_1^{m_1} D(x_2^{m_2}) + \dots\dots + x_1^{m_1} \dots x_{n-1}^{m_{n-1}} D(x_n^{m_n}).$$

Fra l'altro, deduciamo che $D(uv) = D(u) + uD(v)$. Per provare che D è ben definita su $\mathbb{Z}[F]$ basta vedere che il suo valore su una parola w non cambia quando si riduce liberamente w:

$$\begin{aligned} D(u x_i^{\epsilon} x_i^{-\epsilon} v) &= D(u) + uD(x_i^{\epsilon}) + u x_i^{\epsilon} D(x_i^{-\epsilon}) + uD(v) \\ &= D(u) + uD(v) = D(uv), \quad \epsilon = \pm 1. \quad \square \end{aligned}$$

Definizione 5.3.4. *Le derivazioni* $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ *di* $\mathbb{Z}[F]$ *definite da*

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$$

sono dette **derivate di Fox**.

La chiave dello studio delle derivazioni sta nel seguente fatto

Teorema 5.3.5. *Sia F il gruppo libero nei generatori $x_1, \dots, x_n$. Per $v \in \mathbb{Z}[F]$ vale la seguente formula fondamentale:*

$$v - \varepsilon(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_i - 1).$$

Di più , il nucleo di ε pensato come $\mathbb{Z}[F]$–modulo sinistro (risp. destro) è libero con base gli elementi $x_i - 1$.

Dim. Proviamo che se D è una derivazione, allora $D = \sum_{i=1}^{n} r_{D(x_i)} \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, ove r_y è l'operatore di moltiplicazione *a destra* per y; con un calcolo diretto si prova che il secondo membro è una derivazione; allora la voluta relazione segue dal lemma 5.3.3, poichè

$$\left(\sum_{i=1}^{n} r_{D(x_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) x_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} D(x_i) = D(x_j).$$

La formula fondamentale si ottiene dal risultato precedente considerando la derivazione $v \mapsto v - \varepsilon(v)$. Resta da vedere che gli elementi $x_i - 1$, $i = 1 \dots n$ sono un sistema libero. Supponiamo allora che esistano $f_i \in \mathbb{Z}[F]$ tali che

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - 1) = 0$$

e proviamo che $f_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Per ogni $f_j \neq 0$ sia w_j il monomio nei generatori di lunghezza massima che appare nella scrittura di f_j come combinazione lineare di elementi di F; sia poi $m = \max_{1 \leq i \leq n} \ell(w_i)$. Se esiste h tale che $\ell(w_h) = m$ e w_h non termina con x_h^{-1}, allora $\ell(w_h x_h) = m + 1$ e ciò contraddice $(*)$: allora per ogni j tale che $\ell(w_j) = m$ si ha che w_j termina con x_j^{-1}. D'altra parte, $(*)$ può riscriversi come $\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i - f_i) = 0$, e le parole di lunghezza massima appaiono con coefficiente non zero in $-\sum_{i=1}^{n} f_i$: ma allora non possono cancellarsi, contraddizione. □

Vedremo in §5.4 una interpretazione geometrica delle derivate di Fox. Iniziamo la costruzione degli ideali E_k cui accennavamo all'inizio del paragrafo; richiamiamo prima alcuni risultati fondamentali sulle presentazioni di gruppi.

Siano G, $\tilde{G}$ gruppi con rispettive presentazioni $(\underline{x}|\,\underline{r})$, $(\underline{y}|\,\underline{s})$; siano poi R, S gli insiemi delle conseguenze di $\underline{r}$, $\underline{s}$ rispettivamente.

Ricordiamo che un'*applicazione di presentazioni* $f : (\underline{x}|\,\underline{r}) \longrightarrow (\underline{y}|\,\underline{s})$ è un omomorfismo $f : F(\underline{x}) \longrightarrow F(\underline{y})$ tale che $f(\underline{r}) \subseteq S$. f è un'equivalenza di presentazioni se l'applicazione indotta $f_* : G :\longrightarrow \tilde{G}$ è un isomorfismo.
Denoteremo con $f_{**} : G/G' \longrightarrow \tilde{G}/\tilde{G}'$ l'applicazione indotta sugli abelianizzati.

Dovremo far vedere che una certa costruzione è indipendente da una fissata presentazione; è possibile ridursi, per presentazioni finite, al caso di alcune equivalenze elementari, come asserito nel seguente teorema, dovuto a Tietze (cfr. [M], Th. 1.5).

Teorema 5.3.6. *Due presentazioni finite sono equivalenti se e solo se si può passare dall'una all'altra tramite un numero finito delle seguenti equivalenze elementari*

$\Phi : (\underline{x}|\,\underline{r}) \longrightarrow (\underline{x}|\,\underline{r} \cup m),\ \Phi = Id_{F(\underline{x})},\ m \in R$
$\Phi' : (\underline{x}|\,\underline{r} \cup m) \longrightarrow (\underline{x}|\,\underline{r}),\ \Phi' = Id_{F(\underline{x})},\ m \in R$
$\Psi : (\underline{x}|\,\underline{r}) \longrightarrow (\underline{x} \cup y|\,\underline{r} \cup y\xi^{-1})), \Psi : F(\underline{x}) \hookrightarrow F(\underline{x} \cup y)\,(inclusione), y \notin \underline{x}, \xi \in F(\underline{x})$
$\Psi' : (\underline{x} \cup y|\,\underline{r} \cup y\xi^{-1}) \longrightarrow (\underline{x}|\,\underline{r}),\ \Psi'(x) = x\ \forall x \in \underline{x},\ \Psi'(y) = \xi,\ y \notin \underline{x},\ \xi \in F(\underline{x}).$

Esempio

$$\begin{aligned}
&(x, y|\, xyx = yxy) = \\
&(x, y, a, b|\, xyx = yxy, a = xy, b = xyx) = \\
&(x, y, a, b|\, xyx = yxy, a^3 = b^2, a = xy, b = xyx, x = a^{-1}b, y = b^{-1}a^2) = \\
&(x, y, a, b|\, a^3 = b^2, x = a^{-1}b, y = b^{-1}a^2) = \\
&\quad (a, b|\, a^3 = b^2).
\end{aligned}$$

Data una presentazione $(\underline{x}|\,\underline{r})$ per $G = F/R$, sia $H = G/G'$. Denotiamo con $p : F \to G$ la proiezione canonica e con $\pi : G \to G'$ l'abelianizzazione; consideriamo poi la composizione

$$\mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\dfrac{\partial}{\partial x_j}} \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{p} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}[H].$$

Definizioni 5.3.7.

(1) *La matrice di Alexander di G è la matrice $A = (a_{ij}) \in M(m,n;\mathbb{Z}[H])$ definita da*

$$a_{ij} = \pi p(\frac{\partial r_i}{\partial x_j})$$

(2) *Il k-esimo ideale elementare della matrice di Alexander A è l'ideale in $\mathbb{Z}[H]$ così definito*

$$E_k(A) = \begin{cases} \textit{ideale generato dai minori di ordine } n\text{-}k & \textit{se } 0 < n-k \leq m, \\ 0 & \textit{se } n-k > m, \\ \mathbb{Z}[H] & \textit{se } n-k \leq 0. \end{cases}$$

Osserviamo che la seconda definizione ha senso non soltanto per $\mathbb{Z}[H]$ ma anche per un qualsiasi anello commutativo con unità R ed una matrice $A \in M(m,n;R)$; risulta:

$$E_0(A) \subset E_1(A) \subset \ldots \subset E_n(A) = E_{n+1}(A) = \ldots = R.$$

Introduciamo in $M(m,n;R)$ la relazione di equivalenza generata dalle seguenti operazioni:

(1) operazioni elementari su righe e colonne;

(2) aggiungere una riga di zeri: $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$;

(3) se a è un vettore riga $1 \times n$, $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

Non è difficile vedere che la moltiplicazione di righe o colonne per elementi invertibili in R preserva l'equivalenza; è noto (cfr. [Z], pagg. 117-120) che due matrici A_1, A_2 sono equivalenti se e solo se possono riguardarsi come matrici di presentazione di due R-moduli isomorfi.

Lemma 5.3.8. *Matrici equivalenti definiscono la stessa catena di ideali elementari.*

Dim. Siano $A \in M(m,n;R)$, $A' \in M(m',n';R)$ matrici equivalenti; possiamo ridurci al caso in cui l'equivalenza sia una delle operazioni (1), (2), (3). L'asserto è ben noto relativamente ad operazioni di tipo (1); se l'equivalenza è di tipo (2), risulta $n = n'$, $m' = m+1$, e l'unico caso non ovvio è quello in cui $n-k = m'$: $E_k(A) = 0$ per definizione, mentre $E_k(A') = 0$ perchè ogni sottomatrice quadrata di ordine m' ha una riga di zeri.

Controlliamo infine l'invarianza per operazioni di tipo (3). Si ha $n' = n+1$, $m' = m+1$ e l'asserto è immediato se $n-k > m$; se $n-k \leq 0$, allora $n'-k \leq 1$: dunque, per definizione, $E_k(A) = R$ e lo stesso vale per $E_k(A')$: se $n'-k = 1$ ciò segue dal fatto che $E_k(A')$ è generato dai minori di ordine 1, cioè dagli elementi di A', e uno di questi è l'identità di R. Supponiamo ora $0 < n-k \leq m$: ogni sottomatrice di ordine $n-k$ di A si estende in modo naturale a una sottomatrice di ordine $n-k+1 = n'-k$ di A' (basta orlare la data sottomatrice con gli opportuni elementi dell'ultima riga e dell'ultima colonna $(0,\ldots,0,1)^t$ di A'); espandendo secondo l'ultima colonna deduciamo facilmente che $E_k(A) \subseteq E_k(A')$. Viceversa,

data una sottomatrice di ordine $n' - k$ di A', se essa non contiene l'ultima riga, il suo determinante appartiene ad $E_{k-1}(A) \subseteq E_k(A)$; in caso contrario, espandendo secondo l'ultima riga si vede che il determinante della sottomatrice è un generatore per $E_k(A)$, dunque appartiene ad $E_k(A)$. In ogni caso $E_k(A') \subseteq E_k(A)$, come si voleva. □

Teorema 5.3.9. *Sia f un'equivalenza di presentazioni finite per un gruppo G e siano $\{E_k\}$, $\{\tilde{E}_k\}$ le catene di ideali elementari relative alle due presentazioni. Allora $f_{**}(E_k) = \tilde{E}_k$.*

Dim. In virtù del teorema di Tietze possiamo supporre che f sia un'equivalenza elementare; poichè poi f è un'equivalenza, f_{**} è un isomorfismo e possiamo ridurci a provare l'asserto nei due casi $f = \Phi$, $f = \Psi$ (cfr. 5.3.6).

$\Phi : (\underline{x}|\,\underline{r}) \longrightarrow (\underline{x}|\,\underline{r} \cup s)$, $\Phi = Id_{F(\underline{x})}$.

Poichè $\Phi_{**} = Id$, dobbiamo provare che gli ideali elementari delle due presentazioni sono uguali; in forza della proposizione precedente, basta vedere che le relative matrici di Alexander sono equivalenti. Se $A = (a_{ij}) \in M(m, n; \mathbb{Z}[H])$ è la matrice di Alexander relativa alla prima presentazione, quella relativa alla seconda è

$$\begin{pmatrix} & A & \\ \dots & \pi\, p\, \dfrac{\partial s}{\partial x_j} & \dots \end{pmatrix} \in M(m+1, n; \mathbb{Z}[H]).$$

Proveremo che l'ultima riga è combinazione lineare delle precedenti; s è un elemento di R, dunque è del tipo $s = \prod_{k=1}^{l} u_k\, r_{i_k}^{\alpha_k}\, u_k^{-1}$, $r_{i_j} \in R$, $u_k \in F$. Allora, tenendo conto del fatto che $p(r_i) = 1$ e delle regole della derivata di Fox, si ha

$$\begin{aligned} p\Big(\frac{\partial s}{\partial x_j}\Big) &= p\Big(\sum_{k=1}^{l} \Big(\prod_{t=1}^{k-1} u_t\, r_{i_t}^{\alpha_t}\, u_t^{-1}\Big)\ \frac{\partial(u_k\, r_{i_k}^{\alpha_k}\, u_k^{-1})}{\partial x_j}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{l} p\Big(\frac{\partial(u_k\, r_{i_k}^{\alpha_k}\, u_k^{-1})}{\partial x_j}\Big) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k p(u_k) p\Big(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\Big). \end{aligned}$$

Dunque posto $c_k := \alpha_k \pi(p(u_k))$ si ha, come volevamo,

$$\pi\, p\Big(\frac{\partial s}{\partial x_j}\Big) = \sum_{k=1}^{l} c_k\, a_{i_k j}.$$

$\Psi : (\underline{x}|\,\underline{r}) \longrightarrow (\underline{x}|\,\underline{r} \cup y\xi^{-1})$, $\Psi : F(\underline{x}) \hookrightarrow F(\underline{x} \cup y)$.

Dobbiamo provare che se $\tilde{A}$ è la matrice di Alexander della seconda presentazione, allora $\Psi_{**}(E_k(A)) = E_k(\tilde{A})$; ciò a sua volta seguirà subito dal fatto che $A, \tilde{A}$ sono matrici equivalenti: faremo infatti vedere che

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Psi_{**}(A) & 0 \\ a' & 1 \end{pmatrix}.$$

Per provare quanto asserito consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[F(\underline{x})] & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{Z}[F(\underline{x}\cup y)] \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{Z}[G] & \xrightarrow{\Psi_*} & \mathbb{Z}[G] \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{Z}[H] & \xrightarrow{\Psi_{**}} & \mathbb{Z}[H] \end{array}$$

Si ha, per $i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots n$:

$$\Psi_{**}(a_{ij}) = \Psi_{**}(\pi\, p(\frac{\partial r_i}{\partial x_j})) = \pi\, p\, \Psi(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}) = \pi\, p(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}) = a_{ij}.$$

Inoltre $\dfrac{\partial r_i}{\partial y} = 0,\ i = 1, \dots, m,\ \dfrac{\partial y\xi^{-1}}{\partial y} = 1$, che è quanto volevamo. □

Sia ora K un nodo e G il gruppo fondamentale del complementare; abbiamo già osservato che $\mathbb{Z}[G/G'] \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$; questo anello non è principale, ma è comunque un dominio fattoriale, dunque ha senso la seguente definizione.

Definizione 5.3.10. *L'h-esimo polinomio Δ_h di K è il M.C.D. dei minori di ordine $n-h$ della matrice di Alexander di G; equivalentemente, è il generatore del minimo ideale principale contenente E_h.*

È chiaro dalla definizione che Δ_h è definito a meno di elementi invertibili in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Proposizione 5.3.11. *Δ_h è un invariante di K.*

Dim. Proviamo che se f è un'equivalenza di presentazioni di G e $\Delta_h,\ \Delta'_h$ sono i relativi polinomi, allora $f_{**}(\Delta_h) = \Delta'_h$.

Valgono, con ovvie notazioni, le relazioni $E_h \subseteq (\Delta_h),\ E'_h \subseteq (\Delta'_h)$; inoltre, dal teorema precedente, $f_{**}(E_h) = E'_h$, quindi $f_{**}(\Delta_h) \supseteq f_{**}(E_h) = E'_h$. Poichè $f_{**}(\Delta_h)$ è un ideale principale, la minimalità di (Δ'_h) implica $f_{**}(\Delta_h) \supseteq \Delta'_h$; per simmetria tutto segue. □

Osservazione. Gli ideali elementari sono un invariante strettamente più forte dei polinomi Δ_h; consideriamo infatti il *nodo di Stevedore* 6_1 e il nodo 9_{46}: per entrambi si ha $\Delta_1 = 2 - 5t + 2t^2,\ \Delta_h = 1\, \forall\, h \geq 1$ mentre gli ideali elementari sono:

$$\begin{cases} E_k = (1),\ k \geq 2 \\ E_1 = (2 - 5t + 2t^2) \end{cases} \quad \text{per } 6_1, \qquad \begin{cases} E_k = (1),\ k \geq 3 \\ E_1 = (2 - 5t + 2t^2) \\ E_2 = (2 - t, 1 - 2t) \end{cases} \quad \text{per } 9_{46}$$

Peraltro due nodi possono avere la stessa matrice di Alexander ed avere gruppi non isomorfi: è questo il caso di 7_4, 9_2.

Lemma 5.3.12. *Supponiamo che* $\pi\, p(x_i) = \pi\, p(x_j) \neq 1\ \forall\, i, j = 1, \dots, n$; *allora la matrice di Alexander è equivalente alla matrice da essa ottenuta rimpiazzando una qualsiasi colonna con una colonna di zeri.*

Dim. Dalla relazione fondamentale del calcolo differenziale di Fox 5.3.5) si ha

$$r_i - 1 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)(x_j - 1).$$

Tenendo conto dell'ipotesi e del fatto che $p(r_i) = 1$ possiamo dedurre dalla relazione precedente

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \pi\, p\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)(\pi\, p(x_j) - 1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\pi\, p(x_1) - 1).$$

Poichè $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ è un dominio d'integrità e $(\pi\, p(x_1) - 1) \neq 0$ si ha $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$, dunque sommando ad una qualsiasi colonna le rimanenti si ottiene una colonna di zeri. □

Consideriamo ora una presentazione di G con n generatori ed $n-1$ relazioni (ad esempio la presentazione di Wirtinger). Le ipotesi del lemma precedente sono verificate, quindi, a meno di equivalenza possiamo assumere che la matrice di Alexander $A \in M(n-1, n; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ sia del tipo $A = (\ \tilde{A}\quad 0\ )$ ove $\tilde{A} \in M_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$. Ne segue che l'ideale E_1 è principale, generato da $\det(\tilde{A})$.

Il polinomio $\Delta_1(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ *che genera* E_1 *si dice polinomio di Alexander di* K. *Proveremo in 5.4.4 che* $\tilde{A}$ *è una matrice di presentazione per* $H_1(C_\infty)$; *d'altra parte, per 5.2.2,* $\theta - t\theta^t$ *è una matrice di presentazione per* $H_1(C_\infty)$, *dunque*

$$\Delta_1(t) = \det(\tilde{A}) \doteq \det(\theta - t\theta^t) = \Delta_K(t)$$

e le definizioni introdotte coincidono.

Esempi

(1) Sia K il nodo banale; allora $\pi_1(S^3 \setminus K) \cong (x|\emptyset)$, dunque $A = (0)$ e $\Delta_k = 1\ \forall\, k \geq 1$.

(2) Se T è il trifoglio, allora $\pi_1(S^3 \setminus T) \cong (x, y|\, xyx = yxy)$, cosicchè[13]

$$a_{11} = \pi\, p\left(\frac{\partial}{\partial x}(xyx - yxy)\right) = \pi\, p(1 + xy - y),$$

[13] Si osservi che alla relazione $r_j = s_j$ corrisponde il relatore $r_j s_j^{-1}$; inoltre

$$\frac{\partial r_j s_j^{-1}}{\partial x_i} = \frac{\partial r_j}{\partial x_i} - r_j s_j^{-1} \frac{\partial s_j}{\partial x_i}$$

da cui si deduce subito

$$a_{ji} = \pi\, p\left(\frac{\partial r_j s_j^{-1}}{\partial x_i}\right) = \pi\, p \frac{\partial}{\partial x_i}(r_j - s_j).$$

$$a_{12} = \pi\, p(\frac{\partial}{\partial y}(xyx - yxy)) = \pi\, p(x - 1 - yx).$$

Se dunque $\pi\, p(x) = \pi\, p(y) = t$, la matrice di Alexander di T è

$$A = (\ 1 - t + t^2 \quad -1 + t - t^2\ ),$$

da cui $\Delta(t) = t^2 - t + 1$. Osserviamo che se se avessimo calcolato A a partire dalla presentazione di Wirtinger avremmo ottenuto la matrice 2×3

$$\begin{pmatrix} t-1 & 1 & -t \\ t & 1-t & -1 \end{pmatrix}.$$

che ha, come deve essere, gli stessi ideali elementari.

(3) Il polinomio di Alexander del nodo torale $K_{p,q}$ è

$$\Delta_{K_{p,q}}(t) = \frac{(1-t)(1-t^{pq})}{(1-t^p)(1-t^q)}$$

(essendo p, q coprimi, la formula precedente definisce effettivamente un polinomio). Si ricordi infatti che $\pi_1(S^3 \setminus K_{p,q}) \cong F(x,y)/(x^p = y^q)$; poichè $\pi\, p(x) = t^q,\ \pi\, p(y) = t^p$ si ha

$$\begin{aligned} A &= \left[\pi\, p(\frac{\partial}{\partial x}(x^p - y^q))\ \pi\, p(\frac{\partial}{\partial y}(x^p - y^q))\right] \\ &= \left[\pi\, p(1 + x + \ldots + x^{p-1})\ \ - \pi\, p((1 + y + \ldots + y^{q-1})\right] \\ &= \left[1 + t^q + \ldots + t^{(p-1)q}\ \ - (1 + t^p + \ldots + t^{(q-1)p})\right] = \left[\frac{1-t^{pq}}{1-t^q}\ \ - \frac{1-t^{pq}}{1-t^p}\right]. \end{aligned}$$

$$\Delta_{K_{p,q}}(t) = \ M.C.D.\left\{\frac{1-t^{pq}}{1-t^q}, \frac{1-t^{pq}}{1-t^p}\right\} = \frac{(1-t)(1-t^{pq})}{(1-t^p)(1-t^q)}$$

Osservazione. Il calcolo differenziale di Fox ha interessanti applicazioni anche nell'ambito della teoria delle rappresentazioni del gruppo delle trecce; ne diamo un esempio nell'appendice, in cui discutiamo la costruzione della rappresentazione di Burau e della rappresentazione di Gassner.

§5.4 Calcolo di Fox: un approccio geometrico.

Usiamo le notazioni del paragrafo precedente; anzitutto richiamiamo un risultato generale di topologia algebrica.

Proposizione 5.4.1. *Dato un gruppo finitamente presentato G, esiste un 2-CW-complesso finito X con una unica 0-cella $\{x_0\}$ tale che $G \cong \pi_1(X, x_0)$.*

Dim. Supponiamo che G ammetta la presentazione $(\underline{x}|\underline{r})$ con n generatori e m relazioni; sia X^1 un bouquet di n circonferenze con punto base x_0: allora $\pi_1(X^1, x_0) = F(\underline{x})$, il gruppo libero nei generatori $\underline{x}$. Sia X il 2-complesso ottenuto da $X^1 \cup$

X^0, $X^0 = \{x_0\}$, incollando m 2-celle $e_1^2, \dots, e_m^2$ in modo tale che il bordo della j-esima 2-cella coincida con la j-esima relazione: $\partial e_j^2 = r_j$. Per provare l'asserto useremo il teorema di Seifert-Van Kampen, riducendoci induttivamente al caso $m = 1$ (cosicchè $X = X^0 \cup X^1 \cup e_1^2$). Sia $y \in e_1^2$, $U = X \setminus \{y\}$, $V = e_1^2$; osserviamo che $U \cup V = X$, V è semplicemente connesso e X^1 è un retratto di deformazione di U. Dal teorema 4.2.1 deduciamo pertanto che $\pi_1(X, x_0)$ ha gli stessi generatori di $\pi_1(U, x_0) \cong F(\underline{x})$ e l'unica relazione $0 = i_*(r_1) = j_*(r_1) = r_1$ ($i : U \cap V \to V$, $j : U \cup V \to U$ sono le inclusioni naturali), che è quanto si voleva. □

Sia ora X come nella proposizione precedente e $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento regolare. Si scelga $\tilde{a}_0 \in \tilde{X}$ sopra x_0; posto $H := p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}_0)) \lhd G$, sia $D \cong G/H$ il gruppo degli automorfismi del rivestimento. Sia $\phi : G \longrightarrow D$, $w \mapsto w^\phi$ la proiezione canonica; osserviamo che $(ab)^\phi = b^\phi a^\phi$.

Vogliamo fornire una presentazione di $H_1(\tilde{X}, \tilde{X}_0)$ ($\tilde{X}_0$ è la fibra di x_0). Poichè $\pi_1(X^1, x_0) = F(\underline{x})$ possiamo denotare allo stesso modo un cammino chiuso nello 1-scheletro X^1 di X e la parola che lo rappresenta in $F(\underline{x})$. Dato $w \in \pi_1(X^1, x_0)$, w ammette un unico sollevamento $\tilde{w}$ in $\tilde{X}$ che ha $\tilde{a}_0$ per punto iniziale. $\tilde{w}$ è un 1-ciclo relativo; inoltre ogni 1-catena in $\tilde{X}$ appartiene a $\sum_{i=1}^m \mathbb{Z}[D]\,\tilde{x}_i$. Denotiamo con $q : F(\underline{x}) \longrightarrow G$ la proiezione canonica.

Proposizione 5.4.2. *$\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$ è un sistema di generatori di $H_1(\tilde{X}, \tilde{X}_0)$ come $\mathbb{Z}[D]$-modulo, rispetto al quale $\phi(q(\dfrac{\partial r_k}{\partial x_j}))$, $1 \le k \le m$, $1 \le j \le n$ è una matrice di presentazione.*

Corollario 5.4.3. *Sia K un nodo, $C = S^3 \setminus K$ e $p_\infty : C_\infty \to C$ il rivestimento ciclico infinito di C. Se $G = \pi_1(C, x_0)$, la matrice di Alexander associata ad una (qualsiasi) presentazione di G presenta $H_1(C_\infty, p_\infty^{-1}(x_0))$ come $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-modulo.*

Dim. $H_1(\tilde{X}, \tilde{X}_0)$ è generato come $\mathbb{Z}[D]$-modulo dagli elementi $\tilde{x}_i$, $i = 1, \dots, n$ con relazioni $\tilde{r}_j$, $j = 1, \dots, m$, sollevamenti dei bordi $r_j = \partial e_j^2$: infatti il bordo di una 2-cella in $\tilde{X}$ è del tipo $\psi(\tilde{r}_j)$, $\psi \in D$, dunque non si devono aggiungere altre relazioni alle $\tilde{r}_j$. Osserviamo ora che, per $w_1, w_2 \in \pi_1(X^1)$, vale la regola

$$\widetilde{w_1 w_2} = \tilde{w}_1 + w_1^\phi \tilde{w}_2.$$

Solleviamo infatti dapprima w_1 a $\tilde{w}_1$: il punto finale del sollevamento è $w_1^\phi(\tilde{a}_0)$ e l'automorfismo w_1^ϕ manda $\tilde{w}_2$ sulla catena $w_1^\phi(\tilde{w}_2)$ che inizia in $w_1^\phi(\tilde{a}_0)$. Da ciò possiamo dedurre che se w è un parola in F, la 1-catena $\tilde{w}$ può esprimersi come

$$\tilde{w} = \sum_{j=1}^n \phi(q(\frac{\partial w}{\partial x_j}))\tilde{x}_j.$$

Procediamo per induzione sul numero $n(w)$ di generatori che compaiono nella scrittura di w come parola negli x_j. Supponiamo $w = ux_i$, cosicchè $n(u) < n(w)$; tenendo conto delle proprietà della derivata di Fox e di quanto precedentemente

osservato, si ha:

$$\tilde{w} = \widetilde{ux_i} = \tilde{u} + \phi(q(u))\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \phi(q(\frac{\partial u}{\partial x_j}))\tilde{x}_j + \phi(q(u))\tilde{x}_i$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \phi(q(\frac{\partial u}{\partial x_j} + u\delta_{ij}))\tilde{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \phi(q(\frac{\partial u x_i}{\partial x_j}))\tilde{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \phi(q(\frac{\partial w}{\partial x_j}))\tilde{x}_j.$$

Se $w = ux_i^{-1}$ si procede analogamente. L'asserto segue dalla formula precedente nel caso $w = r_j$. $\square$

Concludiamo deducendo la presentazione di $H_1(C_\infty)$ tramite la matrice di Alexander.

Teorema 5.4.4. *Sia G il gruppo di un nodo, $(\underline{x}|\underline{r})$ una sua presentazione e A la relativa matrice di Alexander. Allora una matrice di presentazione per $H_1(C_\infty)$ come $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-modulo si ottiene da A omettendo la i-esima colonna se $p(\pi(x_i)) = t^{\pm 1}$, p essendo l'abelianizzazione e $\pi : F(\underline{x}) \to G$ la proiezione canonica.*

In particolare, nel caso della presentazione di Wirtinger, una qualsiasi colonna può essere omessa.

Dim. Posto $C^0_\infty := p_\infty^{-1}(x_0)$, consideriamo la successione esatta di omologia

$$0 = H_1(C^0_\infty) \to H_1(C_\infty) \to H_1(C_\infty, C^0_\infty) \xrightarrow{\partial} H_0(C^0_\infty) \xrightarrow{i_*} H_0(C_\infty) \to 0.$$

Dalla precedente successione possiamo dedurre la successione esatta corta

$$0 \to H_1(C_\infty) \to H_1(C_\infty, C^0_\infty) \xrightarrow{\partial} Ker(i_*) \to 0$$

Da 5.3.5 $Ker(i_*)$ è uno $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-modulo libero generato da $(t-1)\tilde{a}_0$, dunque la precedente successione spacca: si ha corrispondentemente

$$H_1(C_\infty, \tilde{X}^0) = H_1(C_\infty) \oplus \sigma(\mathbb{Z}[t,t^{-1}](t-1)\tilde{a}_0)$$

ove $\sigma : Ker(i_*) \to H_1(C_\infty, C^0_\infty)$ è tale che $\partial\,\sigma = id$.

Resta da provare che possiamo scegliere l'omomorfismo di spaccamento σ in modo tale che $\sigma(Ker(i_*)) = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]\tilde{x}_i$.
Poniamo $\sigma((t-1)\tilde{a}_0) = \tilde{x}_i$ se $p(\pi(x_i)) = t$ e $\sigma((t-1)\tilde{a}_0) = -t\tilde{x}_i$ se $p(\pi(x_i)) = t^{-1}$; con tali scelte risulta chiaramente $\sigma(Ker\, i_*) = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]\tilde{x}_i$, pertanto dobbiamo verificare che σ è una sezione di ∂:

$$\partial\,\sigma((t-1)\tilde{a}_0) = \partial\tilde{x}_i = (p(\pi(x_i)) - 1)\tilde{a}_0 = (t-1)\tilde{a}_0$$
$$\partial\,\sigma((t-1)\tilde{a}_0) = -t\partial\tilde{x}_i = -t(p(\pi(x_i)) - 1)\tilde{a}_0 = -t(t^{-1} - 1)\tilde{a}_0 = (t-1)\tilde{a}_0. \quad \square$$

§5.5 Il polinomio di Alexander per i links.

Vogliamo brevemente accennare a come si modifica la teoria del modulo di Alexander nel caso di un link L a $\mu \geq 1$ componenti.

Con le notazioni di §5.2, sia X il complementare in S^3 di L, G il gruppo fondamentale di X; in questo caso l'abelianizzazione è un omomorfismo $\pi : G \longrightarrow G/G' \cong \mathbb{Z}^\mu$: scelti rappresentanti $t_1, \ldots, t_n$ per le classi laterali di G' in G (dunque un meridiano su ciascuna componente di L), si ha (con lieve abuso di notazione) un'identificazione $G/G' =< t_1 > \times \ldots \times < t_\mu >$. G'/G'' ha una struttura di $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_\mu^{\pm 1}]$-modulo, assegnata tramite l'applicazione $x \mapsto t_i^{-1} x t_i, x \in G'$, $1 \leq i \leq n$.

Data una presentazione per G, possiamo definire come in 5.3.7 la matrice di Alexander e gli associati ideali elementari. La proposizione 5.4.2 vale senza cambiamenti: non così 5.4.4, perchè la successione esatta

$$(*) \qquad 0 \to H_1(C_\infty) \to H_1(C_\infty, C_\infty^0) \xrightarrow{\partial} Ker(i_*) \to 0$$

non spacca e quindi non si può più individuare un sottomodulo di $H_1(C_\infty, C_\infty^0)$ isomorfo a $H_1(C_\infty)$. Chiamiamo pertanto $H_1(C_\infty, C_\infty^0)$ *modulo di Alexander del link* L. Da 5.4.2 segue che $H_1(C_\infty, C_\infty^0)$ ammette $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} = \pi p(\frac{\partial r_i}{\partial x_j})$ ($A \in M(m, n; \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_\mu^{\pm 1}])$) come matrice di presentazione (al solito $(\underline{x}, \underline{r})$ è una presentazione "tipo Wirtinger" di G).

Proposizione 5.5.1. *Il primo ideale elementare E_1 di $H_1(C_\infty, C_\infty^0)$ è della forma*

$$E_1 = Ker(\varepsilon) \cdot (\Delta_L(t_1, \ldots, t_\mu)) .$$

ove il secondo fattore è l'ideale principale generato dal M.C.D. $\Delta_L(t_1, \ldots, t_\mu)$ di E_1; $\Delta_L(t_1, \ldots, t_\mu)$, che è detto polinomio di Alexander di L (in μ variabili), è un invariante di L a meno di moltiplicazione per $\pm t_1^{h_1} \cdots t_\mu^{h_\mu}$.

Dim. Sia A' la matrice ottenuta da A omettendo l'ultima riga, e sia poi δ_i il determinante della matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuto da A' omettendone la i-esima colonna c_i . Poichè $r_i - 1 = \sum \frac{\partial r_i}{\partial x_j}(x_j - 1)$, si ha $\sum_{j=1}^n c_j (\pi p(x_i) - 1) = 0$; deduciamo:

$$\begin{aligned}
\delta_j (\pi p(x_i) - 1) &= \det(c_1, \ldots, c_i (\pi p(x_i) - 1), \ldots, c_{j-1}, c_{j+1} \ldots) \\
&= \det(c_1, \ldots, -\sum_{k \neq i} c_k (\pi p(x_k) - 1), \ldots, c_{j-1}, c_{j+1} \ldots) \\
&= \det(c_1, \ldots, -c_j (\pi p(x_j) - 1), \ldots, c_{j-1}, c_{j+1} \ldots) \\
&= \pm \delta_i (\pi p(x_j) - 1) .
\end{aligned}$$

Poichè $\{\pi p(x_i)\}_{i=1}^n = \{t_j\}_{j=1}^\mu$ si ha che $(\pi p(x_i) - 1)$ divide δ_i, cosicchè , essendo $Z[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_\mu^{\pm 1}]$ un dominio a fattorizzazione unica, $\frac{\delta_i}{(\pi p(x_i) - 1)} = \pm \Delta_L$.

Dunque E_1 è del tipo $I_0 \cdot (\Delta_L)$, ove I_0 è l'ideale generato da $t_i - 1$, $1 \leq i \leq n$; abbiamo già dimostrato in 5.3.5 che $I_0 = Ker(\varepsilon)$. $\square$

Nell'osservazione che segue 5.1.7 abbiamo introdotto il polinomio di Alexander in una variabile per un link L; questo può essere ritrovato come segue. Consideriamo l'omomorfismo $\chi :< t_1 > \times \ldots \times < t_\mu > \to < t >$ definito da $\chi(t_i) = t$, $1 \leq i \leq \mu$; poniamo $N := ker(\chi \circ \pi) \lhd G$. Se $\tilde{X}$ è il rivestimento di X corrispondente a N, la successione esatta corrispondente in questo caso a $(*)$ spacca come nel caso di un nodo, dunque $\left(\chi\, \pi\, p(\frac{\partial r_i}{\partial x_j})\right)$ è una matrice di presentazione di $H_1(\tilde{X})$. Il primo ideale elementare è generato da $(t-1)\cdot\Delta_L(t,\ldots,t)$ (Δ_L essendo il polinomio di Alexander di L sopra definito).

Non è difficile provare che

$$\Delta_L(t,\ldots,t) = (t-1)^{\mu-2}\hat{\Delta}_L(t);$$

$\hat{\Delta}_L(t)$ è detto *polinomio di Hosokawa* di L.

§5.6 Il polinomio di Conway.

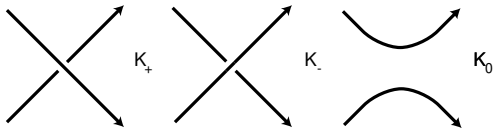
Vogliamo legare l'approccio geometrico al polinomio di Alexander a quello combinatorio, che sarà trattato nel prossimo capitolo. Manteniamo le notazioni usate fino ad ora.

Definizione 5.6.1. *Il potenziale di Conway di un link orientato K è*

$$\Omega_K(t) = \det(t^{-1}\theta - t\theta^t) \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}].$$

Proposizione 5.6.2.

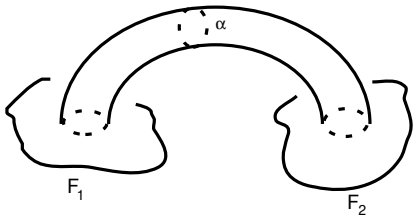
(1) *Ω_K è un invariante di K.*
(2) *Se K è un link banale con almeno due componenti allora $\Omega_K = 0$.*
(3) *$\Omega_{K_+} - \Omega_{K_-} = (t - t^{-1})\Omega_{K_0}$, ove K_+, K_-, K_0 sono diagrammi di links uguali tranne che in un incrocio, nel quale i diagrammi rispettivi sono quelli in figura:*



Dim. Per provare (1) dobbiamo mostrare che Ω_K non cambia se θ cambia per s-equivalenza. Possiamo supporre $\theta' = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$; si ha, sviluppando il determinante secondo l'ultima colonna:

$$\det\left(t^{-1}\theta' - t\theta'^t\right) = \begin{vmatrix} t^{-1}\theta - t\theta^t & 0 & -t\alpha^t \\ 0 & 0 & t^{-1} \\ t^{-1}\alpha & -t & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -t^{-1}\begin{vmatrix} t^{-1}\theta - t\theta^t & 0 \\ t^{-1}\alpha & -t \end{vmatrix} = \det(t^{-1}\theta' - t\theta'^t).$$

Riguardo (2), proviamo più generalmente che se un link è spezzato allora ha potenziale nullo. Ricordiamo che un link è spezzato se è unione di due sublinks contenuti in due 3-palle disgiunte. Supponiamo allora $K = K_1 \cup K_2$ e siano F_1, F_2 superfici di Seifert per K_1, K_2. Una superficie di Seifert F per K può ottenersi collegando F_1, F_2 con un manico:



Chiaramente $H_1(F) \cong H_1(F_1) \oplus H_1(F_2) \oplus \mathbb{Z}\alpha$; risulta poi $\theta(\alpha, x) = \theta(x, \alpha) = 0 \; \forall \, x \in H_1(F)$; siano $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ basi rispettive di $H_1(F_1)$, $H_1(F_2)$: se scegliamo $\underline{b}_1 \cup \underline{b}_2 \cup \alpha$ come base ordinata per $H_1(F)$, $t^{-1}\theta - t\theta^t$ è una matrice che ha l'ultima riga e l'ultima colonna formata da soli zeri, dunque è singolare.

Per provare (3), visto che per (1) il calcolo del potenziale è indipendente dalla superficie di Seifert, dotiamo ogni link di un diagramma e assumiamo che le superfici di Seifert usate per calcolo del potenziale siano quelle costruite con l'algoritmo di Seifert a partire dagli assegnati diagrammi. Ricordiamo che un diagramma è spezzato se è unione di due sottodiagrammi contenuti in aperti disgiunti di $\mathbb{R}^2$; è chiaro che se un link ammette un diagramma spezzato, allora è spezzato nel senso precedente. Osserviamo che se K_+ (risp. K_-) è spezzato (come diagramma), tali sono K_- (risp. K_+) e K_0 e tutto segue banalmente; se K_0 è spezzato, $\Omega_{K_0} = 0$ per (2), ma K_+ e K_- sono isotopi tramite un twist di 2π, dunque, per (1), $\Omega_{F_{K_+}} = \Omega_{F_{K_-}}$ e si ha l'asserto anche in questo caso. Siano infine K_0, K_+, K_- diagrammi tutti non spezzati; allora

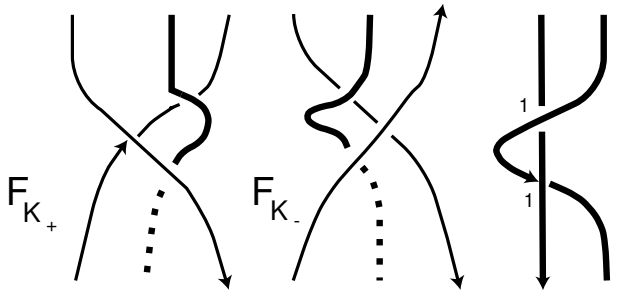
$$H_1(F_{K_+}) \cong H_1(F_{K_-}) \cong H_1(F_{K_0}) \oplus \mathbb{Z}.$$

Ciò può dedursi nel modo seguente. Assumendo come in precedenza che le superfici di Seifert in esame siano costruite tramite l'algoritmo di Seifert, siano $a_\pm$ le curve canoniche in $F_{K_\pm}$ passanti per le strisce half-twisted $S_\pm$ presenti in $F_{K_\pm}$ e non in F_{K_0}; notiamo che a_+, a_- sono essenzialmente la stessa curva: naturalmente cambiano i sollevamenti $(a_+)^+$, $(a_-)^+$. Consideriamo ora nastri $A_\pm = a_\pm \times [-\epsilon, \epsilon]$ contenenti $S_\pm$; allora il precedente isomorfismo segue dalla successione di Mayer-Vietoris in omologia ridotta[14] relativa ad $A_\pm$ e F_{K_0}, tenendo conto che $F_{K_\pm} = F_{K_0} \cup A_\pm$ e che $H_1(A_\pm) \cong \mathbb{Z}\, a_\pm \cong \mathbb{Z}$:

$$0 = H_1(F_{K_0} \cap A_\pm) \to H_1(F_{K_0}) \oplus H_1(A_\pm) \xrightarrow{\cong} H_1(F_{K_\pm}) \to \tilde{H}_0(F_{K_0} \cap A_\pm) = 0.$$

Estendiamo tramite a_+, a_- la base di $H_1(F_{K_0})$ a basi di $H_1(F_{K_+})$, $H_1(F_{K_-})$; siano poi θ_0, θ_+, θ_- forme di Seifert sulle tre superfici. L'osservazione fondamentale, chiara dalla figura, è la seguente: se $z = \theta_+(a_+, a_+)$, allora $\theta_-(a_-, a_-) = z + 1$.

[14] Per poter legittimamente applicare il teorema di Mayer-Vietoris avremmo dovuto, ad esempio, considerare la superficie senza bordo $F_K^\circ = F_K \setminus K$ e i nastri "aperti" $a_\pm \times (-\varepsilon, \varepsilon)$; lasciamo i dettagli al lettore.



Dunque

$$\theta_+ = \begin{pmatrix} \theta_0 & y \\ x & z \end{pmatrix} \qquad \theta_- = \begin{pmatrix} \theta_0 & y \\ x & z+1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \Omega_{K_+} - \Omega_{K_-} &= \det(t^{-1}\theta_+ - t\theta_+^t) - \det(t^{-1}\theta_- - t\theta_-^t) \\ &= \begin{vmatrix} t^{-1}\theta_0 - t\theta_0^t & t(x-y) \\ t^{-1}(x-y) & (t^{-1}-t)z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} t^{-1}\theta_0 - t\theta_0^t & t(x-y) \\ t^{-1}(x-y) & (t^{-1}-t)(z+1) \end{vmatrix} \\ &= (t - t^{-1})\Omega_{K_0}. \quad \square \end{aligned}$$

Corollario 5.6.3. *Se $\Delta_K(t)$ è il polinomio di Alexander di un nodo K, allora $\Delta_K(1) = \pm 1$.*

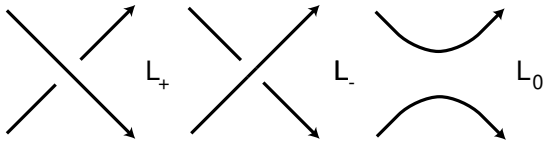
Dim. Si osservi che $\Delta_K(1) = \Omega_K(1)$; ricordiamo ora da 2.1 che ogni diagramma può essere mutato in un diagramma del nodo banale tramite un numero finito di scambi sopra-sotto agli incroci, e tali operazioni non alterano il valore in 1 di Ω, come segue dalla relazione nella parte (3) della proposizione precedente ponendo $t = 1$: ma allora, se $\mathcal{O}$ è in nodo banale, si ha:

$$\Delta_K(1) = \Omega_K(1) = \ldots\ldots = \Omega_{\mathcal{O}}(1) = 1. \quad \square$$

§6 Polinomi di Jones e HOMFLY

§6.1 Relazioni di skein e invariante universale.

L'approccio alla costruzione di invarianti polinomiali seguito in questo paragrafo può motivarsi come segue. Consideriamo un link come stato di un sistema fisico, cui si associa un certo potenziale P; diciamo poi che tre stati L_0, L_+, L_- sono in interazione elementare (ovvero *skein-correlati*) se i relativi diagrammi sono ovunque equivalenti tranne che nell'intorno di un incrocio, in cui la situazione è quella disegnata in figura.



Alle interazioni elementari corrisponde una legge di bilancio del potenziale P di tipo assegnato, che dicesi *relazione di skein*[15]:

$$a_+P(L_+) + a_-P(L_-) + a_0P(L_0) = 0.$$

ove a_+, a_-, a_0 sono elementi invertibili di un anello R. Un invariante di questo tipo si dirà *invariante di skein*. Daremo adesso alcuni notevoli esempi di invarianti di skein, poi proveremo che il dato della relazione di skein e della normalizzazione sul nodo banale definisce il polinomio su ogni nodo o link. Infine proveremo che il polinimio HOMFLY è un invariante di skein "universale" (la dimostrazione sarà completata nel paragrafo successivo).

ESEMPI

Denotiamo con $\mathcal{O}$ il nodo banale.

Polinomio di Conway. $\nabla : \mathcal{L}^+_{S^3} \longrightarrow \mathbb{K}[z]$, $\mathbb{K}$ campo.

$$\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = z\nabla(L_0)$$

$$\nabla(\mathcal{O}) = 1$$

Polinomio di Jones. $V : \mathcal{L}^+_{S^3} \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$.

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0)$$

$$V(\mathcal{O}) = 1$$

Polinomio HOMFLY[16]. $H : \mathcal{L}^+_{S^3} \longrightarrow \mathbb{Z}[v, v^{-1}, z, z^{-1}]$.

$$v^{-1}H(L_+) - vH(L_-) = zH(L_0)$$

$$H(\mathcal{O}) = 1$$

[15] Letteralmente "matassa".

[16] L'acronimo deriva dai nomi di J. Hoste, A. Ocneanu, K. Millet, P. Freyd, W. Lickorish, D. Yetter ([Fre]).

Osservazioni. **1.** Quando sarà necessario evidenziare la o le variabili di un invariante di skein P useremo la notazione $P_L(x)$ (invece di $P(L)$).
2. Per un nodo K valgono le seguenti relazioni tra il polinomio di Alexander Δ, il potenziale di Conway Ω e il polinomio di Conway ∇:

(1) $\Omega_K(t) = \nabla_K(t - t^{-1})$.
(2) $\Delta_K(t^2) \doteq \Omega_K(t)$.
(3) $\Delta_K(t) \doteq \nabla_K(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})$.

3. I polinomi di Conway e di Jones sono casi particolari del polinomio HOMFLY: basta porre $v = t^{-1}, z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ per ottenere V da H; tramite la specializzazione $v = 1$ otteniamo invece ∇.

Di contro i polinomi di Alexander (Conway) e Jones sono indipendenti, nel senso che esistono nodi con stesso polinomio di Alexander e diverso polinomio di Jones e viceversa; inoltre esistono nodi inequivalenti con polinomi di Jones e Alexander uguali. Esempi espliciti possono trovarsi in [Mur1], pagg. 226-228.

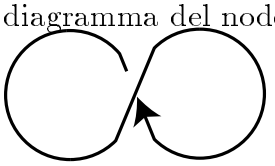
Proposizione 6.1.1. *Se $P : \mathcal{L}^+_{S^3} \to R$ è un invariante di skein, esso è univocamente determinato dai coefficienti a_+, a_-, a_0 della relazione di skein e dalla normalizzazione $P(\mathcal{O}) = 1$.*

Dim. Facciamo le seguenti osservazioni preliminari.

(1) Se $\mathcal{O}_r$ è un link banale a r componenti allora

$$P(\mathcal{O}_r) = \left(-\frac{a_+ + a_-}{a_0}\right)^{r-1}.$$

Per verificare la formula precedente basta scrivere la relazione di skein corrispondente al seguente diagramma del nodo banale:



(2) Ogni diagramma di link può essere ridotto a quello del link banale $\mathcal{O}_r$ (per qualche r) con un numero finito di scambi sopra-sotto agli incroci (cfr. 2.1).

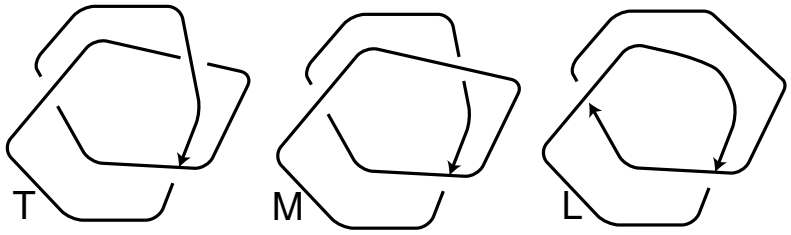
Sia ora L un diagramma di link qualsiasi; associamo ad L la coppia di interi (h_L, k_L), ove h_L è il numero degli incroci e k_L è il minimo numero di scambi sopra-sotto agli incroci necessario per rendere banale L. Consideriamo su tali coppie l'ordine lessicografico e procediamo per induzione[17]. La base dell'induzione è il contenuto della prima osservazione.

Dato L, per la seconda osservazione possiamo scegliere una successione di diagrammi $L \equiv L_0, L_1, \ldots, L_{k_L} = \mathcal{O}_r$ ove ciascun L_i differisce in un solo incrocio dal precedente e $k_{L_0} > k_{L_1} > \ldots > k_{L_{k_L}}$; in particolare, se si passa da L a L_1 invertendo un incrocio p e $\tilde{L}$ è il diagramma che si ottiene da L eliminando l'incrocio in p, L, $L_1, \tilde{L}$ sono skein-correlati. Allora $P(L)$ è induttivamente determinato dalla relazione di skein, perchè $h_{\tilde{L}} < h_L$, $k_{L_1} < k_L$. □

[17] Questo tipo di procedimento induttivo sarà ripetutamente usato anche nalle dimostrazione delle proposizioni seguenti; faremo riferimento ad esso senza dare ulteriori dettagli.

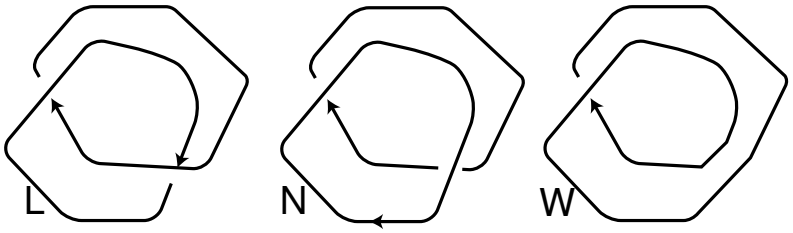
Esempio. *Se T è il trifoglio, $\nabla(T) = z^2 + 1$.*

Consideriamo i tre seguenti links:



Essi sono in "interazione elementare", dunque, in virtù della relazione fondamentale, tenendo conto che M è banale, si ha: $\nabla(T) - 1 = z\nabla(L)$.

Ora usiamo la relazione fondamentale per i links seguenti:



Poiche W è banale, risulta $\nabla(L) - \nabla(N) = z$, e poichè N è isotopo al link banale a due componenti $\nabla(N) = 0$ (cfr. la dimostrazione della proposizione 5.6.2), pertanto $\nabla(T) = z^2 + 1$.

Esercizio. *Si calcoli il polinomio di Jones per il trifoglio sinistro e il trifoglo destro (cfr. Oss. 4 in 1.3; risultato: $V_K = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$, $V_{K^*} = t + t^2 - t^3$).*

Proviamo adesso, *assumendone l'esistenza*, una proprietà di universalità per il polinomio HOMFLY. Precisamente, supponiamo che esista di un invariante di skein $\tilde{H}$ che verifica la relazione

$$v\tilde{H}(L_+) + v^{-1}\tilde{H}(L_-) + z\tilde{H}(L_0) = 0.$$

Evidentemente $\tilde{H}$ è una riparametrizzazione di H; questo cambiamento di variabili rende però più naturale la discussione seguente.

Teorema 6.1.2. *$\tilde{H}$ determina un'unico invariante di skein*

$$P : \mathcal{L}^+_{S^3} \longrightarrow \mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}, n^{\pm 1}]$$

tale che

$$lP(L_+) + mP(L_-) + nP(L_0) = 0$$

per ogni terna di diagrammi skein -correlati (L_+, L_-, L_0).

Inoltre se $P_A : \mathcal{L}^+_{S^3} \to A$ è un invariante di skein rispetto a tre elementi invertibili $a_+, a_-, a_0 \in A$ ed $s : \mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}, n^{\pm 1}] \to A$ è l'applicazione determinata da $s(l) = a_+$, $s(m) = a_-$, $s(n) = a_0$, allora $s(P(K)) = P_A(K)\ \forall K \in \mathcal{L}^+_{S^3}$.

Dim. Anzitutto proviamo che gli esponenti dei monomi che compaiono in $\tilde{H}(K)$ hanno la stessa parità : precisamente, se $\tilde{H}(K) = \sum_{a,b} x_{ab} v^a z^b$, allora $a \equiv b \, mod\, 2$.

Dalla prima osservazione nella dimostrazione della proposizione precedente otteniamo l'asserto nel caso del link banale; infatti:

$$\tilde{H}(\mathcal{O}_r) = \left(-\frac{v+v^{-1}}{z}\right)^{r-1} = \sum_{h=0}^{r-1}(-1)^h \binom{r-1}{h} v^{2h+1-r} z^{1-r}$$

Supponiamo ora che L_+, L_-, L_0 siano diagrammi skein-correlati; allora

$$\tilde{H}(L_+) = -\left(v^{-2}\tilde{H}(L_-) + v^{-1} z \tilde{H}(L_0)\right)$$

e si può concludere per induzione come in precedenza.

Definiamo ora l'invarante universale P ponendo

$$P(l,m,n) := \tilde{H}((l/m)^{1/2}, n(lm)^{-1/2}).$$

Per quanto precedentemente osservato P è effettivamente un polinomio di Laurent in l, m, n. È chiaro che $P(\mathcal{O}) = 1$; la verifica della relazione di skein per P si effettua direttamente sostituendo le variabili nella relazione di skein di $\tilde{H}$.

Se poi $P_A : \mathcal{L}^+_{S^3} \to A$ è un qualsiasi invariante di skein ed s è come nell'enunciato, il fatto che $s(P(L)) = P_A(L)$ segue per unicità , dal momento che sP e P_A soddisfano le stesse relazioni di skein relative ad a_+, a_-, a_0. □

§6.2 Algebre di Hecke e polinomio HOMFLY.

Sia $\mathbb{K}$ un campo e $q \in \mathbb{K}$. Introduciamo l'algebra di Hecke $\mathcal{H}_n$ come una q-deformazione dell'algebra gruppo del gruppo simmetrico S_n; per una sintesi di risultati e applicazioni della teoria delle algebre di Hecke in questo contesto si veda [Leh].

Definizione 6.2.1. *L'algebra di Hecke $\mathcal{H}_{q,n} \equiv \mathcal{H}_n$ è la $\mathbb{K}$-algebra associativa unitaria generata da $T_1, \ldots, T_{n-1}$ con le relazioni seguenti:*

$$\begin{aligned} &T_i T_j = T_j T_i \qquad se\ |i-j| > 1 \\ &T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \\ &T_i^2 = (q-1)T_i + q \end{aligned}$$

$(i, j \in \{1, \ldots, n-1\})$.

Osserviamo che per $q = 1$ le precedenti sono relazioni definitorie per $\mathbb{K}[S_n]$.

L'applicazione naturale $\mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1}$ induce su $\mathcal{H}_{n+1}$ una struttura di $(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n)$-bimodulo; vale il seguente teorema di struttura, che non dimostriamo (cfr [HKW], Prop. 4.1).

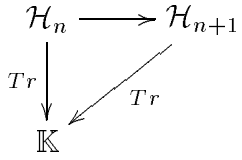
Proposizione 6.2.2. *L'omomorfismo di $(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n)$-bimoduli*

$$\Phi : \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_n \otimes_{\mathcal{H}_{n-1}} \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1}$$

definito da $\Phi(a + \sum_i b_i \otimes c_i) = a + \sum_i b_i T_n c_i$ è un isomorfismo.

Teorema 6.2.3. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, $q, r \in \mathbb{K}$ e $\mathcal{H}_n$ l'algebra di Hecke relativa a q. Esiste una traccia $Tr : \mathcal{H}_n \to \mathbb{K}$ con le seguenti proprietà :*

(1) *Tr è compatibile con l'inclusione $\mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1}$, i.e. il seguente diagramma è commutativo:*



(2) $Tr(1) = 1$.
(3) *Tr è $\mathbb{K}$-lineare e $Tr(ab) = Tr(ba)$.*
(4) *Se $a, b \in \mathcal{H}_n$, allora $Tr(aT_n b) = rTr(ab)$.*

Osservazione. L'ultima proprietà permette di calcolare Tr induttivamente; ad esempio

$$Tr(T_1) = r$$
$$Tr(T_1T_2) = Tr(T_2T_1) = r^2$$
$$Tr(T_1T_2T_1) = rTr(T_1^2) = r((q-1)r + q)$$

Dim. Definiamo una applicazione $\mathbb{K}$-lineare $Tr : \mathcal{H}_{n+1} \to \mathbb{K}$ per induzione su n, usando l'isomorfismo $\Phi : \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_n \otimes_{\mathcal{H}_{n-1}} \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1}$. Per il primo passo sia $Tr : \mathcal{H}_0 = \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ l'identità ; definiamo poi $Tr : \mathcal{H}_{n+1} \to \mathbb{K}$ ponendo

$$Tr(x) = Tr(a) + \sum_i rTr(b_i c_i)$$

se $\Phi(a + \sum_i b_i \otimes c_i) = x$. Siano $a, b \in \mathcal{H}_n$; allora $\Phi(a \otimes b) = aT_n b$ e dunque $Tr(aT_n b) = rTr(ab)$; pertanto resta da provare solo che $Tr(xy) = Tr(yx) \, \forall \, x, y \in \mathcal{H}_{n+1}$. Ragioniamo ancora per induzione su n. Usando ripetutamente la relazione $T_n^2 = (q-1)T_n + q$, possiamo assumere che x, y siano monomi contenti T_n al più una volta. Se T_n non appare in y allora o anche x non contiene T_n e l'asserto è vero per induzione oppure $x = x'T_n x''$ con x', x'' monomi in $T_1, \ldots, T_{n-1}$, e si ha

$$Tr(xy) = rTr(x'x''y) = rTr(yx'x'') = Tr(yx'T_n x'') = Tr(yx).$$

Se T_n appare in y possiamo ridurci a provare l'asserto per $x = aT_n b, \ a, b \in \mathcal{H}_n$ e $y = T_n$; bisogna discutere diversi casi, a seconda che a, b contengano o meno T_{n-1}. Supponiamo ad esempio $a = a'T_{n-1}a'', \ b = b'T_{n-1}b'', \ a', a'', b', b'' \in \mathcal{H}_{n-1}$. Si ha:

$$\begin{aligned} Tr(aT_nbT_n) &= Tr(aT_nb'T_{n-1}b''T_n) = Tr(ab'T_nT_{n-1}T_nb'') \\ &= Tr(ab'T_{n-1}T_nT_{n-1}b'') \\ &= rTr(ab'T_{n-1}^2b'') = r((q-1)Tr(ab) + qTr(ab'b'')). \end{aligned}$$

Analogamente

$$Tr(T_naT_nb) = r((q-1)Tr(ab) + qTr(a'a''b)).$$

Ora

$$Tr(ab'b'') = Tr(a'T_{n-1}a''b'b'') = rTr(a'a''b'b'')$$
$$Tr(a'a''b) = Tr(a'a''b'T_{n-1}b'') = rTr(a'a''b'b'').$$

In definitiva $Tr(aT_nbT_n) = Tr(T_naT_nb)$, come si voleva. □

Sia adesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}(q,r)$; poniamo $w := 1 - q + r$; ad ogni elemento b del gruppo delle trecce B_n associeremo un elemento $\mathcal{V}_{q,r}(b) \equiv \mathcal{V}(b)$ nell'estensione quadratica $\mathbb{K}(\sqrt{\frac{q}{rw}})$ di $\mathbb{K}$ e proveremo che $\mathcal{V}$ è invariante per mosse di Markov (cfr. §3.1), dunque è un invariante dei nodi; faremo infine vedere che a meno di un cambiamento di variabili $\mathcal{V}$ è il polinomio $\tilde{H}$.

L'osservazione fondamentale è che B_n ammette una rappresentazione in $\mathcal{H}_n$: definiamo $\rho : B_n \to \mathcal{H}_n$ sui generatori σ_i di B_n ponendo $\rho(\sigma_i) = T_i$. Ricordando la presentazione di Artin per B_n deduciamo che ρ si estende ad un omomorfismo $B_n \to \mathcal{H}_n$. Osserviamo inoltre che T_i è invertibile in $\mathcal{H}_n$: $T_i^{-1} = \frac{1}{q}(1 - q + T_i)$.

Sia infine $h : B_n \to \mathbb{Z}$ l'omomorfismo definito sui generatori canonici di B_n da $h(\sigma_i) = 1 \ \forall i = 1, \dots, n-1$; tale definizione è ben posta, come subito si vede considerando le relazioni di treccia.

Definizione 6.2.4. *Per $b \in B_n$ poniamo*

$$\mathcal{V}(b) = (1/r)^{\frac{n+h(b)-1}{2}}(q/w)^{\frac{n-h(b)-1}{2}}Tr(\rho(b)).$$

Proposizione 6.2.5. *$\mathcal{V}(b)$ è un invariante per il nodo associato a b.*

Dim. Dobbiamo provare l'invarianza di $\mathcal{V}$ per mosse di Markov; l'asserto riguardo alla prima mossa segue immediatamente dall'invarianza per coniugio di h e di Tr.

Consideriamo adesso $b\sigma_n, b \in B_n$ e osserviamo che $h(b\sigma_n^{\pm 1}) = h(b) \pm 1$; usando la proprietà (4) della traccia su $\mathcal{H}_n$ si ha:

$$\mathcal{V}(b\sigma_n) = (1/r)^{\frac{n+1+h(b)}{2}}(q/w)^{\frac{n-h(b)-1}{2}}Tr(\rho(b)T_n) = \mathcal{V}(b).$$

In modo del tutto analogo, utilizzando l'espressione esplicita di T_i^{-1} prima ricordata, deduciamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(b\sigma_n^{-1}) &= (1/r)^{\frac{n+h(b)-1}{2}}(q/w)^{\frac{n-h(b)+1}{2}}\frac{(1-q+r)}{q}Tr(\rho(b)) \\ &= (1/r)^{\frac{n+h(b)-1}{2}}(q/w)^{\frac{n-h(b)+1}{2}}\frac{w}{q}Tr(\rho(b)) = \mathcal{V}(b). \quad \square\end{aligned}$$

Proposizione 6.2.6. *Per ogni link K esiste un unico polinomio di Laurent $\tilde{H}_K(v,z) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}, z, z^{-1}]$ tale che*

$$\tilde{H}_K(i(r/w)^{1/2}, i(q^{-1/2} - q^{1/2})) = \mathcal{V}_{q,r}(b)$$

b essendo una treccia la cui chiusura è isotopa a K.

Dim. Siano $\beta, \gamma \in B_n$ e $\alpha_+, \alpha_-, \alpha_0$ le seguenti tre trecce:

$$\alpha_+ := \beta\sigma_k\gamma, \quad \alpha_- := \beta\sigma_k^{-1}\gamma, \quad \alpha_0 := \beta\gamma$$

per qualche $k \leq n-1$. Definiamo, per $b \in B_n$,

$$\mathcal{W}_(b) \equiv \mathcal{W}_{q,r}(b) = (1/r)^{\frac{n+h(b)-1}{2}}(q/w)^{\frac{n-h(b)-1}{2}}\rho(b) \in \mathcal{H}_n.$$

Lasciamo al lettore la facile verifica del fatto che, posto $v = i(r/w)^{1/2}$, $z = i(q^{-1/2} - q^{1/2})$, risulta:

$$v\mathcal{W}(\alpha_+) + v^{-1}\mathcal{W}(\alpha_-) + z\mathcal{W}(\alpha_0) = 0.$$

Prendendo la traccia di ambo i membri, deduciamo un'analoga relazione per $\mathcal{V}$:

$$v\mathcal{V}(\alpha_+) + v^{-1}\mathcal{V}(\alpha_-) + z\mathcal{V}(\alpha_0) = 0.$$

Possiamo adesso concludere la dimostrazione della proposizione.
Siano K_+, K_-, K_0 links skein-correlati; si può assumere che tali links possano presentarsi come chiusura di trecce $\alpha_+, \alpha_-, \alpha_0$ come in precedenza. Allora la relazione di skein provata sopra dà , tenendo conto di 6.2.5 e con ovvie notazioni:

$$v\mathcal{V}(K_+) + v^{-1}\mathcal{V}(K_-) + z\mathcal{V}(K_0) = 0.$$

Ragionando come al solito per induzione si prova che $\mathcal{V}$ è effettivamente un polinomio di Laurent nelle variabili v, z, dunque tutto segue. □

Osservazione. Listiamo alcune importanti proprietà del polinomio $\tilde{H}$; le non difficili dimostrazioni sono lasciate al lettore (cfr. [HKW], §7).

(1) Sia $-K$ il link ottenuto dal link orientato K invertendo l'orientazione; allora

$$\tilde{H}(K) = \tilde{H}(-K).$$

(2) Sia K^* l'immagine speculare di K; allora

$$\tilde{H}_{K^*}(l, m) = \tilde{H}_K(l^{-1}, m).$$

(3) Denotiamo con II l'unione disgiunta di due links; allora

$$\tilde{H}(K_1 \amalg K_2) = -\frac{l + l^{-1}}{m}\tilde{H}(K_1)\tilde{H}(K_2).$$

(4)

$$\tilde{H}(K_1 \# K_2) = \tilde{H}(K_1)\tilde{H}(K_2).$$

Nel caso del polinimio di Jones, che sarà discusso nel paragrafo successivo, le proprietà (1)–(4) divengono le seguenti:

$$V_{-K}(t) = V_K(t), \quad V_K(t) = V_{K^*}(t^{-1}), \quad V_{K_1 \sqcup K_2} = -(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})V_{K_1}(t)V_{K_2}(t)$$

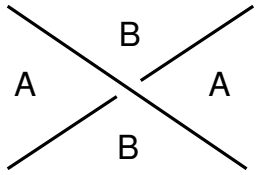
$$V_{K_1 \# K_2} = V_{K_1}(t)V_{K_2}(t).$$

In particolare *se V_K non è simmetrico come polinomio di Laurent, allora K non è amphicheiral.*

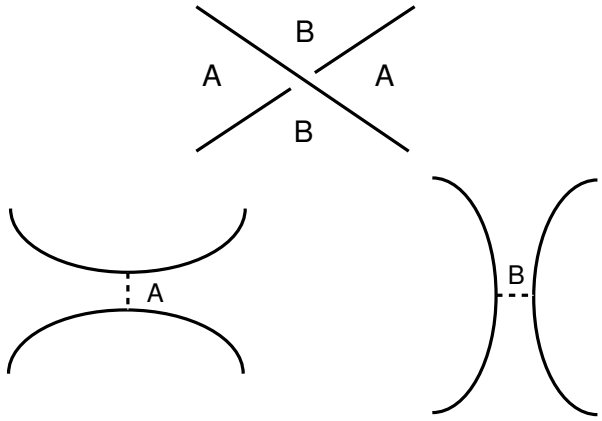
§6.3 Modelli di stato e polinomio di Jones.

Vogliamo ora descrivere la costruzione combinatoria di un invariante, il bracket di Kauffman, che si "specializza" al polinomio di Jones.

Consideriamo un incrocio in un diagramma di link: tale incrocio individua quattro regioni di due "tipi" diversi. Precisamente, diciamo che una regione è *di tipo A* se è descritta ruotando il ramo che passa sopra su quello che passa sotto in senso antiorario; altrimenti diciamo che la regione è *di tipo B*.



Dunque ad ogni incrocio possiamo attribuire delle etichette A, B (da riguardarsi nel seguito come variabili commutative). A un tale incrocio con etichette si associano naturalmente due diagrammi, ottenuti *aprendo un A-tunnel e un B-tunnel* rispettivamente:



È chiaro che da questi due diagrammi si può ricostruire l'incrocio iniziale.

Se ora consideriamo un diagramma di link K con n incroci, iterando il procedimento precedente in ogni incrocio otteniamo 2^n diagrammi di link snodati, ciascuno con un numero m di componenti $(1 \leq m \leq n)$ e con etichette che chiameremo *stati* del diagramma K.

Vogliamo costruire un invariante dei links facendo una "media" su questi stati. La costruzione si effettua in due passi: dapprima si definisce un invariante di isotopia regolare $\langle\ \rangle$ per links non orientati tramite una "funzione di partizione" per gli stati di K; imponendo l'invarianza per la seconda mossa di Reidemeister si otterranno condizioni sui coefficienti che garantiscono automaticamente l'invarianza per la terza mossa. A questo punto concluderemo la costruzione normalizzando $\langle\ \rangle$ a un invariante di isotopia ambientale di links orientati.

Sia R un anello commutativo con unità e siano A, B, d variabili commutative.

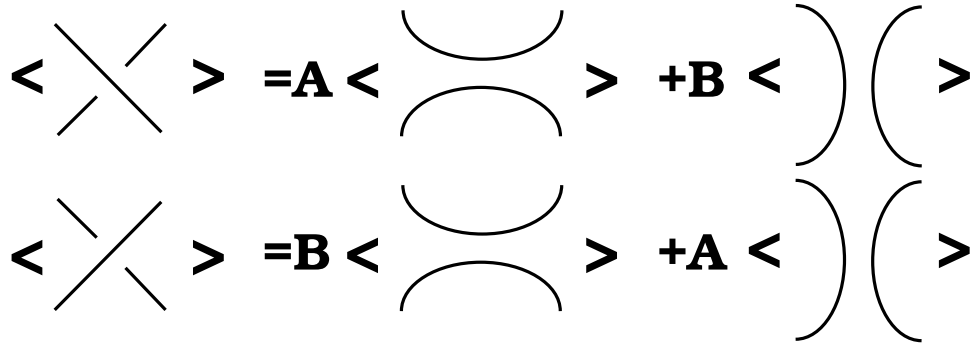
Definizione 6.3.1. *Se σ è uno stato di K definiamo*

$$\langle K, \sigma \rangle := \prod (\textit{etichette di } \sigma)\,.$$

$$\|\sigma\| := \#\,(\textit{loops in } \sigma) - 1.$$

$$\langle K\rangle := \sum_{\sigma}\langle K,\sigma\rangle d^{\|\sigma\|} \in R[A,B,d].$$

Proposizione 6.3.2.



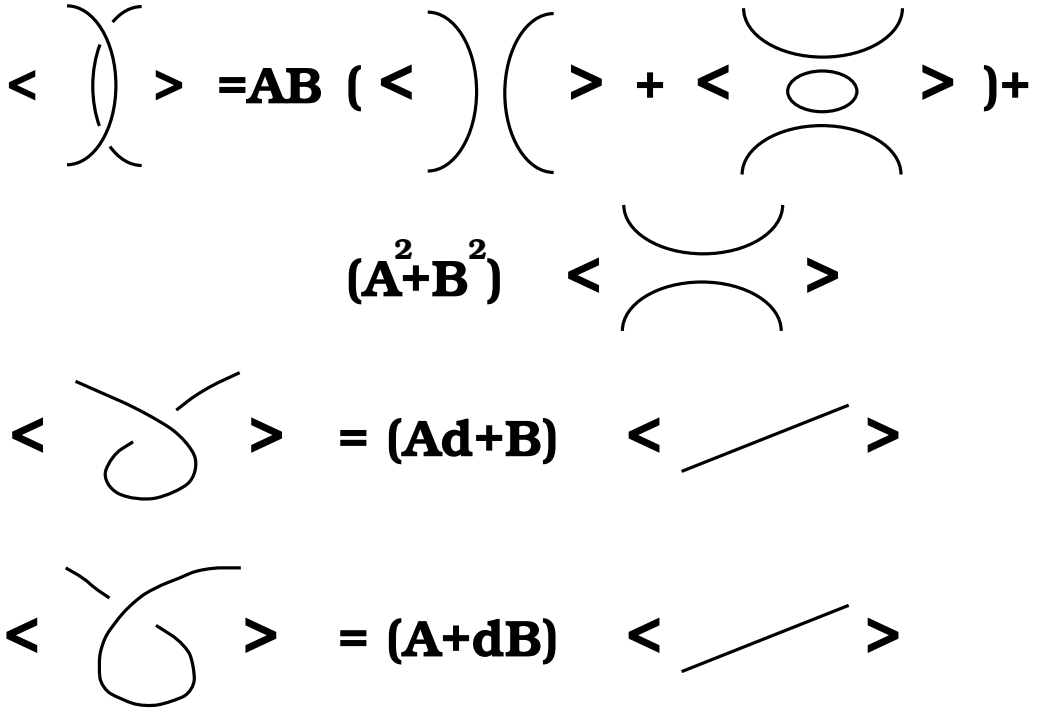
Dim. Proviamo la prima relazione. Poichè un incrocio può spezzarsi in due modi, gli stati di un diagramma K sono in corrispondenza biunivoca con l'unione degli stati di K', K'', diagrammi ottenuti da K aprendo rispettivamente un A-tunnel ed un B-tunnel in un dato incrocio. dalla definizione è ora chiaro che

$$\langle K\rangle = A\langle K'\rangle + B\langle K''\rangle.$$

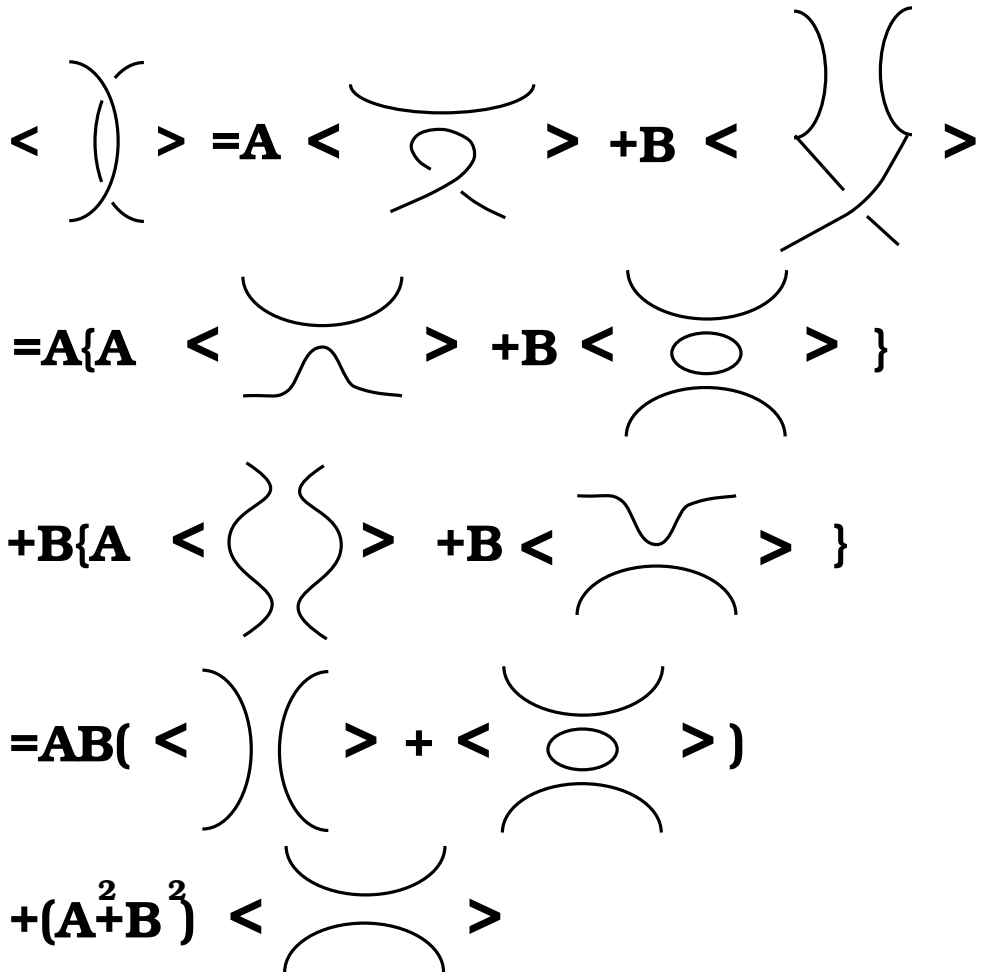
L'altra relazione si prova analogamente. □

Passiamo a verificare il comportamento del bracket di Kauffman rispetto alle mosse di Reidemeister.

Lemma 6.3.3.



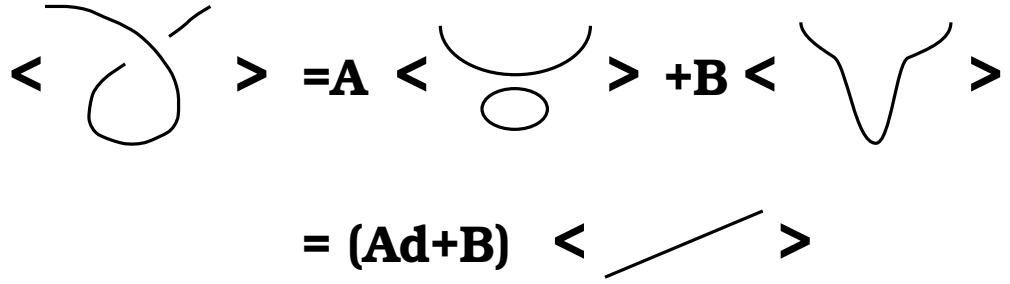
Dim.



Ciò prova la prima relazione; le restanti parti dell'enunciato seguono facilmente dalla seguente osservazione: dato un diagramma di link K

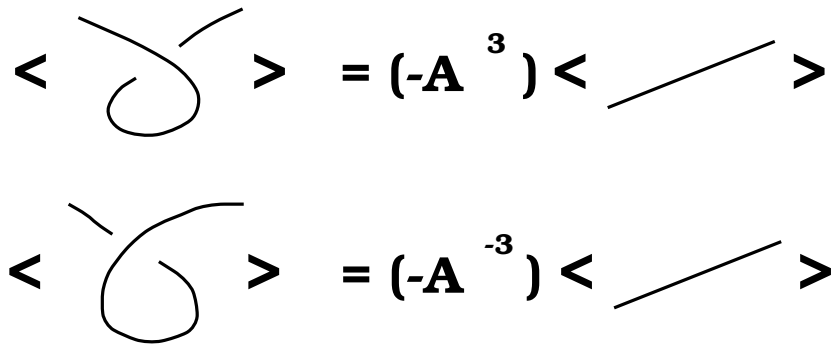
$$\left\langle O\,K\right\rangle = d\left\langle K\right\rangle$$

ove $O\,K$ denota un qualsiasi diagramma ottenuto da K aggiungendo un cerchio disgiunto. Completiamo ora la dimostrazione del lemma.

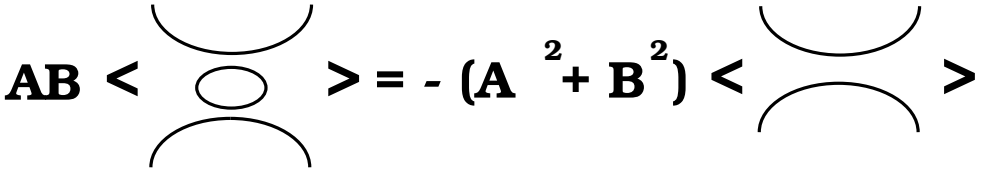


L'altra relazione si dimostra analogamente. □

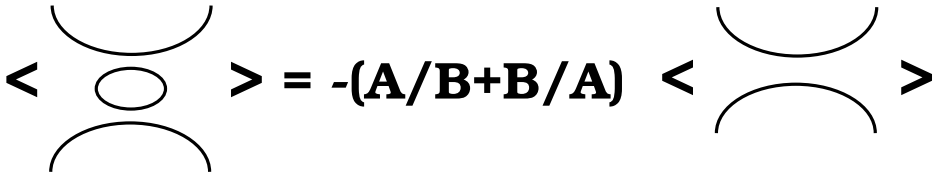
Corollario 6.3.4. *Se* $B = A^{-1}$ *e* $d = -(A^2 + A^{-2})$ *il bracket è invariante per la seconda mossa di Reidemeister. Inoltre*



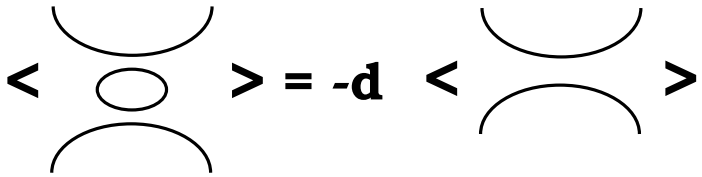
Osservazione. Vogliamo giustificare la scelta di una funzione del tipo $d^{\|\sigma\|}$ nella definizione di $\langle K \rangle$. Dalla proposizione e dal primo asserto del lemma, indipendenti da tale scelta, segue che per avere invarianza rispetto alla seconda mossa di Reidemeister deve essere $AB = 1$ e



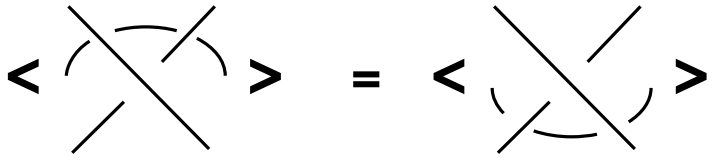
da cui



cioè

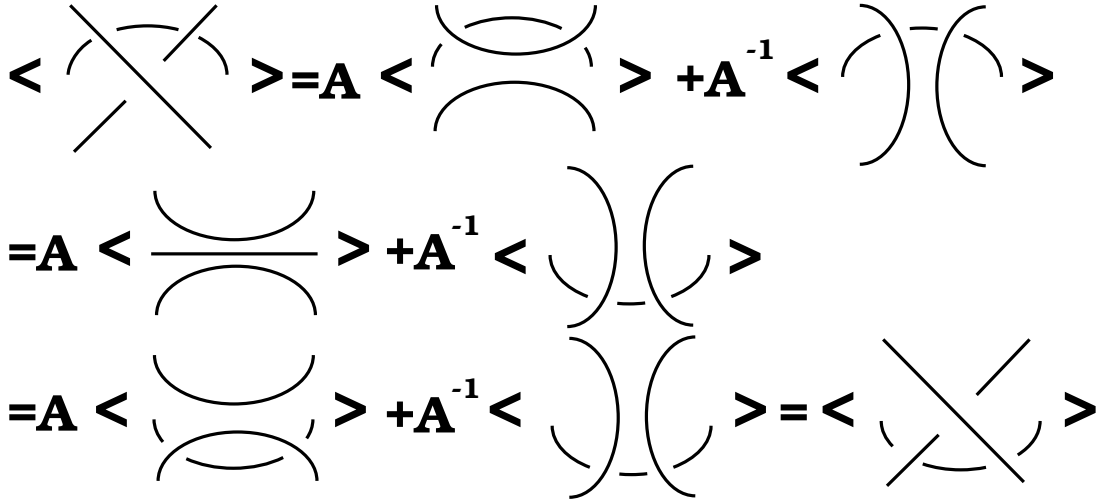


Proposizione 6.3.5. *Se* $B = A^{-1}$ *e* $d = -(A^2 + A^{-2})$ *si ha*



Corollario 6.3.6. *Il polinomio bracket è un invariante di isotopia regolare per i links.*

Dim.

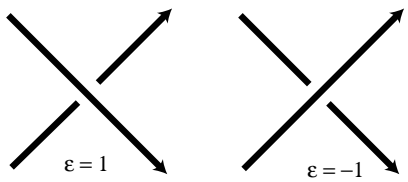


Dunque il bracket è invariante rispetto alla terza mossa di Reidemeister. L'invarianza rispetto alla "quarta mossa" (cfr. l'osservazione successiva alla def. 2.2) segue direttamente dalla relazione fondamentale e da 6.3.4. □

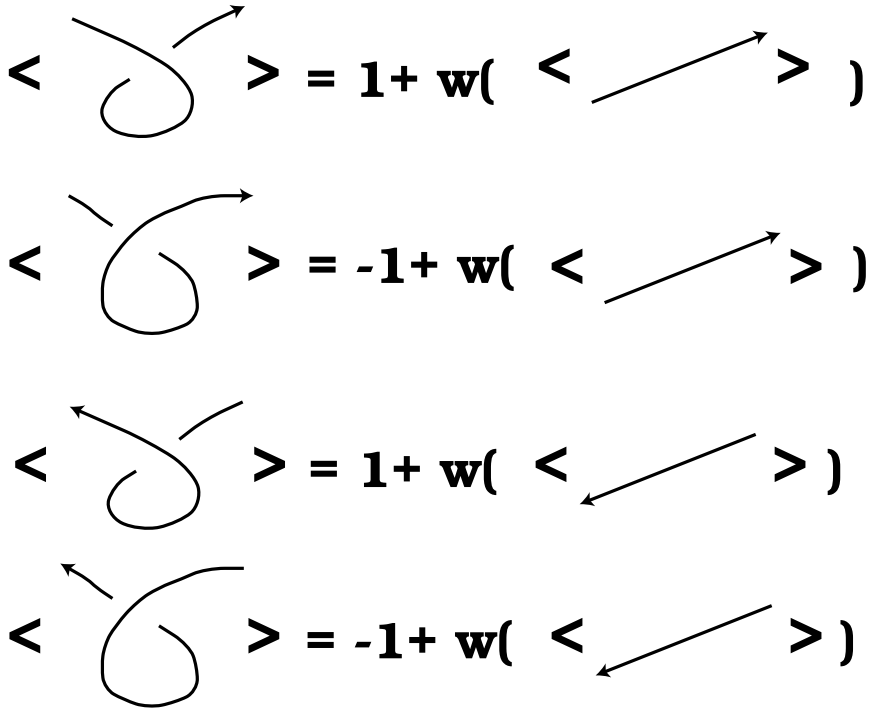
Assumiamo d'ora in avanti di essere nelle ipotesi della proposizione precedente. Vogliamo normalizzare il bracket a un invariante per isotopia ambientale dei links orientati.

Definizione 6.3.7. *Sia* K *un diagramma di link orientato e sia* I *l'insieme degli incroci. Poniamo*

$$w(K) := \sum_{p \in I} \varepsilon(p).$$



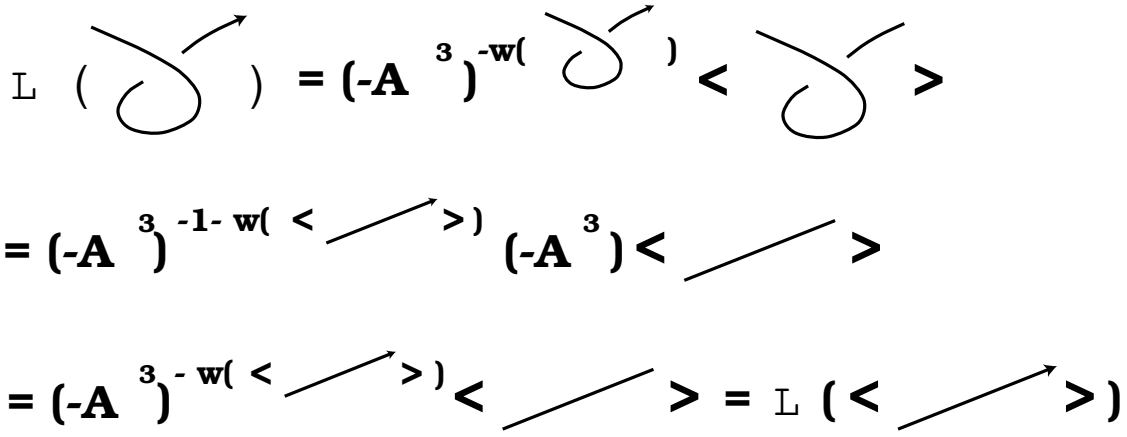
È chiaro w (che è detto *writhe*) è invariante per isotopia regolare e che



Definizione 6.3.8. *Definiamo il bracket normalizzato per links orientati come*

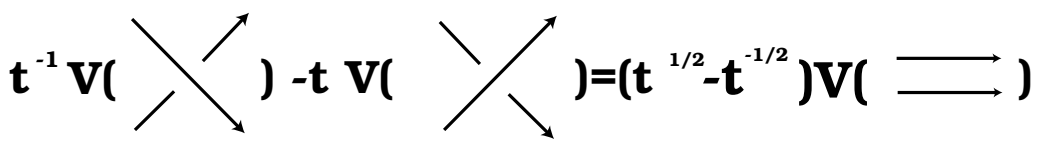
$$\mathcal{L}_K := (-A^3)^{-w(K)}\langle K\rangle.$$

Osservazione. Per definizione $\mathcal{L}_K$ è invariante per isotopia regolare; di fatto, come volevamo, è invariante anche rispetto alla prima mossa di Reidemeister:

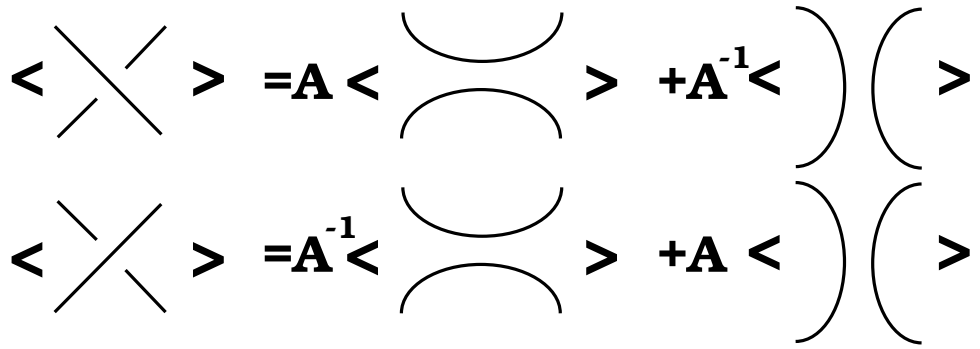


Teorema 6.3.9. *$V_K(t) = \mathcal{L}_K(t^{-\frac{1}{4}})$ è il polinomio di Jones.*

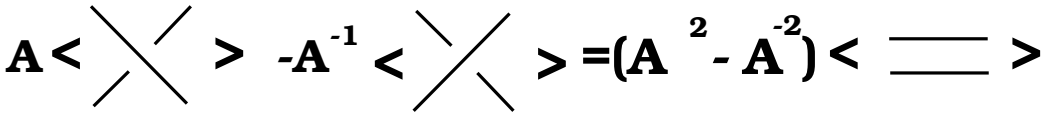
Dim. Basta chiaramente provare che vale la relazione di skein:



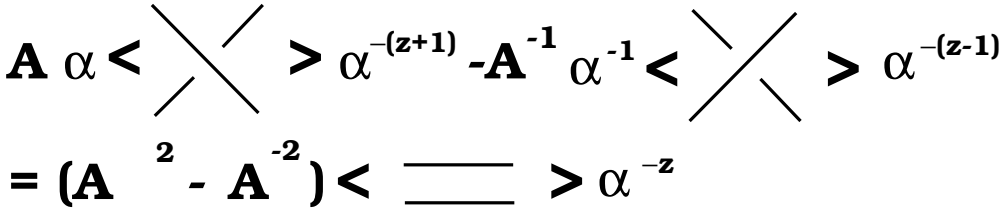
Tenendo conto che $B = A^{-1}$, da quanto visto in precedenza valgono le relazioni



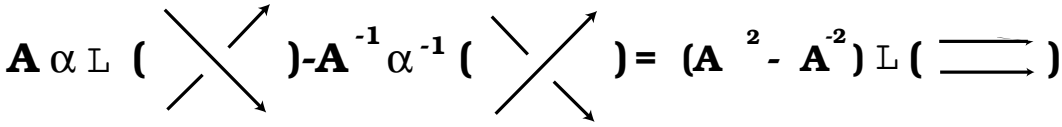
Moltiplichiamo la prima per A, la seconda per A^{-1} e sottraiamo membro a membro:



Sia z il valore della funzione w sul nodo a secondo membro della relazione di skein. Allora il valore di w sui nodi a primo membro di tale relazione è $z+1, z-1$ rispettivamente; posto $\alpha = -A^3$ si ha, moltiplicando ambo i membri della relazione precedente per α^{-z}:



Dunque



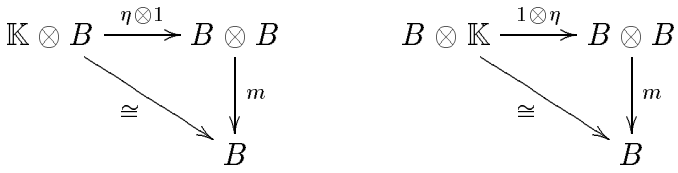
Ponendo $A = t^{-\frac{1}{4}}$ si ha l'asserto. □

§6.4 Algebre di Hopf: definizioni ed esempi.

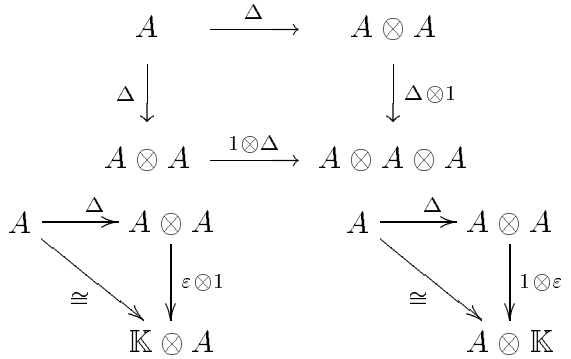
Richiamiamo le definizioni basilari della teoria delle algebre di Hopf (per maggiori dettagli si consulti [Abe]); sottolineiamo poi un'interpretazione dell'assiomatica introdotta in termini di teoria delle rappresentazioni.

Sia $\mathbb{K}$ un campo e B un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale; dare a B una struttura di $\underline{\mathbb{K}\text{-}algebra}$ significa assegnare applicazioni $m : B \otimes B \longrightarrow B$ (*moltiplicazione*) e $\eta : \mathbb{K} \longrightarrow B$ (*unità*) tali che i seguenti diagrammi commutino.

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B \otimes B & \xrightarrow{1 \otimes m} & B \otimes B \\ {\scriptstyle m \otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ B \otimes B & \xrightarrow{m} & B \end{array}$$



Dualizziamo questa nozione: una struttura di $\mathbb{K}$-*coalgebra* su un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale A è il dato di applicazioni $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ (*comoltiplicazione*), $\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{K}$ (*counità*), che facciano commutare i diagrammi ottenuti dai precedenti scambiando le frecce:



Diciamo che la comoltiplicazione Δ è *cocommutativa* se, detto $\tau : A \otimes A \to A \otimes A$ $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ lo scambio, risulta $\Delta' := \tau \circ \Delta = \Delta$.

Se poi A ammette anche una struttura di $\mathbb{K}$-algebra, possiamo chiedere che le strutture siano compatibili imponendo che Δ, ε siano omomorfismi di algebra - equivalentemente (cfr.[Abe]) che m, η siano omomorfismi di coalgebra ; in tal caso diciamo che A è una $\mathbb{K}$-*bialgebra*.

Diciamo infine che A è un'*algebra di Hopf* se è dotata di una struttura di $\mathbb{K}$-bialgebra e di un antiomomorfismo di algebre $S : A \longrightarrow A$ tale che

$$m \circ (S \otimes Id) \circ \Delta = m \circ (Id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon.$$

Gli esempi classici di algebra di Hopf sono i due seguenti.

(1) Sia G un gruppo algebrico e $A = \mathbb{K}[G]$ il suo anello delle coordinate (ovvero G gruppo finito a A la relativa algebra gruppo, G gruppo di Lie compatto e A algebra delle funzioni finite su G). Ricordando che $\mathbb{K}[G \times G] = \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G]$, definiamo, per $x, y \in G$, $f \in \mathbb{K}[G]$:

$$(\Delta f)(x, y) = f(xy),$$
$$(Sf)(x) = f(x^{-1}),$$
$$\varepsilon(f) = f(1).$$

(2) Sia $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algebra inviluppante dell'algebra di Lie complessa $\mathfrak{g}$. È sufficiente definire la struttura di Hopf sugli elementi di $\mathfrak{g}$; poniamo allora, per $x \in \mathfrak{g}$

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1,$$
$$S(x) = -x,$$
$$\varepsilon(x) = 0.$$

Notiamo che le strutture di Hopf descritte sono commutativa ma non cocommutativa nel primo caso, cocommutativa ma non commutativa nel secondo. Esempi importanti e naturali di strutture di Hopf non commutative nè cocommutative vengono dalla teoria dei Quantum Groups: discuteremo più avanti un esempio fondamentale.

Vogliamo interpretare la nozione di algebra di Hopf dal punto di vista della teoria delle rappresentazioni. Supponamo di avere un'algebra A e un insieme $\mathcal{R}$ di rappresentazioni finito-dimensionali di A; osserviamo che se $V, W \in \mathcal{R}$, $V \otimes W$ è un $A \otimes A$-modulo ma non ha in generale una struttura di A-modulo: affinchè ciò accada occorre un omomorfismo di algebre $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$, tramite il quale si può definire, per $a \in A, v \in V, w \in W$:

$$a(v \otimes w) := \Delta(a)(v \otimes w) = \sum_i a_i v \otimes b_i w$$

se $\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i$; se poi vogliamo che il prodotto tensoriale sia associativo (i.e. $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$) deve valere la relazione

$$(\Delta \otimes Id)\,\Delta = (Id \otimes \Delta)\,\Delta$$

che è esattamente l'assioma di coassociatività per Δ. Analogamente, affinchè V^* sia un A-modulo è necessario avere un antiomomorfismo di algebre S in modo tale da poter porre, per $\phi \in V^*, a \in A, v \in V$

$$(a\phi)(v) := \phi(S(a)v).$$

Se vogliamo infine definire la rappresentazione banale, ci occorre un omomorfismo di algebre $\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{C}$, tramite il quale possiamo porre

$$a\alpha = \varepsilon(a)\alpha.$$

La condizione di compatibilità tra Δ e ε è la seguente:

$$1 = (1 \otimes \varepsilon)\Delta = (\varepsilon \otimes 1)\Delta$$

che è la relazione definitoria per la counità .

Osserviamo che la finito-dimensionalità dei moduli in esame entra in gioco solo in connessione con la dualità (occorre infatti che risulti $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$).

Sia A un'algebra e sia $\mathcal{M}(A)$ la categoria i cui oggetti sono gli A-moduli e i cui morfismi sono gli omomorfismi A-lineari; sia poi $\mathcal{M}(A)_{fd}$ la sottocategoria piena degli A-moduli di dimensione finita. Con la terminologia che sarà introdotta nel capitolo 10, possiamo così riformulare la discussione precedente.

Proposizione 6.4.1. *Sia A una $\mathbb{K}$-algebra.*

(1) *Se A è dotata di comoltiplicazione Δ e counità ε, allora A è una bialgebra se e solo se $\mathcal{M}(A)$ è una categoria tensoriale.*

(2) *Se A è un'algebra di Hopf, allora $\mathcal{M}(A)_{fd}$ è una categoria tensoriale con dualità sinistra. Le mappe strutturali $\varepsilon_V : \mathbb{K} \to V \otimes V^*$, $\eta : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$ sono definite da*

$$\varepsilon_V(1) = \sum_i v_i \otimes v^i \qquad \eta_V(v^i \otimes v_j) = \delta_{ij}$$

ove $\{v_i\}$ è una base di V e $\{v^j\}$ è la corrispondente base duale di V^*.

§6.5 Algebre di Hopf quasitriangolari, Quantum Groups e polinomio di Jones.

Vogliamo costruire un invariante dei nodi definendo una "traccia" invariante per mosse di Markov. Procediamo come in §6.2, cercando una famiglia di rappresentazioni di B_n cui associare un "carattere" invariante per mosse di Markov. In effetti rimpiazzeremo la rappresentazione nell'algebra di Hecke con la rappesentazione lineare di B_n indotta da una soluzione dell'equazione di Yang-Baxter quantistica; la ricerca di soluzioni per tale equazione porterà naturalmente a considerare una classe particolare di algebre di Hopf, dette *quasitriangolari*, un esempio esplicito delle quali sarà il "quantum group" $\mathcal{U}_q(sl(2))$.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita; per $\tilde{R} \in GL(V \otimes V)$ poniamo

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{12} &:= \tilde{R} \otimes I \in GL(V^{\otimes 3}) \\ \tilde{R}_{23} &:= I \otimes \tilde{R} \in GL(V^{\otimes 3}) \end{aligned} .$$

Dalle definizioni si ottiene direttamente il seguente asserto.

Proposizione 6.5.1. *Se vale la relazione*

$$\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{23}\tilde{R}_{12} = \tilde{R}_{23}\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{23} \qquad (*)$$

allora l'applicazione $\rho : B_3 \longrightarrow GL(V^{\otimes 3})$ definita sui generatori standard di B_3 da $\rho(\sigma_1) = \tilde{R}_{12}$, $\rho(\sigma_2) = \tilde{R}_{23}$ è una rappresentazione di B_3. Analogamente, se

$$\tilde{R}_{i\,i+1} := I_{i-1} \otimes \tilde{R} \otimes I_{n-i-1} \in GL(V^{\otimes n})$$

ponendo

$$\rho(\sigma_i) = \tilde{R}_{i\,i+1},\ i = 1, \dots, n-1$$

si definisce una rappresentazione di B_n in $V^{\otimes n}$.

Si pone subito il problema di trovare soluzioni della $(*)$ (che è un'equazione cubica in almeno sedici incognite). Procediamo formalmente.

Definizione 6.5.2. *Una bialgebra A si dice quasitriangolare se esiste $R \in A \otimes A$ invertible tale che:*

(1) $R\Delta(a)R^{-1} = \Delta'(a) \quad \forall\, a \in A$
ove $\Delta' = \tau \circ \Delta$ e $\tau : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$ è lo scambio ($\tau(b \otimes c) = c \otimes b$).

(2) $(1 \otimes \Delta)R = R_{12}R_{13}$.

Drinfeld [D1] ha provato che a partire da un'algebra di Hopf finito-dimensionale A si può costruire un'algebra di Hopf quasitriangolare $D(A)$ detta *quantum double di A*.

Teorema 6.5.3. *Sia A un'algebra di Hopf finito-dimensionale e A^0 l'algebra duale A^* con comoltiplicazione opposta. Esiste un'unica algebra di Hopf quasitriangolare $(D(A), R)$ tale che:*

(1) *$D(A)$ contiene A, A^0 come sottoalgebre di Hopf.*

(2) *R è l'immagine dell'elemento canonico[18] di $A \otimes A^0$ nell'immersione $\theta : A \otimes A^0 \hookrightarrow D(A) \otimes D(A)$.*

(3) *$D(A) \cong A \otimes A^0$ (come spazi vettoriali).*

---

[18] i.e. se $j : Hom(A, A) \xrightarrow{\cong} A \otimes A^0$ e $j(Id_A) = \Phi$, allora $R = \theta(\Phi)$

Proposizione 6.5.4. *Sia A una bialgebra quasitriangolare.*

(1) *R verifica la QYBE*[19]

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

(2) *Poniamo $\tilde{R} := \tau \circ R$; allora $\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{23}\tilde{R}_{12} = \tilde{R}_{23}\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{23}$; pertanto, se V è un A-modulo, $\tilde{R}$ induce una rappresentazione di B_n in $V^{\otimes n}$.*

(3) *Siano V, W A-moduli; allora $\tilde{R} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ commuta con l'azione di A, quindi stabilisce un isomorfismo canonico $V \otimes W \cong W \otimes V$.*

Dimostrazione.

(1)

$$\begin{aligned} R_{12}R_{13}R_{23} &= (1 \otimes \Delta)(R)R_{23} = R_{23}(1 \otimes \Delta')(R) \\ &= R_{23}(1 \otimes \tau)(1 \otimes \Delta)(R) = R_{23}(1 \otimes \tau)(R_{12}R_{13}) \\ &= R_{23}R_{13}R_{12}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{12}\tilde{R}_{23}\tilde{R}_{12} &= \tau_{12}R_{12}\tau_{23}R_{23}\tau_{12}R_{12} = \tau_{12}\tau_{23}\tilde{R}_{13}R_{23}\tau_{12}R_{12} \\ &= \tau_{12}\tau_{23}\tau_{12}R_{23}R_{13}R_{12} = \tau_{23}\tau_{12}\tau_{23}R_{12}R_{13}R_{23} \\ &= \tilde{R}_{23}\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{23}. \end{aligned}$$

Abbiamo usato, fra l'altro, il fatto che i $\tau_{i\,i+1}$ verificano le relazioni di treccia - in effetti sono una rappresentazione del gruppo simmetrico S_n -.

(3)

$$\tilde{R}.a = \tilde{R}\Delta(a) = (\tau \circ R)\Delta(a) = (\tau \circ \Delta')(a)R = \Delta(a)\tilde{R} = a.\tilde{R} \quad \square$$

Una soluzione della QYBE sarà detta *R-matrice*; in termini categoriali (cfr. §10 per le definizioni) R può interpretarsi come segue.

Corollario 6.5.5. *Se (A, R) è una bialgebra quasitriangolare allora $\mathcal{M}(A)$ è una categoria tensoriale intrecciata con intrecciamento $\tilde{R} := \tau \circ R$.*

Passiamo alla costruzione della traccia di Markov; di fatto esplicitiamo una costruzione formale valida per algebre di Hopf quasitriangolari dotate di ulteriori proprietà e successivamente esibiamo un esempio di tale algebra.

(1) Sia A un'algebra di Hopf su $\mathbb{C}$ quasitriangolare e una sua rappresentazione di dimensione finita V.

[19] i.e., *Quantum Yang-Baxter equation.* Il nome deriva dal fatto che se sviluppiamo formalmente R in serie di potenze di h, $R = 1 + rh + \ldots$, allora r verifica l' equazione:

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0$$

che, nel caso in cui $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ algebra di Lie, è detta *equazione di Yang-Baxter classica.* Per una trattazione di questa teoria si veda [CP].

Lemma 6.5.6. *Siano U, V, W A-moduli e sia $\phi : W \to U$ un'applicazione A-equivariante; Allora $1 \otimes \phi : V \otimes W \longrightarrow V \otimes U$ è A-equivariante e, come tale, porta invarianti in invarianti.*

Dimostrazione. Sia $a \in A,\ \Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i,\ v \in V,\ w \in W$; allora

$$\begin{aligned} a.((1 \otimes \phi)(v \otimes w)) &= a.(v \otimes \phi(w)) = \Delta(a)(v \otimes \phi(w)) \\ &= \sum_i a_i v \otimes b_i \phi(w) = \sum_i a_i v \otimes \phi(b_i w) \\ &= (1 \otimes \phi)(\Delta(a)v \otimes w) = (1 \otimes \phi)(a.v \otimes w) \end{aligned}$$

Sia ora, in generale $\Phi : V \longrightarrow W$ A-equivariante: se $v \in V$ è invariante

$$a.\Phi(v) = \Phi(a.v) = \varepsilon(a)\Phi(v). \quad \square$$

(2) Supponiamo che V sia irriducibile e che sia dato $T \in (End\, V)^*$ invariante.

Osserviamo che $\tilde{R} \in End(V \otimes V) = End(V) \otimes End(V)$ è invariante: per $a \in A, \Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i,\ v, w \in V$ si ha, usando la parte (3) della proposizione precedente:

$$\begin{aligned} a.\tilde{R}(v \otimes w) &= \sum_i a_i\, \tilde{R}(S(b_i)\, v \otimes w) = \sum_i \Delta(a_i)\, \tilde{R}(\Delta(S(b_i))\, v \otimes w) \\ &= \sum_i \tilde{R}(\Delta(a_i)(\Delta(S(b_i))\, v \otimes w) = \tilde{R}(\sum_i \Delta(a_i S(b_i))\, v \otimes w \\ &= \tilde{R}(\Delta(\varepsilon(a))v \otimes w) = \varepsilon(a)\tilde{R}(v \otimes w). \end{aligned}$$

D'altra parte i morfismi A-equivarianti tra due A-moduli M, N coincidono con gli A-invarianti in $Hom(M, N)$; per il lemma, l'ipotesi e la precedente osservazione $(1 \otimes T)(\tilde{R})$ è invariante. Poichè V è irriducibile, dal lemma di Schur ([Hum]) si ha che gli unici invarianti in $End(V)$ sono le omotetie. Dunque

$$\begin{aligned} (1 \otimes T)(\tilde{R}) &= \delta I \\ (1 \otimes T)(\tilde{R}^{-1}) &= \zeta I. \end{aligned}$$

(3) Assumiamo δ, ζ non nulli.

Scelte $\sqrt{\delta}, \sqrt{\zeta}$, poniamo $\alpha = \sqrt{\delta}/\sqrt{\zeta}, \beta = \sqrt{\zeta}\,\sqrt{\delta}$, di modo che risulta:

$$(1 \otimes T)(\tilde{R}^{\pm 1}) = \alpha^{\pm 1}\beta I$$

(4) Supponiamo che esista $T \in (End\, V)^*$ invariante tale che per ogni $X \in End(V)$

$$T(X) = Tr(X\mu)$$

per qualche $\mu \in A$ di tipo gruppo (i.e. $\Delta(\mu) = \mu \otimes \mu$).

Osserviamo in particolare che $\tilde{R}$ commuta con l'azione di $\mu \otimes \mu$:

$$\tilde{R}\, \mu \otimes \mu = \tilde{R}\, \Delta(\mu) = \tau R \Delta(\mu) = \tau \Delta'(\mu) R = \Delta(\mu)\, \tau R = \mu \otimes \mu\, \tilde{R}.$$

Sia infine $h : B_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'omomorfismo definito sui generatori di B_n da

$$h(\sigma_i) = 1 \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Definizione 6.5.7. *Per $b \in B_n$ poniamo*

$$P_n(b) = \alpha^{-h(b)}\beta^{-n}T^{\otimes n}(\rho_n(b))$$

$\rho_n : B_n \longrightarrow GL(V^{\otimes n})$ essendo la rappresentazione di B_n indotta da $\tilde{R}$.

Teorema 6.5.8. *$P_n(b)$ è un invariante per il nodo ottenuto da b per chiusura.*

Lemma 6.5.9.

(1) $T^{\otimes n}(X) = Tr^{\otimes n}(X\,\mu \otimes \ldots \otimes \mu)$.
(2) $T^{\otimes n} = T^{\otimes n-1} \circ (I^{\otimes n-1} \otimes T)$.
(3) $\forall\, A \in End(V^{\otimes n}), \forall\, C \in End(V^{\otimes n+1})$

$$(I^{\otimes n} \otimes T)((A \otimes I) \circ C) = A(I^{\otimes n} \otimes T)C.$$

Dim. del lemma.

(1) Poichè $T^{\otimes n}$ è lineare, basta provare l'asserto su un insieme di generatori lineari come i tensori decomponibili $X = A_1 \otimes \ldots \otimes A_n,\ A_i \in End\, V$; si ha intanto $T^{\otimes n}(X) = \prod_i Tr(A_i\mu)$, dunque

$$Tr^{\otimes n}(X\,\mu \otimes \ldots \otimes \mu) = Tr^{\otimes n}(A_1\mu \otimes \ldots \otimes A_n\mu) = \prod_{i=1}^{n} Tr(A_i\mu).$$

(2) Ovvio.
(3) Ragionando come in (1), se $A = A_1 \otimes \ldots \otimes A_n, C = C_1 \otimes \ldots \otimes C_{n+1}$, si ha

$$\begin{aligned}(I^{\otimes n} \otimes T)((A \otimes I) \circ C)\,(v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n+1}) = \\ = (I^{\otimes n} \otimes T)(A_1(C_1(v_1)) \otimes \ldots \otimes A_n(C_n(v_n)) \otimes C_{n+1}(v_{n+1})) \\ = T(C_{n+1}(v_{n+1}))\, A_1(C_1(v_1)) \otimes \ldots \otimes A_n(C_n(v_n)) \\ = A(C_1(v_1) \otimes \ldots \otimes C_n(v_n)T(C_{n+1}(v_{n+1})) \\ = A(I^{\otimes n} \otimes T)C(v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n+1}). \quad \square\end{aligned}$$

Dim. del teorema. Dobbiamo verificare l'invarianza di P per mosse di Markov; per semplicità notazionale ometteremo ρ_n nelle formule quando ciò non crea ambiguità.

(1) $P_n(b) = P_n(tbt^{-1})\ \forall\, b, t \in B_n$.

$$\begin{aligned}P_n(tbt^{-1}) &= \alpha^{-h(tbt^{-1})}\beta^{-n}T^{\otimes n}(tbt^{-1}) \\ &= \alpha^{-h(b)}\beta^{-n}Tr^{\otimes n}(tbt^{-1}\mu \otimes \ldots \otimes \mu) \\ &= \alpha^{-h(b)}\beta^{-n}Tr^{\otimes n}(tb\mu \otimes \ldots \otimes \mu\, t^{-1}) \\ &= \alpha^{-h(b)}\beta^{-n}Tr^{\otimes n}(b\mu \otimes \ldots \otimes \mu) = P_n(b).\end{aligned}$$

(2) $P_n(b) = P_{n+1}(b\sigma_n) = P_{n+1}(b\sigma_n^{-1})\ \forall\, b \in B_n$.

$$\begin{aligned}P_{n+1}(b\sigma_n) &= \alpha^{-h(b\sigma_n)}\beta^{-n-1}T^{\otimes n+1}(\rho_{n+1}(b\sigma_n)) \\ &= \alpha^{-h(b)-1}\beta^{-n-1}T^{\otimes n}(I^{\otimes n} \otimes T)(\rho_n(b) \otimes I \circ \rho_{n+1}(\sigma_n)) \\ &= \alpha^{-h(b)-1}\beta^{-n-1}T^{\otimes n}(\rho_n(b) \circ (I^{\otimes n} \otimes T) \circ \rho_{n+1}(\sigma_n)) \\ &= \alpha^{-h(b)-1}\beta^{-n-1}\alpha\beta T^{\otimes n}(\rho_n(b)) = P_n(b).\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza vale in virtù delle relazione seguente:

$$(I^{\otimes n} \otimes T) \circ \rho_{n+1}(\sigma_n) = (I^{\otimes n-1} \otimes I \otimes T)(I^{\otimes n-1} \otimes \tilde{R}) \\ = I^{\otimes n-1} \otimes ((I \otimes T)(\tilde{R})) = \alpha\beta\, I^{\otimes n}.$$

L'altra relazione si prova allo stesso modo. □

Osservazione. La costruzione effettuata dipende fondamentalmente dalla quadrupla (R, μ, α, β) ove $R \in GL(V \otimes V)$ è una soluzione (invertibile) della QYBE e μ, α, β sono come in precedenza. Questo dato viene a volte detto *enhanced R-matrix* in $V \otimes V$.

Dobbiamo ora esibire una "enhanced R-matrix"; lo faremo introducendo una opportuna algebra di Hopf quasitriangolare che verifica le proprietà (1)-(4).
Sia $\mathcal{U}_q(sl(2))$ la $\mathbb{Q}(q)$-algebra con generatori E, F, K, K^{-1} e relazioni definitorie:

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1$$

$$KEK^{-1} = q^2E \qquad KFK^{-1} = q^{-2}F$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

Si verifica facilmente che $\mathcal{U}_q(sl(2))$ può dotarsi di una struttura di algebra di Hopf ponendo:

$$\Delta(K) = K \otimes K \quad \Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E \quad \Delta(F) = 1 \otimes F + F \otimes K^{-1}.$$

$$S(K) = K^{-1} \quad S(E) = -K^{-1}E \quad S(F) = -FK.$$

$$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0 \quad \varepsilon(K) = 1.$$

Osservazioni.

(1) Notiamo che $S^2 \neq Id$; in generale ciò implica (cfr. [Abe]) che la struttura di Hopf non è nè commutativa nè cocommutativa (la qual cosa può in questo caso verificarsi direttamente).
(2) Se facciamo tendere q a 1, le relazioni di $\mathcal{U}_q(sl(2))$ divengono quelle di $\mathcal{U}(sl(2))$; lo stesso accade per la struttura di Hopf.
(3) La definizione data per $sl(2)$ può generalizzarsi al caso di un'algebra di Lie semisemplice di dimensione finita $\mathfrak{g}$; si ha dunque la nozione di *Quantum group alla Drinfeld-Jimbo* $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ (cfr. [Kas]).
(4) In analogia al caso di $\mathcal{U}(sl(2))$, vale - anche per $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ - il seguente risultato (cfr. [Kas]).

Teorema 6.5.10.

(1) *Le rappresentazioni finito-dimensionali di* $\mathcal{U}_q(sl(2))$ *sono completamente riducibili.*
(2) *Per ogni coppia* $(m, \alpha) \in \mathbb{N} \times \{\pm 1\}$ *esiste un unico* $\mathcal{U}_q(sl(2))$*-modulo irriducibile* V_m^α *di dimensione* $m + 1$.

Proposizione 6.5.11. *$\mathcal{U}_q(sl(2))$ verifica le proprietà (1)-(4).*

Dim. Si può dimostrare (cfr. [D1]) che, se $K = q^H$

$$R = \sum_{n\geq 0} \frac{(1-q^2)^n q^{-\frac{n(n+1)}{2}}}{[n]!} E^n \otimes F^n \, q^{-\frac{H\otimes H}{2}}$$

è la R-matrice di $\mathcal{U}_q(sl(2))$; R è di fatto un elemento di un completamento di $\mathcal{U}_q(sl(2)) \otimes \mathcal{U}_q(sl(2))$; d'altronde ha senso su ogni rappresentazione, perchè E, F sono nilpotenti mentre $q^{-\frac{H\otimes H}{2}}$ agisce sulle rappresentazioni irriducibili con autovalori $q^{\frac{s}{2}}$, $s \in \mathbb{Z}$. Mostreremo che se $V_1^1 \equiv V_1 = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_{-1}$ è la rappresentazione bidimensionale

$$\begin{array}{lll} Hv_1 = v_1 & Ev_1 = 0 & Fv_1 = v_{-1} \\ Hv_{-1} = -v_{-1} & Ev_{-1} = v_1 & Fv_{-1} = 0 \end{array}$$

allora le proprietà (1)-(4) sono verificate da R (pensata come endomorfismo di V_1), dall'operatore $T(X) = Tr(XK^{-1})$ e dagli scalari $\alpha = q^{-3/2}, \beta = 1$.
Anzitutto osserviamo che le relazioni precedenti implicano

$$E^2 = F^2 = 0 \qquad \begin{array}{l} q^{-\frac{H\otimes H}{2}} \, v_1 \otimes v_{-1} = q^{\frac{1}{2}} v_1 \otimes v_{-1} \\ q^{-\frac{H\otimes H}{2}} \, v_{-1} \otimes v_1 = q^{\frac{1}{2}} v_{-1} \otimes v_1 \\ q^{-\frac{H\otimes H}{2}} \, v_1 \otimes v_1 = q^{-\frac{1}{2}} v_1 \otimes v_1 \\ q^{-\frac{H\otimes H}{2}} \, v_{-1} \otimes v_{-1} = q^{-\frac{1}{2}} v_{-1} \otimes v_{-1}. \end{array}$$

Dunque gli unici contributi non nulli per l'azione di R su V_1 provengono da $q^{-\frac{H\otimes H}{2}}$ e da $E \otimes F \, v_{-1} \otimes v_1$. In definitiva si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \tau R \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{\frac{1}{2}} & q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}-q) & 0 \\ 0 & 0 & q^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & q^{\frac{1}{2}} & q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}-q) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proviamo di seguito l'invarianza di $Tr(XK^{-1})$.
Sia $a \in \mathcal{U}_h(sl(2))$, $\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i$; allora

$$aTr(XK^{-1}) = Tr(\sum_i a_i X S(b_i) K^{-1}) = Tr(X \sum_i S(b_i) K^{-1} a_i).$$

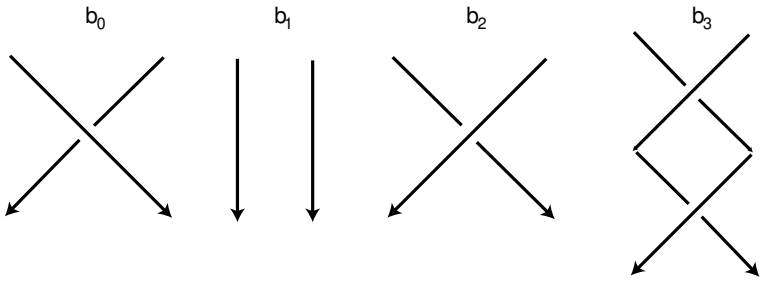
Tale espressione eguaglia $\varepsilon(a)Tr(X\,K^{-1})$ se e solo se

$$\sum_i a_i X S(b_i) K^{-1} = \varepsilon(a) K^{-1}.$$

Quest'ultima relazione si può verificare direttamente riducendosi al caso in cui a è un generatore; α, β si ricavano con un calcolo diretto. □

Sia $b \in B_n$; scriviamolo nella forma $b = \xi_1 \sigma_i \xi_2,\ \xi_1, \xi_2 \in B_n$. Poniamo:

$$b_0 := b = \xi_1\sigma_i\xi_2 \qquad b_1 := \xi_1\xi_2 \qquad b_2 = \xi_1\sigma_i^{-1}\xi_2 \qquad b_3 = \xi_1\sigma_i^{-2}\xi_2 \ldots$$



Teorema 6.5.12. *Esistono scalari $u_0, \ldots, u_s$ tali che, per ogni $b \in B_n$:*

$$\sum_{i=0}^{s} u_i P_n(b_i) = 0.$$

Dimostrazione. Sia $\pi(x) = \sum_{i=0}^{s} a_i x^{s-i}$ il polinomio minimo di R; poichè R è invertibile, la relazione $\pi(R) = 0$ può scriversi:

$$R + a_1 I + a_2 R^{-1} + \ldots + a_s R^{-s+1} = 0.$$

Chiaramente, un'analoga relazione vale per $\tilde{R}_{i,i+1}\ \forall\, i = 1, \ldots, n-1$. Se, come in precedenza, $b = \xi_1\sigma_i\xi_2$ si ha $\rho_n(b) = \rho_n(\xi_1)\tilde{R}_{i,i+1}\rho_n(\xi_2)$, dunque

$$\rho_n(\xi_1)\pi(\tilde{R}_{i,i+1})\rho_n(\xi_2) = \rho_n(b) + a_1\rho_n(b_1) + \ldots a_s\rho_n(b_s) = 0.$$

Dal momento che $h(\xi_1\sigma_i^{-p}\xi_2) = h(b) - p - 1$, si ha:

$$\alpha^{-h(b)} T^{\otimes n}(\xi_1\sigma_i^{-p}\xi_2) = \alpha^{-p-1} P_n(\xi_1\sigma_i^{-p}\xi_2).$$

Tenendo conto di questa osservazione, applichiamo $\alpha^{-h(b)}T^{\otimes n}$ alla relazione precedente; otteniamo

$$P_n(b) + \alpha^{-1}a_1 P_n(\xi_1\xi_2) + \ldots + \alpha^{-s}a_s P_n(\xi_1\sigma_i^{-s+1}\xi_2)$$

$$= P_n(b) + \alpha^{-1}a_1 P_n(b_1) + \ldots + \alpha^{-s}a_s P_n(b_s) = 0.$$

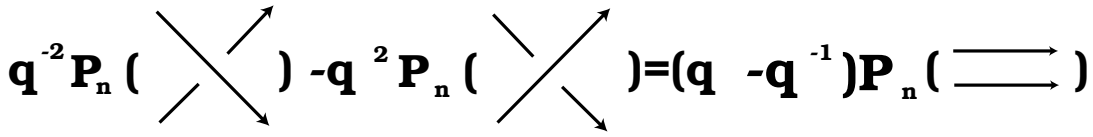
che è una relazione del tipo voluto. □

Corollario 11.2.13. *Con le specifiche della proposizione precedente, P_n è il polinomio di Jones.*

Dimostrazione. Il polinomio minimo di $\tilde{R}$ è $(x + q^{\frac{1}{2}})(x - q^{\frac{3}{2}})$; dunque

$$\tilde{R} - q^{-\frac{1}{2}}(q - q^{-1}) - q\tilde{R}^{-1} = 0$$

Poichè $\alpha = q^{-\frac{3}{2}}$, la formula precedente dà



Con la sostituzione $q \mapsto q^{-\frac{1}{2}}$ otteniamo l'asserto. □

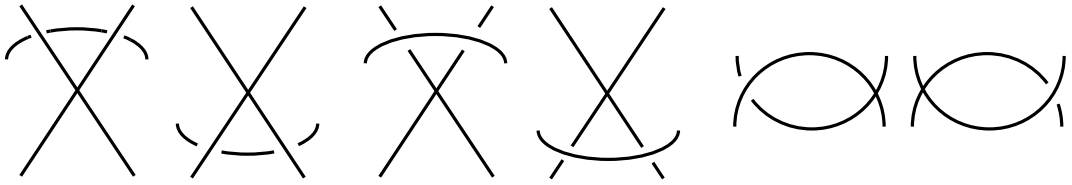
Osservazione. Abbiamo già sottolineato all'inizio del paragrafo la stretta analogia tra la costruzione effettuata e quella sviluppata in §6.2; tale analogia può formalizzarsi rigorosamente tramite il teorema di dualità di Schur quantistico [Ji], in base al quale l'algebra di Hecke $\mathcal{H}_{q,n}$ è il centralizzatore dell'azione del quantum group $\mathcal{U}_q(sl_{n+1})$ su $V^{\otimes k}$ quando $n \geq k$ ($V = \mathbb{C}(q)^{n+1}$ è la rappresentazione fondamentale di $\mathcal{U}_q(sl_{n+1})$).

Parte II: Invarianti di Vassiliev

§7 Invarianti finiti

§7.1 Definizioni fondamentali.

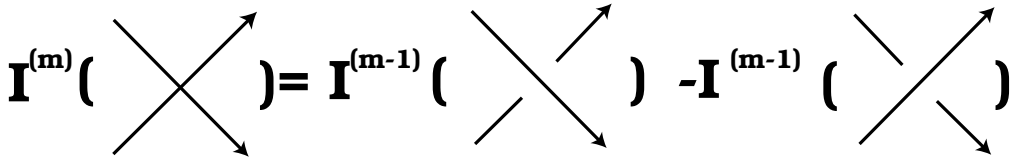
Introduciamo ora la nozione fondamentale di *invariante di tipo finito*. Consideriamo per questo curve non regolari ma con incroci trasversali. Precisamente consideriamo immersioni $\phi : S^1 \to \mathbb{R}^3$ che siano differenziabili con vettore tangente non nullo per ogni valore del parametro. Diciamo che $p \in \phi(S^1)$ è una *autointersezione trasversale* se $p = \phi(x)$ per esattamente due valori distinti del parametro x e se i vettori tangenti relativi ad i due rami della curva in p sono linearmente indipendenti. Chiameremo concisamente nel seguito *"curva con autointersezioni"* un'immersione con autointersezioni trasversali. La corretta nozione di isotopia per curve con autointersezioni è la cosiddetta *isotopia a vertici rigidi* (cfr. [BL]): si richiede che l'isotopia fissi non solo le autointersezioni ma anche dei piccoli dischi contenenti ciascuno un'autointersezione P e i due rami del nodo in un intorno di P. Per comprendere la differenza, consideriamo un trifoglio destro e un trifoglio sinistro; facciamo degenerare due incroci corrispondenti in un'autointersezione Q: le curve ottenute sono isotope tramite un'isotopia che fissa Q, ma nessuna tale isotopia fissa un disco intorno a Q. In termini di equivalenza tra diagrammi, alle ordinarie mosse di Reidemeister bisogna aggiungere le seguenti:



Vogliamo anzitutto descrivere un procedimento per estendere, per ogni intero positivo m, un invariante I dei nodi, a valori reali, ad una funzione $I^{(m)}$ definita su tutte le curve regolari con m autointersezioni trasversali.

Per questo fissiamo una tale curva $\mathcal{C}$. Data una autointersezione trasversale ordiniamo arbitrariamente i due rami della curva passanti per p e siano v_1, v_2 i rispettivi vettori tangenti. Sia $\mathcal{C}_{p+}$ (risp. $\mathcal{C}_{p-}$) la curva ottenuta da $\mathcal{C}$ nel modo seguente. Si stacca il primo ramo e si *alza* (risp. si *abbassa*) dal piano $< v_1, v_2 >$ nella direzione e verso di $v_1 \wedge v_2$. Poiché se scambiamo l'ordine dei due rami si inverte anche $v_1 \wedge v_2$ è chiaro che le definizioni poste non dipendono dall'ordinamento dei rami. Le due curve $\mathcal{C}_{p+}$, $\mathcal{C}_{p-}$ possono evidentemente essere scelte regolari con esattamente $m-1$ incroci. Definiamo allora induttivamente:

$$I^{(m)}(\mathcal{C}) := I^{(m-1)}(\mathcal{C}_{p+}) - I^{(m-1)}(\mathcal{C}_{p-}).$$



Osserviamo che l'applicazione $I \to I^{(m)}$ è lineare. Inoltre $I^{(1)}$ opera come una derivata, nel senso che $(FG)^{(1)}(\mathcal{C}) = F^{(1)}(\mathcal{C})G(\mathcal{C}_{p+}) + F(\mathcal{C}_{p-})G^{(1)}(\mathcal{C})$.

Possiamo anche procedere in un solo passo; se $p_1, \ldots, p_m$ sono le autointersezioni di $\mathcal{C}$ e $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ è una sequenza di segni $\pm$ denotiamo $\mathcal{C}_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m}$ la curva ottenuta da $\mathcal{C}$ staccando tutte le autointersezioni indipendentemente secondo la regola precedente e scegliendo in p_i il segno ϵ_i. Evidentemente $\mathcal{C}_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m}$ è un nodo e risulta:

$$I^{(m)}(\mathcal{C}) = \sum_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m} \epsilon_1 \ldots \epsilon_m I(\mathcal{C}_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m}), \qquad (*)$$

ove la somma è estesa a tutte le 2^m possibili scelte di segni.

Definizione 7.1.1. *Un invariante I si dice di ordine $\leq m$ se $I^{(m+1)} = 0$; si dice finito se ha ordine m per qualche intero m.*

Denotiamo con V_m l'insieme degli invarianti reali di ordine $\leq m$; le seguenti osservazioni sono evidenti.

(1) *V_m è uno spazio vettoriale.*
(2) $V_0 \subset V_1 \cdots \subset V_m \subset V_{m+1} \ldots$.

Possiamo considerare anche lo *spazio degli invarianti finiti* $\mathcal{V} = \oplus_{m\geq 0} V_m$; da (2) deduciamo che $\mathcal{V}$ ha una filtrazione naturale.
Osservazioni.

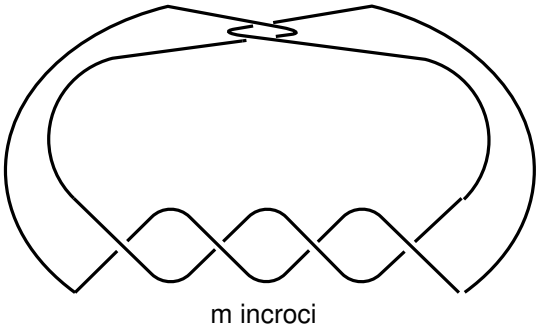
(1) La definizione di invariante finito che abbiamo presentato è una riformulazione combinatoria dovuta a Birman e Lin (cfr. [BL]) di una nozione introdotta da Vassiliev [Vas]. La breve discussione che segue è tratta da [A2]; per una introduzione alla teoria di Vassiliev si veda [Fe].

Vassiliev studia, adottando un punto di vista non inusuale in teoria delle singolarità , i nodi come componenti connesse nello spazio $\mathcal{F}$ di tutte le applicazioni differenziabili $S^1 \to \mathbb{R}^3$. $\mathcal{F}$ contiene una varietà Σ, detta *varietà discriminante*, costituita dalle immersioni che non sono embeddings; Σ è un'ipersuperficie e $\mathcal{F} \setminus \Sigma$ è lo spazio dei nodi. Osserviamo che, per definizione, $H^0(\mathcal{F}\setminus\Sigma)$ è lo spazio delle funzioni localmente costanti su $\mathcal{F}\setminus\Sigma$, dunque è l'anello degli invarianti dei nodi. A meno di approssimare $\mathcal{F}$ con spazi finito-dimensionali (ad esempio polinomi trigometrici di grado non superiore ad un certo n), la dualità di Alexander (4.2) permette di ridurre lo studio della coomologia dello spazio dei nodi a quello della omologia della varietà discriminante. Il vantaggio di questo approccio consiste nel fatto che Σ ha una stratificazione naturale data dalla "gerarchia" delle singolarità e questa stratificazione induce una struttura ulteriore in $H_*(\Sigma)$ che è presente anche in $H^*(\mathcal{F} \setminus \Sigma)$: ciò porta naturalmente a studiare quelli che abbiamo chiamato invarianti finiti.

(2) Nella prossima proposizione proviamo che i coefficienti del polinomio di Alexander-Conway sono invarianti di tipo finito, e lo stesso accade per il polinomio di Jones $V(t)$ pur di espandere opportunamente in serie la variabile t. In [BL] si provano risultati simili per il polinomio HOMFLY e gli invarianti dedotti dalla teoria dei quantum groups.

Peraltro esistono invarianti non finiti: mostriamo infatti, seguendo [BL], che il numero di snodamento u, introdotto in §2 (vedi anche [Kaw], cap. 11) non è un invariante di tipo finito.

Si consideri infatti il "double" (cfr. l'oss. 1 in §5.3) del nodo banale:



Sostituiamo ogni incrocio in basso con un'autointersezione ottenendo una curva K^m con m autointersezioni. Affermiamo che se $m = 4p$ allora

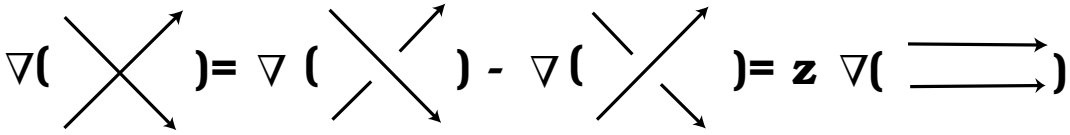
$$(**) \qquad u^{(m)}(K^m) = 2 \sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i \binom{4p}{i},$$

che è non zero per valori arbitrariamente grandi di p (la successione dei binomiali è crescente e i termini della somma sono $2p$, cosicchè $u^{(m)}(K^m) < 0$); pertanto u non è un invariante di tipo finito. Per provare la $(**)$ osserviamo che, per ogni p, i nodi del tipo in figura sono non banali; d'altra parte invertendo uno dei due incroci in alto essi divengono evidentemente banali. Risolvendo le autointersezioni di K^m si ottiene un nodo non banale quando il numero di twists è non zero; ciò accade precisamente quando nella sequenza $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)$ in $(*)$ non ci sono lo stesso numero di segni + e −; per l'osservazione precedente tali nodi hanno numero di snodamento pari a 1, dunque dobbiamo contare e sommare, con i segni opportuni, il numero di m-ple con q segni +, $q = 0, \ldots, 2p-1$: in tal modo otteniamo la $(**)$.

Proposizione 7.1.2.

(1) *Ogni coefficiente del polinomio di Conway è un invariante di tipo finito.*
(2) *Nel polinomio di Jones poniamo $t = e^h$ e espandiamo in serie di Taylor ; i coefficienti dell'espansione sono invarianti di tipo finito.*

Dim. Denotiamo ancora con ∇ l'estensione del polinomio di Conway alle curve con autontersezioni. Utilizzando la relazione di skein caratterizzante ∇ otteniamo



Pertanto se la curva $\mathcal{C}$ in esame ha più di m autointersezioni, $\nabla(\mathcal{C})$ è divisibile almeno per z^{m+1} e il coefficiente di z^m svanisce. L'idea per quanto riguarda il polinomio di Jones è la stessa; dalla relazione $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0)$ deduciamo, dopo aver posto $t = e^h$ e sviluppato in serie di Taylor rispetto ad h:

$$V(L_+) - V(L_-) = h\, A(h).$$

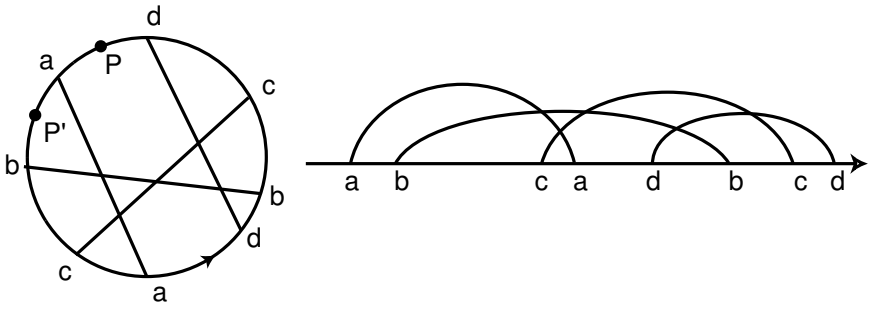
dunque possiamo concludere con lo stesso argomento usato in precedenza. □

§7.2 Diagrammi di corde.

Cominciamo ora ad analizzare la natura degli spazi V_m, osservando che data una curva ϕ con m autointersezioni, essa determina m coppie disgiunte di punti in S^1, cioè le coppie a, a' per cui $\phi(a) = \phi(a')$. A parte la complessità di allacciamento della curva nello spazio vi è una complessità nella posizione relativa di tali coppie. Per studiare questo tipo di oggetti introduciamo le seguenti definizioni.

Definizione 7.2.1. *Un diagramma di m corde in S^1 (risp. in $\mathbb{R}$) consiste nel dato di un cerchio orientato C (una retta orientata r) e di m coppie di punti distinti su C (su r), riguardati a meno di diffeomorfismi che preservano l'orientazione.*

In modo evidente un diagramma di corde viene rappresentato geometricamente tracciando le m corde congiungenti le coppie selezionate.



Se tagliamo la circonferenza C di un diagramma di m corde su S^1 in un punto P distinto dagli estremi delle corde otteniamo un diagramma di m corde in $\mathbb{R}$. Consideriamo allora un alfabeto ordinato di m lettere e costruiamo la parola ottenuta etichettando gli estremi sinistri delle corde con le lettere dell'alfabeto in ordine crescente, i due estremi della stessa corda con la stessa lettera e poi leggendo la parola nell'ordine crescente dei $2m$ punti dati. Otteniamo in tal modo le parole caratterizzate dalle proprietà seguenti:

(1) ognuna delle m lettere appare esattamente 2 volte;
(2) se una lettera x appare in una posizione, tutte le lettere precedenti ad x appaiono necessariamente almeno una volta a sinistra di x.

Esempi:

$m = 1$ $\quad aa$

$m = 2$ $\quad aabb,\ abab,\ abba$

$m = 3$ $\quad aabbcc,\ ababcc,\ abbacc,\ abbcac,\ abbcca$
$\quad aabcbc,\ abacbc,\ abcabc,\ abcbac,\ abcbca$
$\quad aabccb,\ abaccb,\ abcacb,\ abccab,\ abccba.$

Esplicitiamo la costruzione ricorsiva di queste parole, provando contemporaneamente che vi sono esattamente $(2m-1)!!$ parole di questo tipo con m lettere. Dato m, si costruiscono le parole nell'alfabeto di $m-1$ lettere $a_2, \ldots, a_m$ verificanti le precedenti condizioni; tali parole hanno lunghezza $2m-2$ (e per induzione sono in numero di $(2m-3)!!$). Si aggiunge una prima lettera a_1 all'alfabeto, si posiziona

a_1 arbitrariamente in ogni parola scritta - in $2m-1$ modi distinti - e si completa poi con una seconda lettera a_1 posizionata all'inizio. Si ottengono quindi $(2m-1)!!$ parole distinte (di lunghezza $2m$) con m lettere. Indichiamo con $\mathcal{D}_{m,\mathbb{R}}$ l'insieme di tali parole. Abbiamo dimostrato il seguente

Lemma 7.2.2. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra i diagrammi di m corde su $\mathbb{R}$ e l'insieme $\mathcal{D}_{m,\mathbb{R}}$. In particolare la cardinalità dell'insieme dei diagrammi di m corde sulla retta è $(2m-1)!!$.*

Scegliamo un diagramma di corde su S^1, un punto P su cui tagliare e sia aM la parola corrispondente. Se tagliamo S^1 in un punto P' fra il primo ed il secondo vertice di corda successivi a P nel verso antiorario la nuova parola aM' si ottiene da aM nel modo seguente. Se $M = aQ$ allora $aM' = aQa$, altrimenti si deve considerare la parola Ma; questa non soddisfa piú la condizione (2) ma è possibile effettuare un'unica sostituzione (che lasciamo descrivere al lettore) delle lettere dell'alfabeto in modo da soddisfare (2).[20]

In definitiva le parole devono pensarsi come cicliche ed a meno dell' equivalenza descritta. Ad esempio, relativamente al diagramma di corde nella precedente figura, tagliando in P il diagramma di corde su S^1 sulla sinistra si ottiene il diagramma di corde in $\mathbb{R}$ a destra, cui è associata la parola $abcadbcd$, ma anche (tagliando in P') la parola $abcdabdc$: si passa da una parola all'altra tramite il procedimento descritto: $abcadbcd \to bcadbcda \to abcdabdc$.

In definitiva, se denotiamo con $\approx$ la precedente relazione di equivalenza, dal lemma possiamo dedurre che l'insieme $\mathcal{D}_m := \mathcal{D}_{m,\mathbb{R}}/\approx$ è in corrispondenza biunivoca con i diagrammi di m corde su S^1. Di qui in avanti denoteremo con $\mathcal{D}_m$, $\mathcal{D}_{m,\mathbb{R}}$ gli insiemi dei diagrammi di m corde su S^1, $\mathbb{R}$ rispettivamente.

Analizziamo più in dettaglio la struttura dei diagrammi di corde in $\mathbb{R}$. Anzitutto osserviamo che essi possono prendersi come base di uno spazio vettoriale graduata $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \oplus_{m\geq 0}\mathcal{D}_{m,\mathbb{R}}$. Proveremo nel seguito il seguente fatto

Proposizione 7.2.3. *$\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ ammette una struttura di bialgebra.*

La moltiplicazione si effettua giustapponendo due diagrammi uno dopo l'altro; in particolare i diagrammi di corde su $\mathbb{R}$ sono un monoide associativo che ha per unità il diagramma con 0 corde.

La comoltiplicazione Δ di un diagramma D si ottiene colorando con due colori s, d (sinistra e destra) le m corde in tutti i 2^m modi possibili e sommando i 2^m termini ottenuti:

$$\Delta(D) := \sum_C D^{C(s)} \otimes D^{C(d)}$$

dove C varia su tutte le colorazioni e $D^{C(x)}$ indica il sottodiagramma delle corde colorate con x.

La counità è $\varepsilon(D) = 0$ se D ha $m > 0$ corde e $\varepsilon(1) = 1$.

[20] si ordina l'alfabeto come segue: prima tutte le lettere che appaiono prima della seconda occorrenza di a in M, poi a e poi le rimanenti; si sostituiscono poi le lettere così ordinate con le lettere dell'alfabeto nell'ordine usuale.

Gli assiomi di bialgebra si verificano facilmente. Ad esempio, per la coassociatività si verifica immediatamente che sia $\Delta \otimes 1 \circ \Delta$ che $1 \otimes \Delta \circ \Delta$ si descrivono come segue. Si colorano in tutti i modi possibili le corde con tre colori a, b, c e si ha

$$\Delta \otimes 1 \circ \Delta(D) = 1 \otimes \Delta \circ \Delta(D) = \sum_C D^{C(a)} \otimes D^{C(b)} \otimes D^{C(c)}$$

dove C varia ancora su tutte le colorazioni. Risulta anche chiaro che il coprodotto rispetta la gradazione ed è cocommutativo.

Che Δ sia un omomorfismo di algebre è immediato, in quanto le colorazioni della giustapposizione di due diagrammi sono in corrispondenza biunivoca con le coppie di colorazioni dei due diagrammi e quindi

$$\Delta(D_1 D_2) = \sum_{C_1, C_2} D_1^{C_1(s)} D_2^{C_2(s)} \otimes D_1^{C_1(d)} D_2^{C_2(d)} = \Delta(D_1)\Delta(D_2).$$

La proprietà di counità (a destra, ad esempio) segue da

$$1 \otimes \varepsilon\Delta(D) = \sum_C D^{C(s)} \varepsilon(D^{C(d)}) = D$$

in quanto $D^{C(s)}\varepsilon(D^{C(d)})$ è diverso da 0 solo se nessuna corda ha il colore d, ed allora $D^{C(s)} = D$.

Osserviamo che in $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ si può induttivamente definire un antipodo nel modo seguente. Sia D un diagrama di corde con $\Delta(D) = \sum_C D^{C(s)} \otimes D^{C(d)}$; se D è il diagramma con 0 corde poniamo $S(D) := D$, altrimenti definiamo:

$$S(D) := -D - \sum_{C'} S(D^{C'(s)}) D^{C'(d)}$$

ove la somma è estesa a tutte le colorazioni C' che contengono entrambi i colori s, d. La dimostrazione del fatto che S è effettivamente un antipodo consiste nel verificare le identità

$$\sum_C S(D^{C(s)}) D^{C(d)} = \sum_C D^{C(s)} S(D^{C(d)}) = \eta(\varepsilon(D)) = \begin{cases} D & \text{se } D = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Proviamo ad esempio la prima; se $D = 1$, $\Delta(D) = D \otimes D$ e tutto segue; altrimenti la relazione voluta si deduce immediatamente applicando $m(S \otimes Id)$ a

$$\Delta(D) = \sum_C D^{C(s)} \otimes D^{C(d)} = D \otimes 1 + 1 \otimes D + \sum_{C'} D^{C'(s)} \otimes D^{C'(d)}.$$

Osserviamo che la comoltiplicazione e la counità precedentemente introdotte si trasportano, con le medesime proprietà , ai diagrammi di corde sul cerchio. Questi non hanno d'altra parte una struttura naturale di algebra: tale struttura sarà ottenuta solo dopo avere imposto delle relazioni che seguiranno dalla discussione successiva.

§7.3 Relazioni tra invarianti finiti.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come sia possibile associare ad una curva $\phi : S^1 \to \mathbb{R}^3$ con m autointersezioni un diagramma di corde D su S^1; precisamente $a, a' \in D$ sono uniti da una corda se e solo se $\phi(a) = \phi(a')$.

Torniamo ora allo spazio V_m e osserviamo che per definizione V_m/V_{m-1} può essere pensato come uno spazio di funzioni sull'insieme $\Gamma^{(m)}$ delle curve regolari con esattamente m autointersezioni.

Teorema 7.3.1. *Il valore di una funzione $I \in V_m/V_{m-1}$ su una curva $\mathcal{C} \in \Gamma^{(m)}$ dipende solo dal diagramma di corde associato a $\mathcal{C}$.*

Dim. Due distinte curve con m autointersezioni e stesso diagramma di corde associato possono ottenersi l'una dall'altra tramite un numero finito di "scambi" in cui, per un certo incrocio P nel diagramma, il ramo che passa sopra viene scambiato con quello che passa sotto. Asseriamo che un tale scambio lascia inalterato il valore di I. Infatti la differenza fra il valore dell'invariante prima e dopo lo scambio è data, per definizione, da $I^{(m)}(\mathcal{C}')$, $\mathcal{C}'$ essendo la curva ottenuta da $\mathcal{C}$ imponendo che P sia un'ulteriore autointersezione; ora $\mathcal{C}'$ ha $m+1$ autointersezioni e I ha ordine m, dunque $I^{(m)}(\mathcal{C}') = 0$. □

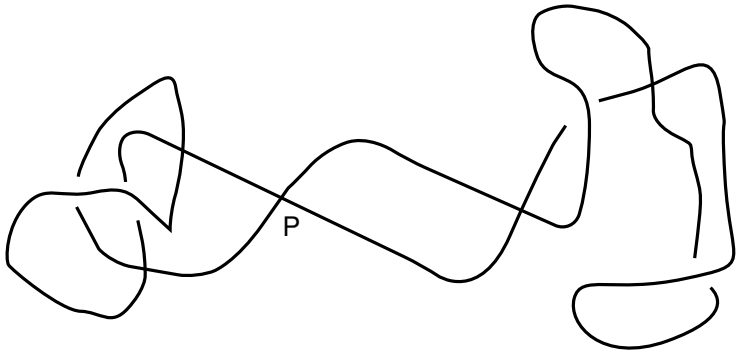
Corollario 7.3.2. *Lo spazio V_m/V_{m-1} ha dimensione finita $\leq (2m-1)!!$.*

In [CD] si prova che, in effetti, $dim\, V_m/V_{m-1} \leq (m-1)!$. Il passo successivo consiste nel tentare di capire quali funzioni possiamo ottenere sull'insieme $\mathcal{D}_m$ a partire da V_m/V_{m-1}. Per questo conviene pensare alle funzioni su $\mathcal{D}_m$ come forme lineari sullo spazio vettoriale che ha $\mathcal{D}_m$ come base. Il primo risultato fondamentale ci dice che le funzioni che otteniamo svaniscono su alcuni vettori particolari.

Definizione 7.3.3. *Diciamo che una corda in un diagramma di corde su S^1 è isolata se non interseca altre corde.*

Lemma 7.3.4. *Gli elementi di V_m/V_{m-1} svaniscono sui diagrammi che contengono una corda isolata.*

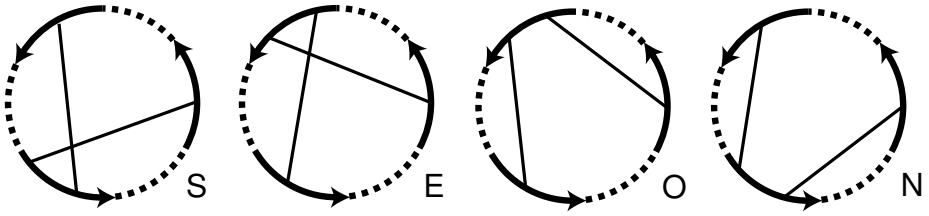
Dim. Dire che il diagramma di corde $D_{\mathcal{C}}$ associato ad una curva $\mathcal{C}$ contiene una corda isolata vuol dire che, a meno di un numero finito di scambi sopra-sotto (che come già visto non alterano il valore dell'invariante), $\mathcal{C}$ è del tipo



con l'autointersezione P corrispondente alla data corda isolata. Le due curve $\mathcal{C}_\pm$ ottenute staccando i due rami per P sono chiaramente isotope, quindi:

$$I(\mathcal{C}) = I(\mathcal{C}_+) - I(\mathcal{C}_-) = 0. \quad \square$$

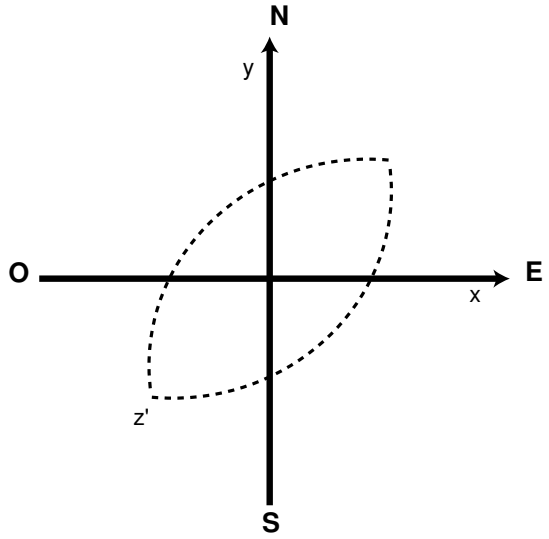
Lemma 7.3.5. *Sia dato $I \in V_m/V_{m-1}$. Se quattro diagrammi di m corde S, E, O, N differiscono solo come in figura*[21]



allora

$$I^{(m)}(S) - I^{(m)}(E) = -I^{(m)}(O) + I^{(m)}(N).$$

Dim. Sia SO la curva con $m-1$ autointersezioni che nell'intorno di una fissata autointersezione si comporta come in figura.



Precisamente, assumiamo che gli assi x, y siano localmente archi della curva, così come una retta z' parallela all'asse z che attraversi il piano xy nel quadrante in cui entrambe le coordinate sono negative. Sia poi NE la curva che differisce da SO solo per il fatto che z' interseca il piano xy nel quadrante in cui le coordinate sono positive. Il valore di $I^{(m-1)}(NE)$ in funzione di quello di $I^{(m-1)}(SO)$ si può calcolare in due modi diversi usando la relazione fondamentale, in corrispondenza ai "cammini" $SO \to NO \to NE$, $SO \to SE \to NE$ lungo i quali possiamo muovere l'arco parallelo all'asse z. Notiamo che in ogni tale spostamento, quando si attraversa uno degli assi si crea una nuova autointersezione, e le curve con m autointersezioni O, N, S, E così ottenute hanno i diagrammi di corde descritti nell'enunciato. L'asserto segue dalle relazioni

$$\begin{aligned}
I^{(m)}(O) &= I^{(m-1)}(NO) - I^{(m-1)}(SO) \\
I^{(m)}(N) &= I^{(m-1)}(NO) - I^{(m-1)}(NE) \\
I^{(m)}(S) &= I^{(m-1)}(SO) - I^{(m-1)}(SE) \\
I^{(m)}(E) &= I^{(m-1)}(NE) - I^{(m-1)}(SE). \quad \square
\end{aligned}$$

[21] I quattro disegni in figura rappresentano diagrammi di m corde che differiscono solo per le corde disegnate. Convenzionalmente, negli archi di cerchio a tratto continuo cadono solo gli estremi delle corde disegnate.

La relazione appena provata prende il nome di *relazione a quattro termini*; indichiamo con I_4 il sottospazio vettoriale di $\mathcal{D} := \oplus_{m\geq 0}\mathcal{D}_m$ generato dalle relazioni a 4 termini. Discutiamo questa relazione partendo dalle parole in $\mathcal{D}_{m,\mathbb{R}}$; la relazione implica lo svanimento di I sulle espressioni del tipo:

$$xXyYxyZ - xXyxYyZ + xXxyYyZ - xXyYyxZ.$$

Presa comunque una parola M e due lettere distinte x, y, rimuoviamo una delle due x da M ottenendo una parola M' in cui x appare una sola volta; reinseriamo la x in M accanto a ciascuna delle due y sommando con il segno piú la parole ottenute con inserimento a sinistra e con il meno con l'inserimento a destra. L'espressione che otteniamo è una tipica espressione a 4 termini.

Sia J_4 il sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ generato da queste espressioni.

Proposizione 7.3.6. *J_4 è un ideale di Hopf in $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ graduato rispetto alle strutture di algebra e coalgebra*[22].

Dim. Per costruzione J_4 è graduato ed è anche evidentemente un ideale per il modo in cui si effettua la moltiplicazione. Consideriamo ora la comoltiplicazione di una relazione a 4 termini coinvolgente le lettere a, b. Possiamo raccogliere i termini del coprodotto in due gruppi: quelli in cui a, b si trovano entrambi a sinistra od entrambi a destra e poi i rimanenti. I primi termini si raggruppano in somme di relazioni a 4 termini a destra o a sinistra e danno un contributo in $J_4 \otimes \mathcal{D}_{\mathbb{R}} + \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \otimes J_4$; per gli altri analizziamo ad esempio il caso in cui a si trova a sinistra e b a destra. È evidente che $aXbYabZ$, $aXbaYbZ$ danno luogo agli stessi termini con segni opposti e similmente $aXabYbZ$, $aXbYbaZ$ pertanto questi termini si cancellano e $\Delta(J_4) \subseteq J_4 \otimes \mathcal{D}_{\mathbb{R}} + \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \otimes J_4$ che è la condizione di ideale per la comoltiplicazione. È chiaro che $\varepsilon(J_4) = 0$; per l'antipodo si verifica per induzione che $S(J_4) \subseteq J_4$. □

Vogliamo ora dedurre una importante conseguenza della relazione a 4 termini.

Lemma 7.3.7. *L'algebra $D_{\mathbb{R}}/J_4$ è commutativa e la congruenza modulo J_4 implica la relazione di equivalenza che fa passare dai diagrammi di corde su $\mathbb{R}$ a quelli su S^1.*

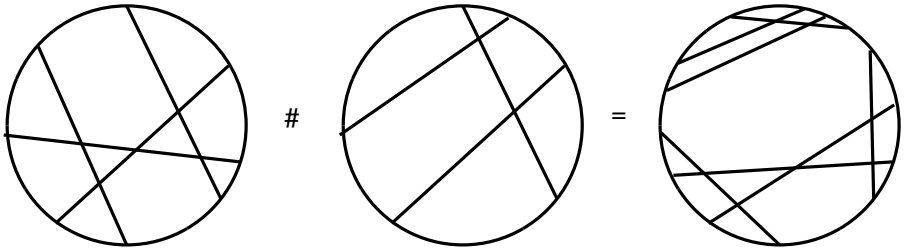
Dim. Prendiamo una parola del tipo aM in $\mathcal{D}_{m,\mathbb{R}}$. Per ogni lettera x che appare in M in una posizione scelta sia $l_x(M)$ la parola ottenuta da M sostituendo x con ax nella posizione prescelta; similmente sia $r_x(M)$ ottenuta da M sostituendo x con xa nella posizione prescelta. Consideriamo $\sum_x l_x(M) - r_x(M)$; poichè per ogni sottoespressione $M := \ldots xy \ldots$ si ha $r_x(M) = \ldots xay \cdots = l_y M$ segue che $\sum_x l_x(M) - r_x(M) = aM - Ma$.

D'altra parte in M ogni lettera x diversa da a appare due volte e possiamo raccogliere i 4 termini relativi a queste due occorrenze di x; questa somma è una relazione a 4 termini. In questo modo abbiamo tutti i termini di $\sum_x l_x(M) - r_x(M)$ tranne $l_a(M) - r_a(M)$ che però è 0. Quindi $aM - Ma$ è nel sottospazio generato dalle

[22] Ricordiamo che un'algebra $A = \oplus A_i$ si dice graduata se $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$. Analogamente, una coalgebra $B = \oplus B_i$ è (co)-graduata se $\Delta(B_k) \subseteq \sum_{h=0}^{k} B_{k-h} \otimes B_h$. Sia infine H un'algebra di Hopf e $\mathcal{I} \subseteq H$. Diciamo che $\mathcal{I}$ è un *ideale di Hopf* in H se è un ideale rispetto alla struttura di algebra, $S(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$, $\varepsilon(\mathcal{I}) = 0$ ed inoltre $\Delta(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I} \otimes H + H \otimes \mathcal{I}$.

relazioni a 4 termini. Pertanto, modulo le relazioni a 4 termini la parola aM coincide con la parola Ma. Conseguentemente $((\mathcal{D}_{m,\mathbb{R}}/J_4)/\approx) \cong \mathcal{D}_m/I_4$, $((\mathcal{D}_{\mathbb{R}}/J_4)/\approx) \cong \mathcal{D}/I_4$ e dunque viene indotta una struttura di algebra commutativa sui diagrammi di m corde in S^1. $\square$

In altri termini sullo spazio generato dai diagrammi di corde su S^1 modulo le relazioni a 4 termini è ben definito il prodotto rimuovendo da ciascun diagramma un piccolo arco non contenente estremi di corde e facendone la somma connessa:



Possiamo dunque dedurre il seguente risultato.

Teorema 7.3.8. *$\mathcal{A} := \mathcal{D}_{\mathbb{R}}/J_4$ è un'algebra di Hopf commutativa e cocommutativa. La parte omogenea di grado m coincide con lo spazio dei diagrammi di m corde sul cerchio modulo le relazioni a 4 termini.*

Per i nostri calcoli dovremo anche considerare l'algebra quoziente di $\mathcal{A}$ modulo l'ideale generato dai diagrammi con una corda isolata. L'algebra graduata che ne risulta verrà denotata con $\mathcal{A}^c$. Dato un diagramma di corde D denoteremo con $[D]$ la sua classe in $\mathcal{A}^c$. In definitiva abbiamo dimostrato che

Proposizione 7.3.9. *L'applicazione $I \to I^{(m)}$ identifica lo spazio V_m/V_{m-1} ad un sottospazio del duale di $\mathcal{A}^c_m$. Esiste dunque un monomorfismo di spazi vettoriali graduati*

$$i : \mathcal{G}r\ \mathcal{V} \hookrightarrow \oplus_{m\geq 0}(\mathcal{A}^c_m)^*.$$

tra il graduato associato allo spazio degli invarianti finiti rispetto alla filtrazione data dall'ordine degli invarianti e il "duale graduato[23]*" di $\mathcal{A}^c$.*

Uno degli scopi principali della trattazione dei prossimi capitoli è quello di provare che $i : \mathcal{G}r\ \mathcal{V} \hookrightarrow \oplus_{m\geq 0}(\mathcal{A}^c_m)^*$ è un *isomorfismo*.

Nel caso dell'algebra $\mathcal{A}$ siamo allora nelle ipotesi del teorema di struttura seguente; ricordiamo che un elemento a di una bialgebra si dice *primitivo* se

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a.$$

Teorema 7.3.10. *(Milnor-Moore)[MM] Un'algebra di Hopf commutativa e cocommutativa su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica 0 è l'algebra simmetrica nei suoi elementi primitivi.*

Dal citato teorema di Milnor-Moore si ha che $\mathcal{A}^c$ è l'algebra simmetrica nei suoi elementi primitivi $Prim(\mathcal{A}^c)$ che sono uno spazio vettoriale graduato. Uno dei più importanti problemi aperti (cfr. [BN]) è:

Problema. *Calcolare la serie di Poincaré di $Prim(\mathcal{A}^c)$.*

[23] Gli elementi di $(\mathcal{A}^c_m)^*$ sono detti *sistemi di pesi di grado m*.

§8 Costruzione analitica dell'integrale di Kontsevich

§8.1 L'invariante universale e la definizione dell'integrale di Kontsevich.

Il problema successivo che intendiamo affrontare consiste nel vedere se le relazioni trovate sono le sole soddisfatte dagli invarianti $I^{(m)}$. La risposta è affermativa e proviene da una notevole costruzione dovuta a Kontsevich. Tale costruzione fornisce un invariante Z a valori nel completamento $\hat{\mathcal{A}}^c = \prod_{m\geq 0} \mathcal{A}^c_m$ di $\mathcal{A}^c$, con la proprietà seguente:

Data una curva C con m autointersezioni ed associato diagramma di corde D_C si ha:

$$Z^{(m)}(C) = [D_C] + \textit{termini di grado superiore ad } m.$$

Definizione 8.1.1. *Un invariante dei nodi con la proprietà precedente si dice un invariante universale.*

Mostriamo prima di tutto come dall'esistenza di un invariante universale si deduca quanto asserito.

Proposizione 8.1.2. *L'applicazione $I \to I^{(m)}$ pone un isomorfismo tra V_m/V_{m-1} e $(\mathcal{A}^c_m)^*$.*

Dim. Per la proposizione 7.3.8 l'applicazione in esame è iniettiva; dobbiamo vedere che è anche suriettiva.

Sia dunque $\phi \in (\mathcal{A}^c_m)^*$; vogliamo costruire un invariante I_ϕ per cui $I^{(m)}_\phi = \phi$. Sia $Z = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m$; Z_m è un invariante dei nodi a valori in $\mathcal{A}^c_m$. Poiché per ipotesi la serie $Z^{(m+1)}$ ha i primi m coefficienti nulli si ha che Z_m ha ordine $\leq m$, inoltre $Z^{(m)}_m(C) = [D_C]$ per $C \in \Gamma^{(m)}$ dalla proprietà di universalità di Z.

Poniamo ora $I_\phi(K) := \langle \phi | Z_m(K) \rangle$; è immediato verificare che I_ϕ ha ordine $\leq m$ e che, per $C \in \Gamma^{(m)}$, $I^{(m)}_\phi(C) =< \phi | Z^{(m)}_m(C) >=< \phi | [D_C] >$ come desiderato. □

Il nome di "invariante universale" è giustificato dalla proprietà seguente.

Corollario 8.1.3. *Se Z è un invariante universale, dato comunque un invariante di tipo finito P, esiste un unico $w \in \sum_{h\geq 0}(\mathcal{A}^c_h)^*$ tale che*

$$P(K) = w(Z(K)).$$

per ogni nodo K. (La relazione precedente va intesa separatamente in ciascun grado).

Dim. Nella proposizione precedente abbiamo mostrato che le applicazioni

$$\alpha_m : V_m/V_{m-1} \to (\mathcal{A}^c_m)^*,\ I \mapsto I^{(m)}$$
$$\beta_m : (\mathcal{A}^c_m)^* \to V_m \to V_m/V_{m-1},\ \phi \mapsto \langle \phi |\, Z_m(\ ) \rangle$$

sono mutuamente inverse. In particolare $\beta_m \circ \alpha_m = Id_{V_m/V_{m-1}}$; ciò significa che se P è un invariante di ordine $\leq m$, esiste un unico funzionale lineare w_m (che coincide

con $\alpha_m(P) = P^{(m)}$) su $\mathcal{A}_m^c$ per cui $P - w_m \circ Z_m$ è un invariante di ordine $\leq m-1$. Per induzione dunque si ottiene quanto volevamo:

$$\begin{aligned} P &= w_m \circ Z_m + w_{m-1} \circ Z_{m-1} + \ldots + w_0 \circ Z_0 \\ &= P^{(m)} \circ Z_m + P^{(m-1)} \circ Z_{m-1} + \ldots + P^{(0)} \circ Z_0 . \quad \square \end{aligned}$$

L'approccio alla costruzione dell'invariante di Kontsevich, che può pensarsi come una generalizzazione dell'integrale di Gauss (cfr. 5.2.3), è così strutturato:

(1) Definizione dell'integrale di Kontsevich $Z(K)$.
(2) Finitezza di $Z(K)$.
(3) Invarianza di $Z(K)$ per deformazioni nella classe dei nodi con punti critici non degeneri che mantengono invariato il numero dei punti critici.
(4) Correzione di $Z(K)$ in un invariante isotopico $\tilde{Z}(K)$.
(5) Universalità di $\tilde{Z}(K)$.

In questo paragrafo affronteremo i primi due punti. La dimostrazione dei punti (3)-(5) sarà data in 8.4, necessitando di analisi e risultati preliminari che sono sviluppati in 8.2, 8.3.

Definizione dell'integrale di Kontsevich

Consideriamo un nodo orientato K. Pensiamo lo spazio $\mathbb{R}^3$ decomposto come $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ e chiamiamo $t : K \to \mathbb{R}$, $z : K \to \mathbb{C}$ la prima e seconda coordinata. Possiamo a meno di deformazioni assumere che t abbia solo un numero finito (necessariamente pari) di punti critici non degeneri (necessariamente massimi e minimi relativi) con valori critici distinti $p_1, p_2, \ldots, p_{2c}$. Il complementare di $p_1, p_2, \ldots, p_{2c}$ in K è unione di $2c$ archi connessi che coloriamo con i colori u, d a seconda che il tempo t sia una funzione crescente o decrescente. Numeriamo inoltre questi $2c$ archi con i numeri $1, 2, \ldots, 2c$. Se C_i denota l'i-esimo arco, sia (a_i, b_i) l'intervallo aperto dei valori di t assunti su tale arco. Per costruzione t è una funzione invertibile con inversa differenziabile fra C_i e (a_i, b_i) (crescente o decrescente a seconda del colore). Indicheremo con $z_i(t)$ la funzione su (a_i, b_i) composta dall'inversa di t e da z.

Per ogni m consideriamo l'insieme $\mathcal{S}_m$ delle m-ple di corde nell'embedding di S^1 che realizza K con le proprietà seguenti:

– la coordinata t è uguale ai due estremi della corda;
– tali estremi non sono valori critici;
– due corde distinte hanno coordinata t diversa.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_m = \{(P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_m) \mid P_i, Q_j \in K \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_{2c}\}, \\ t(P_i) = t(Q_i),\ i, j = 1, \ldots, m,\ t(P_i) \neq t(P_j),\ i, j = 1, \ldots, m,\ i \neq j\}. \end{aligned}$$

Le seguenti osservazioni sono evidenti:

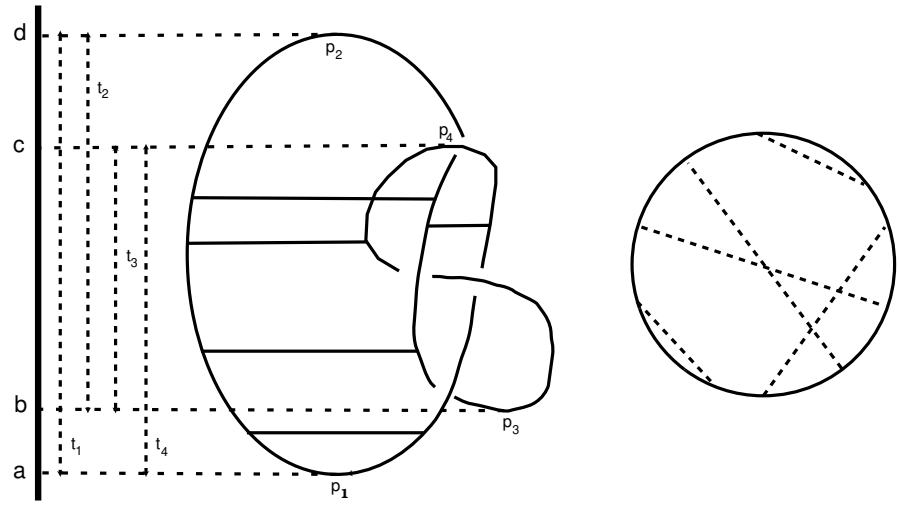
(1) $\mathcal{S}_m$ è una varietà (non compatta ne' connessa) di dimensione m. I valori di t sugli estremi forniscono coordinate su ciascuna componente di tale varietà.
(2) Una componente H di tale varietà determina (ed è determinata da) m coppie di numeri $i_1, j_1;\ i_2, j_2; \ldots; i_m, j_m$ che indicizzano gli archi dove capitano gli estremi delle corde ordinate per valori crescenti del parametro t.

(3) Denotiamo con $\mathcal{H}_m$ l'insieme delle componenti connesse di $\mathcal{S}_m$; ogni tale componente è diffeomorfa all'aperto del prodotto degli intervalli $t(C_{i_k}) \cap t(C_{j_k})$ in cui le coordinate sono crescenti, pertanto:

$$\mathcal{S}_m \approx \bigcup_{(i_1,j_1;\ldots;i_m,j_m)\in\mathcal{H}_m} \left\{(x_1,\ldots,x_m) \in \prod_{k=1}^{m} t(C_{i_k}) \cap t(C_{j_k}) \mid x_1 < \ldots < x_m\right\}.$$

Nella figura seguente diamo un esempio di componente connessa della varietà $\mathcal{S}_5$ per il trifoglio. Essa è indicizzata dalle coppie $1,4;1,2;1,3;2,4;1,2$ - cui corrisponde il diagramma di corde disegnato a destra - ed è diffeomorfa a

$$\{(x_1,\ldots,x_5) \in (a,c)\times(b,d)\times(b,c)\times(b,c)\times(b,d) \mid x_1 < \ldots < x_5\}.$$



Per ogni componente $H \in \mathcal{H}_m$ sia $[D_H]$ la classe del corrispondente diagramma di corde in $\mathcal{A}^c$. Consideriamo le forme differenziali[24]

$$\omega_k(t) := dlog\,(z_{i_k}(t) - z_{j_k}(t))$$

e la m-forma su H

$$\omega_H := (-1)^{\#\downarrow}\omega_1(t_1) \wedge \omega_2(t_2) \ldots \wedge \omega_m(t_m)$$

dove $\#\downarrow$ è il numero di estremi di corde in cui il tempo t decresce.

[24] Forme di questo tipo giocano un ruolo essenziale nello studio della coomologia dello spazio $X_n = \{(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \ se\ i \neq j\}$, introduciamo in X_n per $i \neq j$ le forme differenziali $\omega_{ij} = \frac{1}{2\pi i} dlog(z_i - z_j)$. Arnold [A1] ha dimostrato che l'anello di coomologia di X_n è un'algebra esterna nei generatori ω_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$ con relazioni quadratiche $\omega_{ij} \wedge \omega_{jk} + \omega_{jk} \wedge \omega_{ik} + \omega_{ik} \wedge \omega_{ij}$, $i < j < k$.

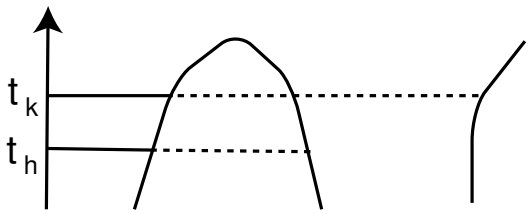
Definizione 8.1.4. *L'integrale di Kontsevich è la serie a valori in* $\hat{\mathcal{A}}^c$*:*

$$Z(K) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{H \in \mathcal{H}_m} [D_H] \int_H \omega_H$$

ove convenzionalmente $\int_H \omega_H = 1$ *per* $H \in \mathcal{H}_0$*.*

Vogliamo far vedere prima di tutto che tutti gli integrali sono finiti e che quindi otteniamo una serie a valori in $\mathcal{A}^c$. Per provare la finitezza, osserviamo che la divergenza potrebbe avvenire al k-esimo tempo relativamente ad una corda i_k, j_k per cui $(z_{i_k} - z_{j_k})(t)$ tende a zero quando t tende al valore critico $\overline{t}$.

Se la corda corrispondente è isolata il coefficiente $[D_C]$ è zero. Altrimenti per un tempo $t_h,\ h > k$ esiste una corda di indici i_h, n_h.



Per costruzione la funzione $(z_{i_h} - z_{n_h})(t)$ tende ad un valore non nullo per $t \to \overline{t}$ quindi la parte di integrazione in dt_h può essere maggiorata con una costante per dt_h, mentre $dlog(z_{i_k} - z_{j_k})(t)$ è maggiorato da una costante per $\frac{1}{b-t_k}$. L'integrale nelle due variabili descritte è maggiorato da $H \int_{\overline{t}-\epsilon<t_k<t_h<\overline{t}} \frac{1}{b-t_k} dt_k dt_h$ con H costante, che converge.

Per studiare $Z(K)$ useremo il seguente artificio. Consideriamo un intervallo di tempo $[a, b]$; per ogni componente C sia C_a^b la parte in cui le coordinate t_i sono nell'intervallo $[a, b]$, inoltre sia $\mathcal{A}_a^b$ lo spazio vettoriale graduato associato ai diagrammi di corde con estremi nella preimmagine di $[a, b]$ secondo la funzione t modulo le relazioni a 4 termini e quella di corda isolata; ridefiniamo:

$$Z_a^b(K) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{C_a^b} [D_{C_a^b}] \int_C \omega \in \hat{\mathcal{A}}_a^b.$$

Scelti $a < b < c$, abbiamo chiaramente un prodotto $\mathcal{A}_a^b \times \mathcal{A}_b^c \to \mathcal{A}_a^c$. Dimenticando per un momento i problemi di convergenza abbiamo formalmente dal teorema di Fubini:

$$Z_a^c(K) = Z_a^b(K) Z_b^c(K).$$

Possiamo allora assumere di restringerci ad intervalli $[a, b]$ che non contengono valori critici - in cui quindi tutte le funzioni z_i che appaiono nella formula sono definite - e studiare un integrale del tipo:

$$\int_{a<t_1<t_2\cdots<t_m<b} dlog(z_{i_1} - z_{j_1})(t_1) \wedge dlog(z_{i_2} - z_{j_2})(t_2) \wedge \cdots \wedge dlog(z_{i_m} - z_{j_m})(t_m).$$

§8.2 L'algebra di olonomia.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che è utile introdurre uno spazio di diagrammi di corde orizzontali su n fili paralleli. In effetti conviene pensarli orizzontali solo a meno di riparametrizzazione dei fili in modo indipendente così che le relazioni a 4 termini hanno senso per tali diagrammi. Evidentemente due tali diagrammi si possono moltiplicare per giustapposizione e forniscono un' algebra associativa $\mathcal{P}_n$ generata dai diagrammi con una sola corda.

Indichiamo con t_{ij} il diagramma con una corda fra i fili di indici $i, j,\ i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq n$. Si verifica facilmente che le relazioni a 4 termini si traducono nelle seguenti relazioni, vengono dette, per motivi che spiegheremo alla fine di §9.4, *relazioni infinitesimali delle trecce pure.*

$$t_{ij} = t_{ji},$$
$$[t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}] = [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0,$$
$$[t_{ij}, t_{hk}] = 0 \ \textit{se} \ \ i, j, h, k \ \textit{sono indici distinti.}$$

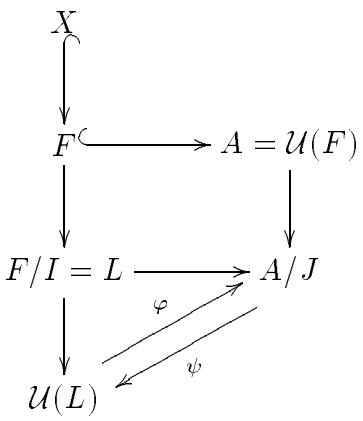
Nella teoria generale di Chen cui accenneremo $\mathcal{P}_n$ è detta *algebra di olonomia* ed è dedotta dal gruppo delle trecce pure P_n secondo una procedura dovuta a Malĉev. Osserviamo che $\mathcal{P}_n$ ammette una struttura di algebra di Hopf indotta dalla comoltiplicazione definita ponendo $\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$ se t è un generatore ed estendendo moltiplicativamente.

Proposizione 8.2.1. *L'algebra $\mathcal{P}_n$ è isomorfa all'algebra inviluppante dell'algebra di Lie L definita dalle relazioni precedenti.*

L'asserto può dedursi dal seguente risultato generale, tenendo conto che le relazioni definitorie per $\mathcal{P}_n$ sono relazioni di Lie. Per le nozioni di teoria delle algebre di Lie utilizzate si consulti [Hum].

Proposizione 8.2.2. *Dato $X = \{x_i\}_{i \in \Lambda}$, siano A l'algebra associativa libera su X e F l'algebra di Lie libera su X. Sia poi R un insieme di relazioni di Lie tra gli elementi di X, I l'ideale di Lie generato da R in F, e J l'ideale dell'algebra associativa A generato da R. Allora, se $L := F/I$, l'algebra inviluppante $\mathcal{U}(L)$ di L è isomorfa a A/J.*

Dim. È noto che $A = \mathcal{U}(F)$; si consideri il morfismo canonico $F \hookrightarrow A$ (iniettivo per il teorema di Poincare-Birkhoff-Witt). Per ipotesi $I \subseteq J$, dunque rimane indotta un'applicazione $L \to A/J$ e si ha il seguente diagramma commutativo



Ora per la proprietà universale dell'algebra inviluppante $\mathcal{U}(L)$ possiamo dedurre l'esistenza di un omomorfismo di algebre associative $\varphi : \mathcal{U}(L) \to A/J$; viceversa la proprietà universale di A come algebra associativa libera su X garantisce l'esistenza di un omomorfismo di algebre associative $A \to \mathcal{U}(L)$, che svanisce su I, dunque passa al quoziente ad un omomorfismo $\psi : A/J \to \mathcal{U}(L)$ che inverte φ. □

Per comprendere più in dettaglio la struttura di $\mathcal{P}_n \cong \mathcal{U}(L)$, richiamiamo prima di tutto una costruzione generale, che è l'analogo del prodotto semidiretto nei gruppi. Sia M un' algebra di Lie, e siano A, B due sottoalgebre di Lie di M tali che:
1) $M = A \oplus B$
2) B è normalizzata da A.

Per ogni $a \in A$ abbiamo una derivazione $D_a \in Der(B)$ indotta da Ad_a ossia $D_a(b) := [a, b]$. L'applicazione $A \to Der(M)$, $a \mapsto D_a$ è un omomorfismo di algebre di Lie e su M si ha il prodotto di Lie

$$[a + b, a' + b'] = [a, a'] + D_a(b') - D_{a'}(b) + [b, b']$$

per $a, a' \in A$, $b, b' \in B$. L'algebra di Lie M si dice prodotto semidiretto di A, B; viceversa, date algebre di Lie A, B ed un omomorfismo $a \mapsto D_a$ da A all'algebra delle derivazioni di B la formula precedente definisce sullo spazio vettoriale $A \oplus B$ una struttura di algebra di Lie.

Indichiamo con L_n l'algebra di Lie generata da t_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ e con $\overline{F}_{n-1}$ la sottoalgebra di Lie generata dagli elementi t_{in}, $i = 1, \ldots, n-1$.

Lemma 8.2.3. *$\overline{F}_{n-1}$ è un ideale di L_n.*

Dim. Basta provare che $[t_{ij}, t_{hn}] \in \overline{F}_{n-1}, \forall\, i, j \leq n$. Se $j = n$ non c'è nulla da dimostrare, come pure se $\{i, j\}$ e $\{h, n\}$ sono insiemi disgiunti. Ora $[t_{ih} + t_{in}, t_{hn}] = 0$, quindi $[t_{ih}, t_{hn}] = -[t_{in}, t_{hn}] \in \overline{F}_{n-1}$. □

Questo Lemma suggerisce le seguenti considerazioni. Sull'algebra di Lie libera F_{n-1} in $n-1$ generatori x_i, $i = 1, \ldots, n-1$, definiamo delle derivazioni D_{ij}, $1 \leq i < j \leq n-1$ secondo la seguente formula:

$$D_{ij}(x_h) = \begin{cases} 0 & \text{se } i, j, h \text{ sono distinti.} \\ -[x_i, x_h] & \text{se } j = h. \\ -[x_j, x_h] & \text{se } i = h. \end{cases}$$

Poniamo formalmente $D_{ij} = D_{ji}$.

Lemma 8.2.4. *Le derivazioni D_{ij} soddisfano le relazioni delle trecce pure.*

Dim. Supponiamo i, j, h, k distinti; si ha che

$$[D_{ij}, D_{hk}](x_m) = D_{ij}(D_{hk}(x_m)) - D_{hk}(D_{ij}(x_m))$$

è 0 se m è distinto da i, j, h, k. Sia $m = k$ (gli altri casi sono simili); allora:

$$[D_{ij}, D_{hk}](x_m) = -D_{ij}[x_h, x_k] = [D_{ij}x_h, x_k] + [x_h, D_{ij}x_k] = 0$$

Calcoliamo ora $[D_{ij}+D_{ih}, D_{jh}](x_m)$: per $m \neq i,j,h$ è zero; se invece $m=h$ si ha:

$$\begin{aligned}[D_{ij}+D_{ih}, D_{jh}](x_h) &= D_{ij}D_{jh}(x_h) - D_{jh}D_{ij}(x_h) + D_{ih}D_{jh}(x_h) - D_{jh}D_{ih}(x_h)\\ &= -D_{ij}[x_j,x_h] - D_{ih}[x_j,x_h] + D_{jh}[x_i,x_h]\\ &= [[x_i,x_j],x_h] + [x_j,[x_i,x_h]] - [x_i,[x_j,x_h]] = 0\end{aligned}$$

per l'identità di Jacobi. Per $m=j$ il calcolo è identico; per $m=i$ abbiamo:

$$\begin{aligned}[D_{ij}+D_{ih}, D_{jh}](x_i) &= -D_{jh}(D_{ij}+D_{ih})(x_i) = D_{jh}([x_j,x_i]+[x_h,x_i])\\ &= -[[x_h,x_j],x_i] - [[x_j,x_h],x_i] = 0. \quad \square\end{aligned}$$

Deduciamo l'esistenza di un omomorfismo dell'algebra L_{n-1} nell'algebra delle derivazioni di F_{n-1} che manda il generatore t_{ij} nella derivazione D_{ij}.

Teorema 8.2.5. *L'algebra di Lie $\overline{F}_{n-1}$ è libera (e quindi isomorfa a F_{n-1}). L'algebra L_n è isomorfa al prodotto semidiretto fra L_{n-1} ed F_{n-1}.*

Dim. Per quanto visto esiste un omomorfismo dal prodotto semidiretto $L_{n-1} \oplus F_{n-1} \to L_n$ che è l'identità su L_{n-1} e manda x_i in t_{in}. Per vedere che è un isomorfismo basta provare che gli elementi u_{ij} definiti come $u_{ij} := t_{ij}$ se $i,j \leq n-1$, e $u_{in} = x_i$ soddisfano le relazioni infinitesimali delle trecce pure. In questo caso avremo un omomorfismo da L_n a $L_{n-1} \oplus F_{n-1}$ che chiaramente inverte il dato. Le sole relazioni ancora da verificare sono quelle che coinvolgono tre indici i,j,n ossia $[u_{ij}+u_{in}, u_{jn}] = 0$, $[u_{in}+u_{jn}, u_{ij}] = 0$. La prima si traduce in $D_{ij}(x_i)+[x_i,x_j] = 0$, che è la definizione di D_{ij}, e l'altra in $-D_{ij}(x_i+x_j) = [x_j,x_i]+[x_i,x_j] = 0$. $\square$

Corollario 8.2.6.

(1) *L'algebra L_n è prodotto semidiretto iterato di algebre di Lie libere $F_{n-1} \oplus F_{n-2} \oplus \ldots \oplus F_1$.*
(2) *L'algebra associativa $\mathcal{P}_n$ generata dai t_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$ è l'algebra inviluppante di L_n ed è prodotto tensoriale (come spazio vettoriale graduato) delle algebre associative libere T_j in $j = n-1, n-2, \ldots, 1$ generatori (T_j è generata dagli elementi $t_{i,j+1}, i \leq j$): $\mathcal{P}_n = T_{n-1} \otimes T_{n-2} \otimes \ldots \otimes T_2 \otimes T_1$.*

Possiamo dedurre che una base esplicita dell'algebra associativa $\mathcal{P}_n$ è data dai prodotti di monomi nelle varie serie di variabili $t_{i,j}, i<j \leq n$. Se ne deduce anche il calcolo esplicito della serie di Poincaré $P_{\mathcal{P}_n}(t) := \sum_{i=0}^{\infty} dim(\mathcal{P}_n)_{(i)} t^i$ che esprime le dimensioni delle parti omogenee di grado i di $\mathcal{P}_n$ per ogni i.

Ricordiamo che il numero di monomi di grado i in k variabili non commutative è k^i, pertanto la serie di Poincaré di un algebra libera in k variabili è

$$\sum_{i=0}^{\infty} k^i t^i = \frac{1}{1-kt}.$$

Ricordiamo inoltre che, se abbiamo due spazi vettoriali graduati $V = \oplus_{i=0}^{\infty} V_i$, $W = \oplus_{j=0}^{\infty} W_j$ si ha $(V \otimes W)_k = \oplus_{i+j=k} V_i \otimes W_j$ da cui $P_{V \otimes W}(t) = P_V(t) P_W(t)$.

In definitiva

$$P_{\mathcal{P}_n}(t) = \prod_{j=1}^{n-1} P_{T_j}(t) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1-kt) \right)^{-1}.$$

Si osservi la stretta analogia fra questa teoria e quella del gruppo P_n delle trecce pure sviluppata in 3.2.

Evidenziamo un'ulteriore conseguenza dell'analisi precedente che sarà usata nel seguito.

Corollario 8.2.7. *L'algebra di Lie L_3 è prodotto semidiretto dell'algebra di Lie libera generata da due degli elementi t_{12}, t_{23}, t_{13} e del centro unidimensionale generato da $t_{12}+t_{13}+t_{23}$.*

§8.3 La connessione K-Z e l'integrale iterato di Chen.

Iniziamo richiamando alcune fondamentali definizioni della teoria delle connessioni sui fibrati vettoriali; per maggiori dettagli e per le dimostrazioni delle asserzioni seguenti si veda, ad esempio, [KN].

Sia M una n-varietà analitica reale ed E un fibrato vettoriale analitico reale di rango r su M. Denotiamo con A^p lo spazio delle p-forme su M, con $\Gamma(E) \equiv \Gamma(E, M)$ lo spazio delle sezioni globali di E su M; sia poi $A^p(E) = A^p \otimes_{\mathbb{R}} \Gamma(E)$ lo spazio delle p-forme a valori in E.

Definizione 8.3.1. *Una connessione D in E è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $D : A^0(E) \longrightarrow A^1(E)$ che per ogni $f \in A^0$ e $\sigma \in A^0(E)$ verifica:*

$$D(f\sigma) = \sigma\, df + f\, D\sigma.$$

Sia $s = (s_1, \ldots, s_r)$ una base locale di E su un aperto $U \subset M$, ovvero il dato di r sezioni locali $s_i \in A^0(E|_U)$ tali che $(s_1(x), \ldots, s_r(x))$ è una base di E_x per ogni $x \in U$. Riguardiamo $s = (s_1, \ldots, s_r)$ come vettore riga; allora esiste una matrice di 1-forme $\omega = (\omega_{ij}) \in M_r(A^1|_U)$ per cui si ha

$$Ds = -s\omega.$$

Diciamo allora che ω è la *forma di connessione* della connessione D.

Se poi $\xi = \sum_{i=1}^r \xi_i s_i$ è un'arbitraria sezione di E su U, $\xi_i \in A^0|_U$ e pensiamo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)^t$ come vettore colonna, è immediato dedurre dalle definizioni che:

$$D\xi = d\xi - \omega\xi.$$

$D\xi$ è usualmente detta *derivata covariante* di ξ.

Valutando un vettore tangente X di M in $x \in M$, otteniamo un elemento di E_x

$$D_X\xi = (D\xi)(X) \in E_x$$

detto *derivata covariante di ξ nella direzione di X.*

Ricordiamo ora che, data una curva $c = c(t)$, $0 \le t \le 1$ in M, una *sezione η di E lungo c* è una applicazione continua $\eta : [0,1] \to E$ che si proietta su c. In generale

diremo che una sezione ξ è *parallela* se $D\xi = 0$ e che una sezione η lungo c è *parallela* se $D_{c'(t)}\eta = 0,\ \forall t \in [0,1]$. La relazione precedente è del tipo $d\xi = \omega\xi$; relativamente alla base locale s tale relazione si riscrive come un sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \omega_{ij}(c'(t))\xi_j.$$

Se $\xi_0 \in E_{c(0)}$ è un elemento della fibra iniziale, per il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni ordinarie esiste un'unica sezione parallela lungo c tale che $\xi(0) = \xi_0$; tale sezione è detta *trasporto parallelo* di ξ_0 lungo c. Osserviamo che talvolta il nome di trasporto parallelo viene usato per denotare l'isomorfismo lineare $T_c : E_{c(0)} \longrightarrow E_{c(1)}$ definito da $T_c(\xi_0) = \xi(1)$. Al variare delle curve chiuse c basate in x_0, l'insieme dei T_c descrive un sottogruppo di $Aut\, E_{x_0}$ detto *gruppo di olonomia* di E in x_0.

Estendiamo una connessione $D : A^0(E) \longrightarrow A^1(E)$ ad un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $D : A^p(E) \longrightarrow A^{p+1}(E),\ p \geq 0$ ponendo, per $\varphi \in A^p$ e $\sigma \in A^0(E)$

$$D(\varphi\sigma) = (D\sigma) \wedge \varphi + \sigma\, d\varphi.$$

Definizione 8.3.2. *La curvatura R della connessione D è definita come*

$$R := D \circ D : A^0(E) \longrightarrow A^2(E).$$

Osserviamo che la curvatura è A^0-lineare. Infatti, per $f \in A^0$ e $\sigma \in A^0(E)$, si ha:

$$D^2(f\sigma) = D(\sigma\, df + f\, D\sigma) = D\sigma \wedge df + df \wedge D\sigma + fD^2\sigma = fD^2\sigma.$$

Pertanto R è una 2-forma a valori in $End(E)$. Se, con notazione matriciale, definiamo la *forma di curvatura* Γ rispetto alla base locale s tramite la relazione

$$s\Gamma = D^2 s$$

si ha allora $s\Gamma = -D(s\omega) = -Ds \wedge \omega - sd\omega = s\omega \wedge \omega - sd\omega$, da cui

$$\Gamma = \omega \wedge \omega - d\omega.$$

Definizione 8.3.3. *Una connessione si dice piatta se ha curvatura nulla.*

Sarà per noi fondamentale il seguente risultato.

Teorema 8.3.4. *Sia M una varietà , E un fibrato vettoriale su M e D una connessione piatta in E. Allora, fissati due punti p, q in M, il trasporto parallelo dipende solo dalla classe di omotopia della curva da p a q lungo cui viene calcolato. In particolare non c'e dipendenza dalla curva se M è semplicemente connessa.*

Nel caso di varietà e fibrati complessi possiamo dare delle analoghe definizioni e nel caso di un fibrato olomorfo abbiamo la nozione di connessione olomorfa. Saremo interessati a studiare la *connessione K-Z*, che è la connessione di forma

$$\Omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i<j} t_{ij}\, d\, log(z_i - z_j),$$

dove i t_{ij} sono i generatori dell'algebra $\mathcal{P}_n$ introdotta in 8.2 e Ω è definita in $X_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \ se \ i \neq j\}$. Tale spazio è naturalmente una varietà analitica e Ω è olomorfa in X_n; fissata una rappresentazione r-dimensionale $\psi : \mathcal{P}_n \to End(V)$ dell'algebra di olonomia, i t_{ij} possono riguardarsi come endomorfismi di V, e la connessione $-d + \Omega$ ha valori nel fibrato banale $E = X_n \times V$. Più formalmente, possiamo pensare la connessione a valori in $\mathcal{P}_n$.

Il risultato fondamentale è il seguente.

Proposizione 8.3.5. *La connessione K-Z è piatta.*[25]

Dim. Dobbiamo provare che $-d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0$. È chiaro che $-d\Omega = 0$ mentre, a meno di costanti, Ω eguaglia $\wedge\Omega = \sum_{i<j,\ h<k} t_{ij}\omega_{ij} \wedge t_{hk}\omega_{hk}$. In questa somma i termini per cui $(i,j) = (h,k)$ danno contributo nullo perchè $\omega_{ij} \wedge \omega_{ij} = 0$; lo stesso accade per i termini relativi a due coppie ij, hk disgiunte: queste danno luogo ai termini

$$[t_{ij}, t_{hk}]\omega_{ij} \wedge \omega_{hk}.$$

il cui contributo è nullo per 8.2. Restano i termini relativi a tre indici; non è difficile vedere che il loro contributo può scriversi come:

$$\sum_{i<j<h} \left([t_{ij}, t_{jh}]\omega_{ij} \wedge \omega_{jh} + [t_{ij}, t_{ih}]\omega_{ij} \wedge \omega_{ih} + [t_{ih}, t_{jh}]\omega_{ih} \wedge \omega_{jh}\right).$$

Per semplificare ulteriormente questa relazione utilizziamo l'identità di Arnold (la cui semplice verifica è lasciata al lettore: cfr. la nota a fondo pagina che segue 8.1.4):

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{jh} - \omega_{ij} \wedge \omega_{ih} - \omega_{ih} \wedge \omega_{jh} = 0.$$

Sostituendo abbiamo:

$$\sum_{i<j<h} \left(([t_{ij}, t_{jh}] + [t_{ij}, t_{ih}])\omega_{ij} \wedge \omega_{ih} + ([t_{ij}, t_{jh}] + [t_{ih}, t_{jh}])\omega_{ih} \wedge \omega_{jh}\right).$$

L'annullarsi di questa espressione è equivalente alle relazioni:

$$[t_{ij}, t_{jh} + t_{ih}] = [t_{ij} + t_{ih}, t_{jh}] = 0.$$

che sono le relazioni definitorie di $\mathcal{P}_n$. □

Ritorniamo per un momento alla situazione generale di partenza. Data una connessione a valori in un'algebra $\mathbb{A}$ ed una curva vogliamo calcolare il trasporto parallelo lungo la curva, che dipende solo dagli estremi della curva se la connessione è piatta. Data una curva parametrica la matrice della connessione sulla curva è una funzione (continua) $C(t)$ a valori nell'algebra data. Il trasporto parallelo per un modulo sull'algebra si ottiene risolvendo il problema differenziale

$$\begin{cases} A'(t) = C(t)A(t) \\ A(0) = A_0. \end{cases}$$

[25] In effetti proveremo che le relazioni definitorie per $\mathcal{P}_n$ sono *equivalenti* a $\Omega \wedge \Omega = 0$.

Proposizione 8.3.6. *Se $A_0 = Id$ e $\mathbb{A}$ ha dimensione finita il problema differenziale precedente ammette soluzione unica, esprimibile esplicitamente tramite la seguente forma integrale (che viene detta esponenziale tempo ordinato ed indicata con $e^{:\int_0^t C(u)du:}$):*

$$A(t) = Id + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_m \le t} C(t_m)C(t_{m-1})\dots C(t_2)C(t_1)dt_1dt_2\dots dt_m.$$

Dim. Anzitutto è chiaro che $A(0) = Id$. Possiamo supporre di operare su matrici $n \times n$; scegliamo come norma su M_n $\|(a_{ij})\| = max|a_{ij}|$: allora $|AB| \le n|A||B|$ e, in particolare, $|A^k| \le n^{k-1}|A|^k$. Definiamo

$$A(t,s) := Id + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{s \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_m \le t} C(t_m)C(t_{m-1})\dots C(t_2)C(t_1)dt_1dt_2\dots dt_m.$$

(cosicchè $A(t,0) = A(t)$). Osserviamo che, dati $a < b < c$ si ha

$$\int_{a<t_1<t_2<\cdots<t_m<c} C(t_m)C(t_{m-1})\dots C(t_2)C(t_1)dt_1dt_2\dots dt_m =$$

$$\sum_{i=0}^{m} \int_{a<t_1<t_2<\dots t_i \le b<t_{i+1}<t_m<c} C(t_m)C(t_{m-1})\dots C(t_2)C(t_1)dt_1dt_2\dots dt_m =$$

$$\sum_{i=0}^{m} \int_{b<t_{i+1}<\dots<t_m<c} C(t_m)C(t_{m-1})\dots C(t_{i+1})dt_{i+1}dt_{i+2}\dots dt_m \times$$

$$\int_{a<t_1<t_2<\dots t_i \le b} C(t_i)C(t_{i-1})\dots C(t_2)C(t_1)dt_1dt_2\dots dt_i.$$

Poichè consideriamo come condizione iniziale l'identità , possiamo dedurre che

$$A(c,a) = A(c,b)A(b,a).$$

Ne segue che $A(t+\Delta t) = A(t+\Delta t, 0) = A(t+\Delta t, t)A(t)$, da cui

$$\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \frac{A(t+\Delta t, t) - 1}{\Delta t} A(t).$$

Per provare che la derivata di $A(t)$ è $C(t)A(t)$ basta allora provare che

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t, t) - 1}{\Delta t} = C(t).$$

Sia $C(t+s) = C(t) + D(s)$; sviluppiamo l'integrale:

$$\int_{t \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_m \le t+\Delta t} C(t_m)C(t_{m-1})\dots C(t_2)C(t_1)dt_1dt_2\dots dt_m =$$

$$\int_{0\le u_1\le u_2\le\cdots\le u_m\le\Delta t} (C(t)+D(u_m))\dots(C(t)+D(u_2))(C(t)+D(u_1))du_1\dots du_m =$$

$$\frac{1}{m!}(C(t)\Delta t)^m + r_m.$$

dove r_m è la somma di 2^m-1 termini ottenuti da monomi di grado m in $C(t)$ e nei $D(u)$ in cui compare almeno un $D(u)$. Se $|D(u)|<\epsilon$ nell'intervallo considerato e $M>1$ maggiora $|C(t)|$ ogni termine di tale tipo è maggiorato in modulo da $\frac{1}{m!}\epsilon(\Delta t)^m(nM)^{m-1}$ e pertanto $A(t+\Delta t,t)=e^{\Delta t C(t)}+r$ dove r è maggiorato da $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\epsilon(\Delta t)^m(nM)^{m-1}\le\epsilon(e^{(\Delta t)nM}-1)$, nell'intervallo considerato. Passando al limite otteniamo ciò che si voleva.

La formula si estende poi al caso di un'algebra che sia limite inverso di algebre di dimensione finita ed infine anche al completamento di un'algebra graduata con addendi di dimensione finita. In questo caso si costruisce ricorsivamente la soluzione fino a grado k per ogni k; si ottiene infine una serie formale che in ogni grado è espressa da una serie convergente. □

§8.4 Invarianza dell'integrale di Kontsevich.

Vogliamo provare che l'integrale $Z(K)$ è invariante per deformazioni (famiglie a un paramentro ϕ_t di diffeomorfismi di $\mathbb{R}^3$ che variano in modo C^∞ rispetto a t e tali che $\phi_0=Id$) che mantengono K nella classe dei nodi con punti critici non degeneri e non alterano il numero dei punti critici. Chiaramente tali deformazioni non esauriscono le isotopie ambientali di $\mathbb{R}^3$; di fatto $Z(K)$ *non* risulterà invariante per isotopie che alterano il numero dei punti critici: sarà pertanto necessario "correggerlo" opportunamente.

Osserviamo preliminarmente che, fissato K, ogni deformazione del tipo precedente può ottenersi come composizione di:

(A) *movimenti orizzontali*: deformazioni di $\mathbb{R}^3=\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ che preservano i piani orizzontali $t=cost.$ e fissano puntualmente i livelli critici.

(B) *spostamenti di punti critici*: deformazioni che sono l'identità fuori di un piccolo intorno dei punti critici.

Analizzeremo singolarmente queste deformazioni; si noti che le mosse di tipo B non preservano le componenti connesse della varietà di integrazione $\mathcal{S}_m$: dunque non ha senso parlare di invarianza per un singolo integrale nella formula in 8.1.4.

A) Movimenti orizzontali.

Anzitutto osserviamo che possiamo limitarci a provare l'invarianza per movimenti orizzontali relativamente a intervalli di tempo in cui non ci sono valori critici; infatti, dato comunque un intervallo $[\alpha,\beta]$ è sempre possibile suddividerlo in sottointervalli del tipo voluto e intevalli di ampiezza molto piccola in cui cadono i valori critici (si ricordi che i punti critici sono stabili per deformazioni orizzontali): il contributo all'integrale di questi ultimi è trascurabile.

Prendiamo un intervallo di tempo $[a,b]$ in cui non cada alcun valore critico e sia k il numero di archi di $t^{-1}(a,b)$. Indichiamo per semplicità con $z_1,z_2,\dots,z_k$ le k funzioni $z_i(t)$ corrispondenti e consideriamo $t\to(z_1(t),z_2(t),\dots,z_k(t))$ come cammino nell'aperto X_k dello spazio $\mathbb{C}^k$ in cui le coordinate sono distinte. Vogliamo mostrare

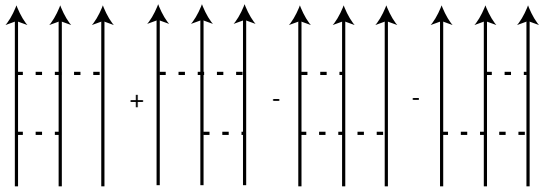
che, con opportune convenzioni, l'espressione $Z_b^a(K)$ è invariante per deformazioni del cammino mantenenti gli estremi fissati.

Per studiare questo fenomeno conviene prima di tutto discutere piú in dettaglio lo spazio $\mathcal{A}_a^b$. Osserviamo prima di tutto che se $a < c < b$ si ha un evidente isomorfismo di spazi vettoriali fra $\mathcal{A}_a^c, \mathcal{A}_c^b, \mathcal{A}_a^b$, quindi la moltiplicazione descritta in precedenza induce su $\mathcal{A}_a^b$ una struttura di algebra associativa in cui è definita anche una comoltiplicazione; inoltre lo spazio $\mathcal{A}_a^b$ dipende solo dal verso di percorrenza del tempo nei k archi $t^{-1}(a,b)$ Abbiamo in definitiva una bialgebra graduata associativa che ha per base gli elementi t_{ij} corrispondenti ad una corda che unisce gli archi di indice i, j, con il segno positivo se hanno lo stesso colore (cioè se vengono percorsi nello stesso verso) e negativo altrimenti.

È anche chiaro, dato che vi è un ordine di percorrenza del tempo, che tali elementi generano l'algebra. Se consideriamo un sottoinsieme degli indici $1, \ldots, k$ gli elementi t_{ij} con indici nel sottoinsieme generano evidentemente una sottoalgebra.

Interpretiamo la relazione a quattro termini. Tale relazione coinvolge solo tre indici, siano 1,2,3: ci sono otto modi di orientare il tempo; iniziamo con il caso $+++$. Dalla figura emerge chiaramente che la relazione a quattro termini si traduce nelle due seguenti regole di commutazione (la seconda si ottiene dalla prima per permutazione ciclica):

$$[t_{13}, t_{12} + t_{23}] = [t_{21}, t_{23} + t_{31}] = 0.$$



Dalle convenzioni fatte sui segni in effetti ci si può facilmente convincere che in ogni caso valgono le relazioni:

$$t_{ij} = t_{ji},$$
$$[t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}] = [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0,$$
$$[t_{ij}, t_{hk}] = 0 \quad \text{se} \quad i, j, h, k \quad \text{sono indici distinti.}$$

che sono esattamente le relazioni infinitesimali delle trecce pure che definiscono $\mathcal{P}_n$.

Osservazione. La realizzazione di $\mathcal{P}_n$ come algebra generata dai diagrammi elementari t_{ij} permette di introdurre una struttura di algebra di Hopf analogamente a come si era fatto nel caso dei diagrammi di corde sulla retta. Non è difficile verificare che tale struttura coincide con quella definita all'inizio di §8.2.

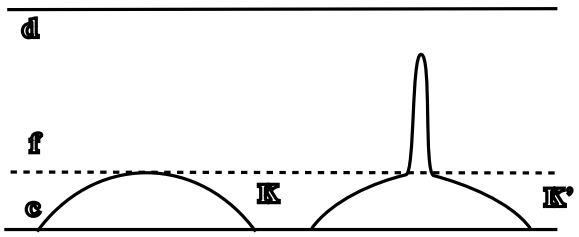
Consideriamo il caso della connessione K-Z.

Proposizione 8.4.1. *Se $[a,b]$ è un intervallo in cui non cadono valori critici di t allora $Z_a^b(K)$ è la propagazione lungo la curva $z(t)$ della connessione K-Z.*

Corollario 8.4.2. *Se $[a,b]$ è un intervallo in cui non cadono valori critici di t allora $Z_a^b(K)$ dipende solo dalla classe di omotopia del cammino $z(t)$ con gli estremi $z(a), z(b)$ fissati.*

B) Spostamenti di punti critici.

Vogliamo considerare ora un piccolo arco del nodo intorno ad un punto critico e modificarlo in modo tale da creare un *ago* sottile che sposta il valore del punto critico come nella seguente figura.

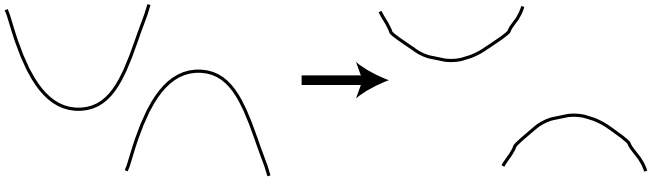


Sia K' il nuovo nodo costruito. Stimiamo la differenza dei due integrali $Z(K)$, $Z(K')$. Indichiamo con $w_1(t), w_2(t)$ i rami a sinistra e a destra del punto critico in K e con $z_1(t), z_2(t)$ quelli del nodo modificato K'. Possiamo assumere nell'intervallo c, d in cui K è stato modificato si abbia $|z_1(t) - z_2(t)| < \epsilon$ a meno di un intervallo (c, f) di lunghezza dell'ordine di ϵ. Poiché $Z(K) - Z(K') = Z_a^c(K)(Z_c^d(K) - Z_c^d(K'))Z_d^b(K)$ è chiaro che per dare una stima sui coefficienti di $Z(K) - Z(K')$ basta stimare $Z_c^d(K) - Z_c^d(K')$. Questa stima si spezza in due parti. Nell'intervallo (c, f) le funzioni w_1, w_2 z_1, z_2 sono contemporaneamente definite (in K e K' rispettivamente), e il loro contributo può maggiorarsi con una costante per la lunghezza di tale intervallo che abbiamo preso dell'ordine di ϵ. Nel rimanente intervallo (f, d) vi sono i due rami di z_1, z_2 corrispondenti all'ago introdotto su K' e non su K. I due integrali differiscono pertanto per quei termini in $Z_f^d(K')$ in cui vi sono corde che hanno almeno uno dei due estremi in $1, 2$. Sia t_k il massimo tempo in cui vi è una tale corda; se questa unisce gli archi 1,2 allora si tratta di una corda isolata ed il coefficiente è 0. I termini in cui uno dei due estremi al tempo t_k è in 1 ed il secondo in un arco j distinto da 2 si accoppiano con il termine analogo in cui 1 viene scambiato con 2; questo termine deve considerarsi con il segno scambiato dato che sui due rami dell'ago il tempo è percorso in versi opposti. Poiché non vi sono ulteriori corde dopo questa che iniziano nei rami 1,2 questi due termini contribuiscono allo stesso termine dell'integrale. Alla variabile di integrazione t_k corrisponde il termine $\dfrac{dlog(z_j(t) - z_1(t))}{dt} - \dfrac{dlog(z_j(t) - z_2(t))}{dt}$ che in modulo si può maggiorare con $E\epsilon$. Gli unici altri termini dell'integrazione da considerare sono quelli provenienti dalla corda 1,2. Per essi possiamo effettuare una stima simile a quella data nella dimostrazione della finitezza dell'integrale: ogni termine che proviene da una tale corda è maggiorato da una costante per $1/t$, cosicchè l'integrale è maggiorato da una costante per:

$$\int_{0<t_1<t_2\cdots<t_{m-1}<t_m<\epsilon} \frac{1}{t_1 t_2 \dots t_{m-1}} dt_1 \dots dt_m = \epsilon.$$

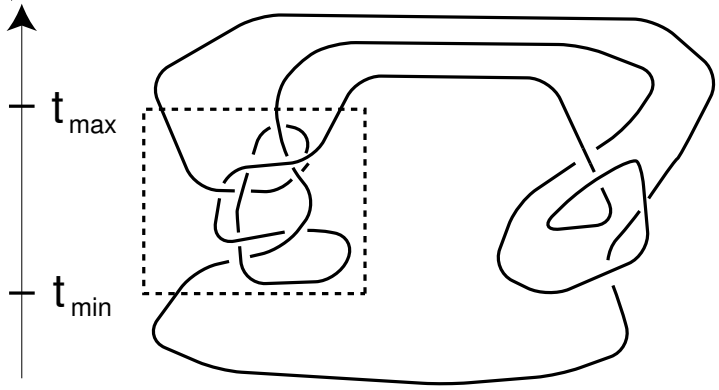
Da tutto ciò segue la

Proposizione 8.4.3. *$Z(K)$ è invariante per spostamenti di punti critici del tipo:*



Dim. Possiamo effettuare la deformazione tramite una famiglia di deformazioni orizzontali che trasformano ciascun ramo disegnato in un piccolo ago di ampiezza ϵ; trattandosi di deformazioni orizzontali, il valore di $Z(K)$ non cambia, ma poiché questo valore tende a $Z(K')$ al tendere a 0 di ϵ abbiamo la tesi. □

È opportuno adesso discutere un'interessante osservazione, dovuta a Le, che permette di ridurre il numero degli addendi nel calcolo di $Z(K)$; ricordiamo che è stato introdotto l'integrale "parziale" $Z_a^b(K) \in \mathcal{A}_a^b$: possiamo cambiare leggermente punto di vista e interpretarlo come integrale relativo a un *tangle* (cfr. def. 10.3.1); precisamente, consideriamo la parte di nodo compresa nel rettangolo tratteggiato e definiamo $Z_T(K)$ tramite la formula in 8.1.4, considerando però solo le componenti relative a corde che iniziano e finiscono in T oppure iniziano e finiscono in $K \setminus T$; si noti che $Z_T(K) \in \hat{\mathcal{A}}^c$.

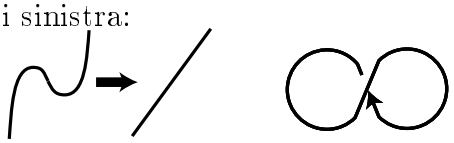


Proposizione 8.4.4. *$Z_T(K) = Z(K)$.*

Dim. Anzitutto si osserva che Z_T è invariante per deformazioni a un parametro (K_s, T_s) di $(K,T) = (K_0, T_0)$ nella classe dei nodi con punti critici non degeneri (lasciamo la verifica di questo fatto per esercizio: cfr. [CD2], pag. 14, sublemma). Deformiamo il nodo K "comprimendo" il tangle T entro un rettangolo di ampiezza ε: per l'osservazione precedente, basterà far vedere che $Z(K) - Z_{T_\varepsilon}(K_\varepsilon)$ tende a zero per $\varepsilon \to 0$. La differenza $Z(K) - Z_{T_\varepsilon}(K_\varepsilon)$ è data dagli addendi in $Z(K)$ relativi a corde con esattamente un estremo in T; dunque avremo l'asserto se proviamo che che l'integrale corrispondente a una sola tale corda tende a zero; sia ℓ la distanza tra il ramo in T_ε che contiene il primo estremo di corda e quello in $K_\varepsilon \setminus T_\varepsilon$ che contiene l'altro estremo al tempo t_{min}; tale distanza al tempo t_{max} non supererà $\ell + \varepsilon$, pertanto possiamo stimare l'integrale come segue:

$$\left|\ln\left(\frac{\ell+\varepsilon}{\ell}\right)\right| = \left|\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\ell}\right)\right| \sim \varepsilon \to_{\varepsilon\to 0} 0. \quad \square$$

Come già osservato, le deformazioni di tipo A,B non esauriscono tutte le possibili equivalenze; vi è ancora una mossa che deve essere presa in considerazione per completare l'equivalenza, ed è quella di eliminare due punti critici consecutivi (una gobba) secondo la figura di sinistra:



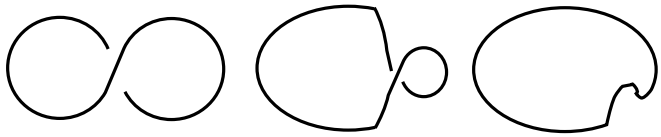
È stato osservato da Bott e Bar-Natan che $Z(K)$ non è invariante per questa mossa; Kontsevich ha quindi introdotto la seguente modifica: denotiamo con ∞ l'immersione disegnata nella parte destra della figura precedente.

Definizione 8.4.5. *Se c è il numero di punti critici di K, poniamo:*

$$\tilde{Z}(K) := Z(K)Z(\infty)^{-\frac{c}{2}}$$

Teorema 8.4.6. *$\tilde{Z}(K)$ è un invariante universale dei nodi.*

Dim. Dobbiamo dimostrare l'invarianza e l'universalità di $\tilde{Z}(K)$. La prima asserzione si prova nel modo seguente. Tramite movimenti orizzontali e movimenti di punti critici possiamo muovere le gobbe fino a portarle nella parte superiore del nodo. Poi possiamo stringere il nodo e finalmente decomporlo in due parti, K_1, K_2, la seconda delle quali contiene solo le gobbe. Per la moltiplicatività dell'integrale di Kontsevich, la correzione introdotta implica immediatamente l'invarianza, dal momento che il contributo di una gobba coincide con quello di ∞; quest'ultima asserzione si prova considerando una successione di movimenti orizzontali del tipo:



Per quanto riguarda la seconda asserzione è sufficiente provarla per Z, dal momento che $Z(\infty) = 1 +$ (termini di grado superiore). Osserviamo preliminarmente che se K_+, K_- sono diagrammi di nodi skein-correlati nell'incrocio determinato dai rami i, j, allora $Z(K_+) - Z(K_-)$ è somma di integrali relativi a componenti nella cui indicizzazione compare la coppia i, j.

Sia ora C una curva con m autointersezioni; dobbiamo valutare $Z^{(m)}(C)$. Per definizione $Z^{(m)}(C) = \sum_i \pm Z(C_i)$ ove i 2^m nodi C_i sono ottenuti da C staccando le m autointersezioni in tutti i modi possibili. Possiamo ripartire l'insieme dei C_i in coppie di nodi skein-correlati in ciascuno degli m incroci determinati dalle autointersezioni. Pertanto, grazie all'osservazione precedente, possiamo concludere che il contributo minimo appare in grado $\geq m$; inoltre il contributo in grado m è , a meno di una costante che determineremo in seguito, il prodotto delle corde che congiungono i rami relativi a ciascuno degli m incroci: questo è per definizione il diagramma di m corde associato alla curva singolare C.

Il coefficiente di cui sopra si ottiene calcolando la differenza di due integrali del tipo $\int \frac{dz_1 - dz_2}{z_1 - z_2}$ in cui $z_1 - z_2$ esegue una rotazione di π una volta in senso antiorario e l'altra in senso orario; dal teorema di Cauchy abbiamo un contributo $2\pi i$ in ognuno degli m punti, e il loro prodotto $(2\pi i)^m$ cancella esattamente il coefficiente $\frac{1}{(2\pi i)^m}$ introdotto nella definizione dell'integrale di Kontsevich. □

§9 Costruzione combinatoria dell'integrale di Kontsevich

In questa parte del lavoro delineeremo una costruzione combinatoria dell'invariante universale. Come già per la costruzione analitica dell'integrale di Kontsevich, il procedimento che seguiremo coinvolgerà diversi strumenti tecnici apparentemente non correlati. Punto centrale della costruzione sarà lo studio dell'equazione K-Z:

$$dG = \Omega G$$

$\Omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i<j} t_{ij} d\, log(z_i - z_j)$ essendo la forma di connessione della connessione K-Z. Inizieremo studiando il "caso unidimensionale" di questa equazione: ciò permetterà di introdurre un oggetto fondamentale, la serie di Drinfeld. Passeremo poi al caso generale, provando l'esistenza di soluzioni speciali dell'equazione K-Z aventi un determinato "comportamento asintotico".

Discuteremo la rappresentazione di monodromia associata ad una soluzione speciale dell'equazione K-Z ed esamineremo il problema della sua determinazione; l'integrale di Kontsevich sarà infine reintrodotto come "traccia" della rappresentazione di monodromia associata ad un particolare andamento asintotico.

§9.1 La serie di Drinfeld.

Studiamo l'equazione differenziale:

$$(*) \qquad G'(z) = \hbar(\frac{A}{z} + \frac{B}{1-z})G(z),$$

ove $\hbar = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}$, h è un parametro formale, A, B sono indeterminate non commutative e G è una serie formale in A, B a coefficienti funzioni analitiche nella variabile complessa z (definite su opportuni aperti che ora preciseremo).

Se scriviamo G come $G(z) = \sum_{M \in \mathcal{M}} g_M(z) M$, ove $\mathcal{M}$ è l'insieme dei monomi non commutativi nelle indeterminate A, B e $g_M(z)$ è una funzione a valori complessi, l'equazione $(*)$ è equivalente al seguente sistema di (infinite) equazioni ordinarie

$$\begin{cases} g_1'(z) = 0 \\ g_M'(z) = \dfrac{\hbar g_N(z)}{z} & \text{se } M = AN,\ N \in \mathcal{M} \\ g_M'(z) = \dfrac{\hbar g_{\tilde{N}}(z)}{1-z} & \text{se } M = B\tilde{N},\ \tilde{N} \in \mathcal{M} \end{cases}$$

Rimuovendo dal piano complesso $\mathbb{C}$ le semirette reali $(-\infty, 0]$, $[1, +\infty)$ otteniamo un aperto connesso $\mathbb{C}'$ su cui tutte le g_M son ben definite. Osserviamo adesso che il sistema può essere risolto calcolando ricorsivamente le primitive delle funzioni g_M ($\mathbb{C}'$ è semplicemente connesso); pertanto $(*)$ ammette un'unica soluzione analitica $\bar{G}$ con $\bar{G}(z_0) = \bar{G}_0 \in \mathbb{C}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ per ogni fissato $z_0 \in \mathbb{C}'$.

Denotiamo con $\mathbb{C}\langle A, B\rangle$ lo spazio dei polinomi nelle variabili non commutative A, B; nel seguito indicheremo con $z^C, C \in \mathbb{C}\langle A, B\rangle$ la serie $e^{C \log(z)}$, che è ben definita per $z \in \mathbb{C}'$.

Definizione 9.1.1. *Sia $C \in \mathbb{C}\langle A, B\rangle$. Diciamo che una soluzione $\tilde{G}(z)$ di $(*)$ ha comportamento asintotico a $(z-z_0)^C$ in $z_0 \in \mathbb{C}'$ se $\tilde{G}(z)(z-z_0)^{-C}$ ammette prolungamento analitico in un intorno di z_0 con valore 1 in z_0. Scriveremo allora*

$$\tilde{G}(z) \sim_{z \to z_0} (z-z_0)^C.$$

Teorema 9.1.2. *Esiste un' unica soluzione G_0 dell'equazione $(*)$ asintotica a $z^{\hbar A}$ in 0, ed un'unica soluzione G_1 asintotica a $(1-z)^{\hbar B}$ in 1.*

Dim. Proviamo che esiste una soluzione G_0 asintotica a $z^{\hbar A}$ in 0; allo stesso modo si procede per G_1. Scriviamo la cercata soluzione, nella forma $G_0(z) := H(z)z^{\hbar A}$, ove $H(z) = \sum_{k\geq 0} H_k z^k$ è una serie convergente con $H(0) = H_0 = 1$. Sostituendo formalmente l'espressione $G_0(z) = H(z)z^{\hbar A}$ nella $(*)$ otteniamo per $H(z)$ l'equazione differenziale :

$$H'(z)z^{\hbar A} + \hbar H(z)\frac{A}{z}z^{\hbar A} = \hbar(\frac{A}{z} + \frac{B}{1-z})H(z)z^{\hbar A}$$

da cui

$$zH'(z) - \hbar[A, H(z)] = \hbar B \frac{zH(z)}{1-z}.$$

Sviluppando in serie $H(z)$, $\frac{1}{1-z}$ e moltiplicando le serie a secondo membro si ha:

$$z\sum_{k\geq 0} kH_k z^{k-1} - \sum_{k\geq 0} \hbar[A, H_k]z^k = \hbar B \sum_{k\geq 0} H_k z^{k+1} \sum_{k\geq 0} z^k = \hbar B \sum_{k\geq 0} (\sum_{i=0}^{k-1} H_i) z^k.$$

Considerando le componenti omogenee, otteniamo $[A, H_0] = 0$ per $k = 0$ mentre per $k > 0$ si ha:

$$kH_k - \hbar[A, H_k] = \hbar B \sum_{i=0}^{k-1} H_i.$$

Queste relazioni ricorsive sono risolubili: posto infatti $H_0 = 1$, si ha per $k > 1$

$$H_k = \frac{1}{k}\sum_{i\geq 0} \frac{\hbar^i}{k^i} ad(A)^i(\hbar B \sum_{r\geq 0}^{i-1} H_r)$$

ove $ad(X)(Y) = [X, Y]$. La convergenza della serie $H(z)$ segue da risulati generali sulle soluzioni formali di questo tipo di equazioni differenziali: per maggiori dettagli si veda [Was]. □

Poichè G_0 e G_1 sono entrambi soluzioni non nulle di $(*)$, esse differiscono per una "costante" (che è di fatto un elemento in $C\langle\langle A, B\rangle\rangle$); infatti da $0 = d1 = d(GG^{-1})$ deduciamo $d(G^{-1}) = -G^{-1}dG\, G^{-1}$, pertanto

$$\begin{aligned} d(G_1^{-1}G_0) &= d(G_1^{-1})G_0 + G_1^{-1}dG_0 \\ &= -G_1^{-1}(dG_1)G_1^{-1}\, G_0 + G_1^{-1}\Omega G_0 = -G_1^{-1}\Omega G_0 + G_1^{-1}\Omega G_0 = 0. \end{aligned}$$

Definizione 9.1.3. *Definiamo la serie di Drinfeld* $\Phi \in \mathbb{C}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ *tramite la relazione*

$$G_0 = G_1\Phi(A, B).$$

La serie $\Phi(A, B)$ è un oggetto universale tramite il quale esprimeremo relazioni fra soluzioni dell'equazione K-Z ed anche valori dell'invariante universale di Kontsevich. Per il momento esplicitiamone alcune proprietà elementari.

Lavoriamo nel completamento dell'algebra inviluppante dell'algebra di Lie libera nei due generatori A, B.

Proposizione 9.1.4. $\Phi(A, B)$ *è un elemento di "tipo gruppo" ovvero*

$$\Delta\Phi(A, B) = \Phi(A, B) \otimes \Phi(A, B)$$

pertanto $\Phi(A, B) = e^{\Psi(A,B)}$ *dove* $\Psi(A, B)$ *è una serie di Lie.*
Inoltre vale la relazione

$$\Phi(A, B)^{-1} = \Phi(B, A).$$

Dim. Applichiamo Δ all' equazione differenziale e osserviamo che $\Delta G, G \otimes G$ sono soluzioni della equazione con medesimo andamento asintotico: da ciò segue la prima parte. Per la seconda scambiamo formalmente A, B e $z, 1 - z$: questa sostituzione scambia G_0, G_1.

La seconda asserzione è un fatto generale: sia $D(h) = D = 1 + hC$ un'elemento di un'algebra completata che sia di tipo gruppo. Proviamo che $D = \exp(ha)$ con a primitivo. Derivando l'esponeziale rispetto ad h si ha $\frac{dD}{dh} = aD$, dunque $a = \frac{dD}{dh}D^{-1}$. Ma $\Delta(\frac{dD}{dh}) = \frac{d\Delta D}{dh} = \frac{dD}{dh} \otimes D + D \otimes \frac{dD}{dh}$. Dunque

$$\Delta a = \Delta\left(\frac{dD}{dh}D^{-1}\right) = (\frac{dD}{dh} \otimes D + D \otimes \frac{dD}{dh})D^{-1} \otimes D^{-1} = a \otimes 1 + 1 \otimes a. \quad \square$$

Osservazione. Drinfeld ha dimostrato [D4] che se F è il completamento dell'algebra di Lie libera nelle indeterminate A, B, allora

$$\ln\Phi \equiv \sum_{k,l\geq 0} c_{kl}ad(B)^l ad(A)^k[A, B]h^{k+l+2} \quad mod\,[[F, F], [F, F]]$$

ove i numeri complessi c_{kl} sono dati tramite la serie generatrice

$$1 + \sum_{k,l\geq 0} c_{kl}u^{k+1}v^{l+1} = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n(2\pi\sqrt{-1})^n}\,(u^n + v^n - (u + v)^n)\right)$$

in cui ζ è la funzione zeta di Riemann; in particolare notiamo che i coefficienti sono trascendenti.

§9.2 Esistenza di soluzioni speciali dell'equazione K-Z.

Vogliamo studiare l'equazione

$$dG = \Omega G$$

ove $\Omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i<j} t_{ij} d\,log(z_i - z_j)$ è la forma della connessione K-Z, definita nel sottospazio $X_n \subset \mathbb{C}^n$ ove le coordinate sono distinte e G è una funzione analitica su X_n a valori nel completameto $\hat{\mathcal{P}}_n$ dell'algebra di olonomia (rispetto alla gradazione naturale per la quale i generatori t_{ij} hanno grado 1). Osserviamo che X_n può pensarsi come il complementare in $\mathbb{C}^n$ degli iperpiani $z_i - z_j = 0,\ i < j,\ i, j = 1, \dots n$. A causa delle singolarità logaritmiche della forma Ω, le soluzioni G andranno intese di volta in volta come funzioni polidrome su X_n o come funzioni univalenti sul rivestimento universale $\tilde{X}_n$ di X_n. Più in dettaglio, operando opportuni tagli su X_n in codimensione reale 1 (come si è fatto esplicitamente in 9.1) si ottiene un aperto denso semplicemente connesso $\mathcal{B}$ su cui le soluzioni si estendono; scegliendo una sezione di $\mathcal{B}$ in $\tilde{X}_n$ queste soluzioni si estendono a soluzioni globali su tale spazio. Osserviamo che i calcoli che effettueremo con funzioni a valori in $\hat{\mathcal{P}}_n$ sono giustificati dal fatto che $\hat{\mathcal{P}}_n$ è limite inverso delle algebre finito-dimensionali $\mathcal{P}_n/J_m,\ J_m$ essendo l'ideale degli elementi di grado $\geq m$; pertanto una funzione in $\hat{\mathcal{P}}_n$ è determinata da una successione di funzioni compatibili in $\mathcal{P}_n/J_m$.

Nel capitolo precedente abbiamo visto che l'equazione K-Z è un'equazione di trasporto parallelo per la connessione Ω, la cui piattezza è equivalente alle relazioni definitorie per l'algebra dei coefficienti $\mathcal{P}_n$. Anche in questo caso studieremo "soluzioni con dato andamento asintotico", del tipo $G = f(u_1, \dots, u_n) \prod_{r=1}^{n} u_r^{B_r}$, ove $(B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{P}_n \times \cdots \times \mathcal{P}_n$, $f(u_1, \dots, u_n)$ è olomorfa intorno a 0 e $f(0) = 1$.

Per trovare soluzioni della K-Z con prescritto comportamento asintotico procederemo come segue: tramite un cambiamento "monomiale" (dunque non lineare) di coordinate si decompone la forma K-Z nella somma di una parte olomorfa in 0 e ivi non nulla e di una forma che è una combinazione lineare (con coefficienti $A_k \in \mathcal{P}_n$ esplicitamente determinabili) delle derivate logaritmiche delle forme lineari che individuano gli iperpiani coordinati (relativi alle nuove coordinate). Non è ora difficile risolvere l'equazione K-Z per approssimazioni successive, deducendo l'esistenza di una soluzione il cui comportamento asintotico è prescritto dalle costanti A_k.

Siano $\{\beta_1 = 0, \dots, \beta_N = 0\}$ gli iperpiani polari di $\Omega = \sum_{i<j} t_{ij} dlog(z_i - z_j)$ (omettiamo per semplicità notazionale il fattore $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}$ nella discussione seguente); supponiamo di poter esibire un'applicazione olomorfa da un intorno V di $0 \in \mathbb{C}^n$ con coordinate $u_1, \dots, u_n$ in $\mathbb{C}^n$ che trasforma il complementare degli iperpiani coordinati $u_i = 0$ nel complementare degli iperpiani $\beta_j = 0$, cosicchè :

$$\beta_j = \prod_h u_h^{m_{j,h}} p_j(u_1, \dots, u_n)$$

con $m_{j,h} \geq 0$ e $p_j(u_1, \dots, u_n)$ olomorfa in un intorno di 0, $p_j(0) \neq 0$.

Posto $t_j := t_{rs}$ se $\beta_j = z_r - z_s$, scriviamo la forma nelle nuove coordinate ottenendo:

$$\sum_j t_j\, d\,log(\prod_h u_h^{m_{j,h}} p_j(u)) = \sum_{j,h} t_j m_{j,h} d\,log(u_h) + \Omega_0 = \sum_{h=1}^{n} A_h d\,log(u_h) + \Omega_0$$

ove gli elementi A_k sono esplicitamente calcolabili e Ω_0 è olomorfa intorno a 0.

I due risultati che seguono valgono per una qualunque forma del tipo $\Omega = \sum_{h=1}^n A_h d\,log(u_h) + \Omega_0$ con $\Omega \wedge \Omega = 0$ ed Ω_0 olomorfa.

Lemma 9.2.1. $[A_i, A_j] = 0$ *per* $i \neq j$.

Dim. L'asserto è un'immediata conseguenza della piattezza della forma Ω:

$$0 = \Omega \wedge \Omega = \sum_{i<j} [A_i, A_j] \frac{du_i \wedge du_j}{u_i u_j} + \Omega_0 \wedge \Omega_0 .$$

Poichè Ω_0 è olomorfa in 0 si ha quanto si voleva. □

Teorema 9.2.2. *Assumiamo che i coefficienti di* Ω *siano di grado 1 in un'algebra graduata* $\mathbb{A}$. *Allora esiste un'unica soluzione* G *dell'equazione* $dG = \Omega G$ *definita in un intorno semplicemente connesso di* 0 *del tipo* $G = F(u_1, \dots, u_n) \prod_{r=1}^n u_r^{A_r}$ *con* $F(u_1, \dots, u_n)$ *olomorfa intorno a* 0 *e* $F(0) = 1$.

Dim. ([DP]). Come nel caso unidimensionale, riscriviamo $dG = \Omega G$ ponendo $G = F \prod_i u_i^{A_i}$; si ha:

$$dG = dF \prod_i u_i^{A_i} + \sum_{i=1}^n F \prod_j u_j^{A_j} \frac{A_i}{u_i} du_i = \Omega F \prod_i u_i^{A_i}.$$

Poichè $\Omega = \sum_{h=1}^n A_h d\,log(u_h) + \Omega_0$ deduciamo:

$$dF = \sum_{i=1}^n [A_i\, d\,log\, u_i, F] + \Omega_0 F.$$

Poichè F ha valori in $\hat{\mathcal{P}}_n$ possiamo scrivere $F = \sum_{i \geq 0} F_i$ con F_i di grado i. Tenendo conto che $F_0(0) = 1$, $F_i(0) = 0$ per $i > 0$ e che gli A_i e Ω_0 hanno grado 1 la precedente equazione è equivalente al sistema :

$$(**) \qquad dF_{i+1} = [\sum_{r=1}^n A_r d\,log\, u_r, F_i] + \Omega_0 F_i$$

la cui compatibilità è garantita dalla piattezza di Ω. Sia ω_i la forma a secondo membro di $(**)$; proviamo per induzione che ω_i è olomorfa. Anzitutto $dF_0 = 0$ implica $F_0 = cost. = F_0(0) = 1$. Assumiamo induttivamente che $[\sum_{r=1}^n A_r d\,log\, u_r, F_i] + \Omega_0 F_i$ sia olomorfa; proviamo che se F_{i+1} è soluzione di $(**)$ con condizione iniziale $F_{i+1}(0) = 0$ allora $[\sum_{r=1}^n A_r d\,log\, u_r, F_{i+1}]$ è ancora olomorfa. A tale scopo basta vedere che u_h divide $[A_h, F_{i+1}]$, ovvero che $[A_h, F_{i+1}]$ svanisce su $u_h = 0$. Poichè $[A_h, F_{i+1}]$ svanisce in 0 basta mostrare che $[A_h, F_{i+1}]$ è costante su $u_h = 0$, ovvero che $[A_h, dF_{i+1}]_{|_{u_h=0}} = 0$. Usando l'identità di Jacobi e il lemma precedente si ottiene:

$$\begin{aligned}
[A_h, dF_{i+1}] &= [A_h, [\sum_{r=1}^n A_r d\,log\, u_r, F_i] + \Omega_0 F_i] \\
&= -[\sum_{r=1}^n A_r d\,log\, u_r, [F_i, A_h]] - [F_i, [A_h, \sum_{r=1}^n A_r d\,log\, u_r]] + [A_h, \Omega_0 F_i] \\
&= [\sum_{r=1}^n A_r d\,log\, u_r, [A_h, F_i]] + [A_h, \Omega_0] F_i + \Omega_0 [A_h, F_i].
\end{aligned}$$

Ponendo $u_h = 0$ e usando l'ipotesi induttiva deduciamo che tutti i termini svaniscono eccetto al più $[A_h, \Omega_0]F_i$. Sia $\Omega_0 = \sum_{r=1}^{n} P_r du_r$; dalla condizione di piattezza $\Omega \wedge \Omega = 0$ ricaviamo $[\frac{A_h}{u_h} + P_h, \frac{A_k}{u_k} + P_k] = 0 \; \forall \, h \neq k$. Moltiplicando per u_h otteniamo $[A_h, \frac{A_k}{u_k} + P_k]_{u_h=0} = 0$ e dunque $[A_h, \Omega_0]_{u_h=0} = 0$ che è quanto volevamo. □

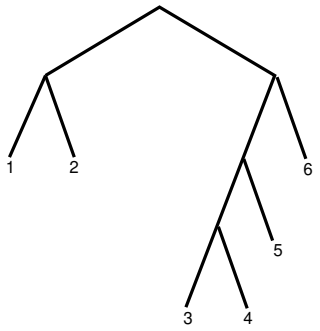
Descriviamo nel seguito come determinare i cambiamenti di coordinate del tipo utilizzato nel teorema precedente nel caso specifico della equazione K-Z. Di fatto codificheremo combinatoriamente gli andamenti asintotici tramite i monomi non associativi in n variabili dotati di una scelta di parentesi; l'idea è che le parentesi corrispondono a diversi ordini di infinitesimo delle differenze di variabili $z_i - z_j$; tali oggetti saranno poi equivalentemente descritti come alberi binari, e non sarà difficile a questo punto associare ad ogni prefissato andamento asintotico il cambiamento di coordinate tramite il quale può provarsi l'esistenza della soluzione avente tale andamento asintotico.

Consideriamo un alfabeto di n simboli distinti e costruiamo tutte le parole nei simboli dati e le due parentesi (,); questo è un monoide associativo per giustapposizione delle parole. Se A, B sono due tali parole definiamo il prodotto $A\,B := (A)(B)$; abbiamo ora un monoide non associativo. Per definizione il monoide libero non associativo nei simboli dati è il sottomonoide generato dai simboli dell'alfabeto. Le parole che si ottengono sono caratterizzate dalle seguenti proprietà:

(1) Leggendo la parola da sinistra verso destra ad ogni passo il numero di parentesi (è maggiore od uguale al numero di parentesi), ossia ogni parentesi) deve chiudere una parentesi (precedentemente aperta.
(2) Vi è un numero uguale di parentesi ( ), ossia ogni parentesi aperta deve successivamente essere chiusa.
(3) Non esiste alcuna sottosequenza non associata.

Le condizioni (2), (3) caratterizzano le parti iniziali di parole nel monoide libero non associativo. Vi sono istruzioni analoghe per leggere una parola da destra che caratterizzano le parti finali di una parola. Se a è un elemento dell'alfabeto e A una parola nel monoide libero scriveremo usualmente Aa invece di $(A)(a)$.

Un modo equivalente di descrivere le parole non associative è come albero binario con radice secondo la seguente visualizzazione: al monomio $(12)(((34)5)6)$ corrisponde il grafo



Più formalmente, dato il monomio non associativo M, l'albero associato Γ_M è ridotto alla sola radice se $M = v_0$, altrimenti $M = (M_s)(M_d)$ e Γ_M è definito indut-

tivamente come l'albero alla cui radice v_0 sono appesi (Γ_{M_s}), (Γ_{M_d}). Viceversa dato un albero del tipo in esame, se non è ridotto alla sola radice ad essa sono attaccati due rami Γ_s, Γ_d che sono essi stessi alberi del tipo desiderato. Per definizione il monomio non associativo M_Γ relativo a Γ è v_0 se $\Gamma = v_0$, mentre è $(M_{\Gamma_s})(M_{\Gamma_d})$ altrimenti.

Su Γ_M è naturalmente definito un ordinamento parziale per cui v_0 è massimo e i nodi di Γ_s e di Γ_d non sono comparabili. Dato un nodo $v \in \Gamma_M \equiv \Gamma$, il sottoalbero $\Gamma(v)$ che ha v per radice è ancora un albero binario.

Proposizione 9.2.3.

(1) *Il monomio associato a Γ è prodotto dei minimi di Γ.*
(2) *Se il monomio associato a Γ ha n elementi, allora Γ ha $2n-1$ nodi e $n-1$ sottovertici (cioè nodi cui è appeso un sottoalbero).*
(3) *Dato comunque un nodo x l'insieme di nodi $I_x := \{v \geq x\}$ è totalmente ordinato.*
(4) *Dati due nodi x, y esiste $sup(x,y) = inf(I_x \cap I_y)$.*

Dim. (1) Se Γ non si riduce a v_0, i minimi di Γ sono l' unione disgiunta di quelli dei suoi due rami.
(2) L'enunciato è evidente se Γ si riduce a v_0; altrimenti denotiamo con n_1, n_2 il numero di minimi di Γ_s, Γ_d rispettivamente, cosicchè $n_1 + n_2 = n$. Per induzione, $|\Gamma_s| = 2n_1 - 1$, $|\Gamma_d| = 2n_2 - 1$; ora, per costruzione:

$$|\Gamma| = |\Gamma_s| + |\Gamma_d| + 1 = 2n_1 - 1 + 2n_2 - 1 + 1 = 2(n_1 + n_2) - 1 = 2n - 1.$$

I sottovertici di Γ sono poi tutti e soli i nodi che non sono minimi; dunque il loro numero è $2n - 1 - n = n - 1$.
(3) Di nuovo, se $x = v_0$ allora $I_x = \{v_0\}$; altrimenti x si trova o nel ramo destro o in quello sinistro. Se ad esempio è in quello sinistro si vede immediatamente che detto $\overline{I}_x$ l'intervallo $\{v \geq x | v \in \Gamma_s\}$ si ha $I_x = \{v_0\} \cup \overline{I}_x$ e tutto segue per induzione.
(4) Segue immediatamente da (3). □

Si osservi che i minimi sono naturalmente ordinati da sinistra verso destra; li indicizzeremo con i numeri $1, \ldots, n$.

Per convenzione definiamo $\mathcal{P}_\Gamma$ come la sottoalgebra di $\mathcal{P}_n$ generata dagli elementi t_{ij} con i, j nei minimi di Γ.

Dato un nodo v, siano $\Gamma(v)_s, \Gamma(v)_d$ i due rami dell'albero $\Gamma(v)$. Indichiamo con $|v|_s, |v|_d$ i minimi di questi due alberi.

Per due minimi $i < j$ si ha che $i \in |v|_s, j \in |v|_d$ se e solo se $sup(i,j) = v$.

Definizioni 9.2.4.

$$T_v := \sum_{i \in |v|_s,\ j \in |v|_d} t_{ij}.$$

$$T := \sum_{i<j} t_{ij}.$$

Proposizione 9.2.5. *Gli elementi T_v commutano fra loro e $\sum_v T_v = T$. In particolare, T è centrale.*

Dim. La seconda relazione segue subito dalle definizioni:

$$T = \sum_{i<j} t_{ij} = \sum_v \sum_{i<j,\ sup(i,j)=v} t_{ij} = \sum_v T_v.$$

Siano ora a, b due nodi e sia $u = sup(a, b)$; se u è diverso da a, b allora a, b appaiono uno sul ramo sinistro e l'altro sul ramo destro di $\Gamma(u)$: gli indici che compaiono in T_a, T_b sono disgiunti e quindi tali elementi commutano. Supponiamo ora ad esempio $a > b$ e assumiamo che b si trovi sul ramo sinistro di $\Gamma(a)$; siano A, A' gli insiemi dei minimi sinistri e destri di $\Gamma(a)$ e A_1, A_2 quelli di $\Gamma(b)$. Si ha $A_1 \cup A_2 \subset A$ e dunque:

$$[T_a, T_b] = [\sum_{i\in A,\, j\in A'} t_{ij}, \sum_{h\in A_1,\, k\in A_2} t_{hk}] = \sum_{j\in A'} \sum_{h\in A_1,\ k\in A_2} [\sum_{i\in A} t_{ij}, t_{hk}].$$

Calcoliamo $[\sum_{i\in A} t_{ij}, t_{hk}]$ spezzando la somma in due parti:

$$[\sum_{i\in A} t_{ij}, t_{hk}] = \sum_{i\in A, i\neq h,\ i\neq k} [t_{ij}, t_{hk}] + [t_{hj} + t_{kj}, t_{hk}] = 0.$$

L'ultima uguaglianza segue dalle relazioni definitorie in $\mathcal{P}_n$. □

Dato un nodo v che non sia un minimo indichiamo con $|v|$ l'insieme totalmente ordinato dei minimi di $\Gamma(v)$, che è un sottoinsieme di $\{1, \dots, n\}$; siano poi i, j il minimo ed il massimo di $|v|$ e definiamo

$$s_v := z_i - z_j.$$

Sia infine V l'insieme dei sottovertici di Γ.

Proposizione 9.2.6. *Gli elementi s_v, $v \in V$ sono una base del sottospazio vettoriale W generato dagli elementi $z_i - z_j$ in $(\mathbb{C}^n)^*$; inoltre, se $h < k$ e $v = sup(h, k)$ (nell'ordinamento parziale su Γ), si ha:*

$$z_h - z_k = s_v + \sum_{w<v} \epsilon_w s_w, \ \ con\ \epsilon_w \in \{-1, 0, 1\}.$$

Dim. Poichè $dim_{\mathbb{C}} W = n - 1$, per 9.2.3 (2) basta vedere che gli s_v sono generatori lineari. Ciò segue immediatamente dalla formula precedente, pertanto dobbiamo provare solo tale formula. Se il grafo ha tre nodi $v_0, h = 1, k = 2$ si ha $z_h - z_k = s_{v_0}$; altrimenti $h \in \Gamma(v)_s$, $k \in \Gamma(v)_d$ e, se i, j sono rispettivamente il minimo e il massimo in $|v|$, si ha:

$$z_h - z_k = -(z_i - z_h) - (z_k - z_j) + (z_i - z_j).$$

La formula segue per induzione poiché i, h sono in $\Gamma(v)_s$, k, j sono in $\Gamma(v)_d$ e $s_v = z_i - z_j$. □

Abbiamo visto che, dato un nodo x, l'insieme I_x è totalmente ordinato. In particolare, se $x \neq v_0$ esiste un unico elemento $\overline{x}$ che segue x; poniamo

$$u_x = \frac{s_x}{s_{\overline{x}}}.$$

Sia poi $s_{\overline{v}_0} = 1$. La relazione precedente definisce un'applicazione razionale ϕ_Γ da $\mathbb{C}^{n-1}_{v_0,s} \cong \mathbb{C}^{n-1}$ con coordinate s_v, $v \in V$ a $\mathbb{C}^{n-1}_{v_0,u} \cong \mathbb{C}^{n-1}$ con coordinate u_v, $v \in V$, la cui inversa (come mappa razionale) è data dalla formula

$$s_x = \prod_{y \geq x} u_y.$$

Questo è il cambiamento di coordinate richiesto; prima di procedere al al calcolo degli A_k, consideriamo il caso $n = 3$; la forma è

$$\Omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(t_{12} dlog(z_1 - z_2) + t_{13} dlog(z_1 - z_3) + t_{23} dlog(z_2 - z_3) \right)$$

Ci sono due alberi binari: posto $x = z_1 - z_2$, $y = z_2 - z_3$, le relative coordinate "s" sono $\{x, x+y\}$ (risp. $\{y, x+y\}$) mentre le coordinate "u" sono $\dfrac{x}{x+y} \equiv v$ (risp. $\dfrac{y}{x+y} = 1 - v$). Pertanto la forma di olonomia può scriversi come

$$\Omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(T dlog(x+y) + t_{12} dlog(v) + t_{23} dlog(1-v) \right)$$

e una soluzione di $dG = \Omega G$ è del tipo $G = F(x+y)^T$, ove $(x+y)^T$ è centrale e F è soluzione di $\frac{dF}{dv} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{1-v} \right) F$, $A = t_{12}$, $B = t_{23}$ che è la $(*)$ di 9.1 (con $h = 1$).

Passiamo adesso al caso generale. Sia $sup(i,j) = v$; allora:

$$z_i - z_j = s_v + \sum_{w<v} \epsilon_w s_w = s_v (1 + \sum_{w<v} \epsilon_w \frac{s_w}{s_v}) = s_v \, P_{ij}$$

ove si è posto $P_{ij} := 1 + \sum_{w<v} \epsilon_w \prod_{w \leq x < v} u_x$. Osserviamo che P_{ij} è un polinomio nelle variabili u_w, $w < v$ che non svanisce in 0. Consideriamo di nuovo la forma

$$\Omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i<j} t_{ij} dlog(z_i - z_j) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_v \sum_{i<j,\ sup(i,j)=v} t_{ij} dlog(z_i - z_j)$$

Riscriviamola come:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_v \sum_{i<j,\ sup(i,j)=v} t_{ij} \left(dlog\, s_v + dlog(1 + \sum_{w<v} \epsilon_w \prod_{w \leq x < v} u_x) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_v \sum_{i<j,\ sup(i,j)=v} t_{ij} dlog\, s_v + \Omega_0 \\
&= \sum_v \frac{T_v}{2\pi\sqrt{-1}} dlog\, s_v + \Omega_0.
\end{aligned}$$

La forma Ω_0 è olomorfa nello spazio delle coordinate u_v; la sua espressione piú semplice è:

$$\Omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_v \sum_{h<k,\ sup(h,k)=v} t_{hk} dlog\left(\frac{z_h - z_k}{s_v}\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{h<k} t_{hk} dlog\, P_{hk}.$$

Manipoliamo ancora e otteniamo:

$$\sum_v T_v dlog\, s_v = \sum_v T_v dlog(\prod_{y:y\geq v} u_y) = \sum_v \sum_{y:y\geq v} T_v dlog\, u_y = \sum_y \sum_{v:v\leq y} T_v\, dlog\, u_y.$$

In definitiva abbiamo provato il seguente risultato.

Teorema 9.2.7. *Sia M un monomio non associativo e Γ l'albero binario associato; tramite la trasformazione di coordinate ϕ_Γ possiamo scrivere la forma K-Z come*

$$\Omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{v\in V} A_v dlog\, u_v + \Omega_0$$

ove Ω_0 è una forma olomorfa in 0 e $A_v := \sum_{x:x\leq v} T_x$. Corrispondentemente, se U è un intorno semplicemente connesso di 0, esiste un'unica soluzione dell'equazione K-Z del tipo

$$G_\Gamma = f(u_v) \prod_{v\in V} u_v^{A_v},$$

con $f(u_v)$ olomorfa in U e $f(0) = 1$.

Osservazione. Si noti che

$$\prod_{v\in V} u_v^{A_v} = s_{v_0}^T \prod_{v\in V\setminus\{v_0\}} u_v^{A_v} = \prod_{v\in V} s_v^{T_v}.$$

Esplicitiamo adesso le relazioni che intercorrono tra le soluzioni della K-Z associate ad un fissato grafo Γ e quelle relative rispettivamente:

(1) al grafo $\overline{\Gamma}$ in cui due minimi consecutivi sono "contratti" ad un unico minimo.
(2) ad un sottografo $\Gamma(v)$ di Γ.

In questa discussione è opportuno considerare la situazione da un punto di vista *reale*; abbiamo bisogno delle seguenti considerazioni preliminari di tipo generale. Sia $\mathcal{R}_n$ è l'insieme dei punti reali X_n; allora

$$\mathcal{R}_n := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_i \neq z_j\ per\ i \neq j\} = \coprod_{\sigma\in S_n} \mathcal{R}_n^\sigma$$

ove

$$\mathcal{R}_n^\sigma := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_{\sigma(1)} > z_{\sigma(2)} > \ldots > z_{\sigma(n)}\}.$$

Gli $\mathcal{R}_n^\sigma$ sono coni convessi (detti *camere*): in particolare sono contraibili. La camera

$$C = \mathcal{R}_n^1 = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_1 > z_2 > \dots > z_n\}$$

è detta *camera fondamentale*.

Osserviamo che la costruzione precedente, che associa ad un albero binario Γ una soluzione della K-Z, dà luogo ad una soluzione ben definita su C, perchè le coordinate s, u sono funzioni positive su C, ed ha pertanto senso considerarne il logaritmo. Più in generale, numerando da destra a sinistra i minimi di Γ con $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$, $\sigma \in S_n$, otteniamo una soluzione ben definita su $C = \mathcal{R}_n^\sigma$.

Ritorniamo al problema di partenza considerando il primo caso. Supponiamo che nel monomio M_Γ la coppia $i, i+1$ sia tra parentesi, cosicchè per $v = sup(i, i+1)$ si abbia $s_v = z_i - z_{i+1}$ e $T_v = t_{i\,i+1}$. Sia $\overline{\Gamma}$ il grafo in cui i due elementi i, $i+1$ sono soppressi. In questo grafo v è un nuovo minimo che sostituisce i due minimi soppressi. Ponendo $t_{hv} := t_{hi} + t_{h\ i+1}$ identifichiamo l'algebra $A_{\overline{\Gamma}}$ in modo naturale ad una sottoalgebra di A_Γ. Sussiste il seguente risultato, di immediata verifica.

Lemma 9.2.8.

(1) $T_w(\overline{\Gamma}) = T_w(\Gamma)$ *per* $w \in \overline{\Gamma}$; $T_v(\overline{\Gamma}) = T_v(\Gamma) - t_{i\,i+1}$.
(2) $t_{i\,i+1}$ *commuta con* $A_{\overline{\Gamma}}$.
(3) *Se* $w \geq v$, *allora* $A_w(\overline{\Gamma}) = A_w(\Gamma) - t_{i\,i+1}$; *altrimenti* $A_w(\overline{\Gamma}) = A_w(\Gamma)$.

Sia G la soluzione della K-Z relativa al grafo Γ, che è monodroma in C; scriviamola nella forma $G = K s_v^{t_{i\,i+1}}$.

Proposizione 9.2.9. *La funzione* K *si estende alla regione*

$$C \cup C^{(i\,i+1)} \cup \{z_1 > \dots > z_i = z_{i+1} > \dots > z_n\}.$$

La restrizione di K *a* $\{z_1 > \dots > z_i = z_{i+1} > \dots > z_n\}$, *ove la nuova coordinata* z_v *rimpiazza le due che coincidono, è la soluzione associata al grafo* $\overline{\Gamma}$.

Dim. Sostituiamo $G = K s_v^{t_{i\,i+1}}$ in $dG = \Omega G$ ottenendo

$$dK = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}[t_{i\,i+1} dlog\, s_v, K] + \sum_{w \neq v} \frac{T_w}{2\pi\sqrt{-1}} dlog\, s_w K.$$

La forma $\sum_{w \neq v} T_w dlog\, s_w$ è definita in $s_v = 0$; inoltre

$$[\frac{t_{i\,i+1}}{s_v}, K] = (\prod_{w > v} u_w)^{-1} [\frac{t_{i\,i+1}}{u_v}, K]$$

è analitica in un intorno di $s_v = 0$, dunque $[\frac{t_{i\,i+1}}{s_v}, K] ds_v|_{s_v=0} = 0$. Pertanto

$$dK|_{s_v=0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\sum_w T_w(\overline{\Gamma}) dlog\, s_w \right) K|_{s_v=0} = \Omega_{\overline{\Gamma}} K|_{s_v=0}. \quad \square$$

Consideriamo ora il secondo problema. Sia $G = f(u) \prod u_w^{A_w}$ la soluzione della K-Z associata a Γ e sia $\Omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_w \omega_w du_w = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i<j} t_{ij} dlog\, P_{ij}$ la forma olomorfa. Denotiamo con f_v la restrizione di f ad $\{u_x = 0,\ x \not< v\}$.

Proposizione 9.2.10. *La funzione* $H = f_v(u) z_v^{A_v} \prod_{w<v} u_w^{A_w}$ *è soluzione della equazione K-Z associata al grafo* $\Gamma(v)$.

Dim. Da $dG = \Omega G$ deduciamo l' equazione differenziale verificata da H:

$$\frac{\partial H}{\partial u_w} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{A_w}{u_w} + \omega_w(u)|_{u_x=0, x\not<v} \right) H, \qquad w < v$$

Poiché $A_w(\Gamma) = A_w(\Gamma(v))$ basta provare che la forma $\Omega_0(u)|_{u_x=0, x\not<v}$ coincide con la forma olomorfa $\Omega_{0,v} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i\in|v|_s, j\in|v|_d} t_{ij} dlog\, P_{ij}$associata a $\Gamma(v)$. Ora si ricordi che se $sup(i,j) = x$, vale la formula

$$P_{ij} = (1 + \sum_{w<x} \epsilon_w \prod_{w\le y\le x} u_y).$$

Se $x \not< v$, allora $x \ge v$ oppure x non è confrontabile con v. In ogni caso $\prod_{w\le y\le x} u_y$ contiene almeno una delle coordinate che annulliamo e quindi svanisce.
Pertanto $(\Omega_0)|_{u_x=0, x\not<v} = \Omega_{0,v}$. $\square$

§9.3 La rappresentazione di monodromia.

Richiamiamo prima di tutto un fatto generale. Supponiamo di avere una varietà differenziabile semplicemente connessa M e la forma Ω di una connessione piatta su M a coefficienti in un' algebra A. Sia D un gruppo che opera in modo differenziabile su M e come automorfismi di A; denotiamo con $\overline{D}$ il gruppo di automorfismi indotto da D su A. Supponiamo inoltre Ω covariante rispetto a D, ovvero

$$g(\Omega(g^{-1}P)) = \Omega(P) \quad \forall\, P \in M.$$

Possiamo allora definire una rappresentazione di monodromia di D come segue. Formiamo il prodotto semidiretto $A^\times \ltimes \overline{D}$ definito dall'azione di D sul gruppo $A^\times$ degli elementi invertibili di A. In altri termini, $A^\times \ltimes \overline{D} = A^\times \times \overline{D}$ come insieme, con legge di commutazione $\overline{g}x = \overline{g}(x)\overline{g}$ per $x \in A^\times$, $\overline{g} \in \overline{D}$.

Sia $\mathcal{G}$ l'insieme delle soluzioni invertibili dell'equazione $dG = \Omega G$. Abbiamo visto che su tale insieme opera il gruppo $A^\times$ per moltiplicazione a destra in modo semplicemente transitivo.

Dalla covarianza di Ω segue che, se G è una soluzione, anche

$$(gG)(P) := \overline{g}(G(g^{-1}P))$$

è una soluzione per ogni $g \in D$; infatti:

$$\begin{aligned} d(gG)(P) &= \overline{g}(dG(g^{-1}P)) = \overline{g}\left(\Omega(g^{-1}(P))G(g^{-1}(P))\right) \\ &= \overline{g}(\Omega(g^{-1}(P))\overline{g}(G(g^{-1}(P)) = \Omega(P)(gG)(P). \end{aligned}$$

Pertanto fissata una soluzione G_0 resta determinata una applicazione $\rho_0 : D \to A^\times$, detta *fattore di monodromia*, tale che $gG_0(P) = G_0(P)\rho_0(g)$.

Teorema 9.3.1. *L'applicazione* $\pi_0 : D \to A^\times \ltimes \overline{D}$ *data da* $\pi_0(g) = (\rho_0(g)\overline{g})$ *è un omomorfismo di gruppi detto rappresentazione di monodromia associata a* G_0. *Se partiamo da una diversa soluzione* $G_1 = G_0 u$, $u \in A^\times$ *abbiamo* $\rho_1(g) = u^{-1}\rho_0(g)\overline{g}(u)$ *ovvero* $\pi_0(g) = u\pi_1(g)u^{-1}$.

Dim. Se $g_1, g_2 \in D$ si ha:

$$\begin{aligned} G_0(P)\rho_0(g_1g_2) &= (g_1g_2\,G_0)(P) = \overline{g}_1((g_2G_0)(g_1^{-1}P)) = \overline{g}_1(G_0(g_1^{-1}P)\rho_0(g_2)) \\ &= \overline{g}_1(G_0(g_1^{-1}P))\overline{g}_1(\rho_0(g_2)) = (g_1G_0)(P)\overline{g}_1(\rho_0(g_2)) \\ &= G_0(P)\rho_0(g_1)\overline{g}_1(\rho_0(g_2)) \end{aligned}$$

ovvero $\rho_0(g_1g_2) = \rho_0(g_1)\overline{g}_1(\rho_0(g_2))$; dunque

$$\begin{aligned} \pi_0(g_1g_2) &= \rho_0(g_1g_2)\overline{g_1g_2} = \rho_0(g_1)\overline{g}_1(\rho_0(g_2))\overline{g}_1\overline{g}_2 \\ &= \rho_0(g_1)\overline{g}_1\rho_0(g_2)\overline{g}_2 = \pi_0(g_1)\pi_0(g_2). \end{aligned}$$

Riguardo la seconda asserzione, da

$$G_0(P)\rho_0(g)\overline{g}(u) = g(G_0(g^{-1}P)u) = g(G_1(g^{-1}P)) = G_1(P)\rho_1(g) = G_0(P)u\rho_1(g)$$

deduciamo $\rho_0(g)\overline{g}(u) = u\rho_1(g)$ che a sua volta implica $\pi_0(g) = u\pi_1(g)u^{-1}$. □

Poniamo $X_n = \mathbb{C}^n \setminus \Delta_n$, $\Delta_n = \bigcup_{1\le i<j\le n}\{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j\}$, e sia $\pi : \tilde{X}_n \to X_n$ il rivestimento universale (che è anche il rivestimento universale di X_n/S_n, dato che S_n agisce liberamente su X_n). Per applicare la discussione precedente all'equazione K-Z consideriamo $\tilde{X}_n$ e sia $\tilde{\Omega}$ il *pullback* della forma Ω. Consideriamo $\mathcal{P}^+ := \oplus_{i>0}\mathcal{P}_i$ (la gradazione è quella indotta assegnando grado 1 ai generatori t_{ij}); poichè modulo $\mathcal{P}^+$ la connessione è nulla ne segue che le soluzioni non nulle sono costanti modulo $\mathcal{P}^+$, dunque invertibili se non identicamente nulle. Sia $\mathcal{G}$ l'insieme di tali soluzioni; evidentemente $\mathcal{G}$ è un'insieme su cui opera in modo semplicemente transitivo il gruppo moltiplicativo $\hat{\mathcal{P}}_n^\times$ di $\hat{\mathcal{P}}_n$ per moltiplicazione a destra. Se $\mathcal{D}$ è il gruppo delle trasformazioni del rivestimento (che la scelta di un punto in $\tilde{X}_n$ identifica al gruppo delle trecce pure), abbiamo che se $G \in \mathcal{G}$, $\gamma \in \mathcal{D}$, la funzione $\gamma G := G(\gamma^{-1}P)$ è una soluzione e quindi $\gamma G = G\rho(\gamma)$ con $\rho : \mathcal{D} \to \hat{\mathcal{P}}_n^\times$ omomorfismo.

Piú in generale consideriamo il gruppo delle trecce B_n, che è il gruppo delle trasformazioni del rivestimento $\tilde{X}_n \to X_n \to X_n/S_n$. Operiamo con il gruppo delle trecce sui numeri $1,\dots,n$ usando le permutazioni indotte e sull'algebra di olonomia $\mathcal{P}_n$ tramite $T(t_{ij}) := t_{T(i)T(j)}$; l'azione su $\mathcal{P}_n$ si estende naturalmente a $\hat{\mathcal{P}}_n$, il completamento di $\mathcal{P}_n$ rispetto alla gradazione precedentemente introdotta. La forma $\tilde{\Omega}$ è covariante rispetto alle due azioni di B_n su $\mathcal{P}_n$ e su $\tilde{X}_n$. Ne segue che possiamo applicare il teorema precedente deducendo una rappresentazione di monodromia $B_n \to \hat{\mathcal{P}}_n^\times \ltimes S_n$. In particolare, se fissiamo un punto P_0 ed una soluzione G_0 con $G_0(P_0) = 1$ abbiamo $\rho(T) = \overline{T}(G(T^{-1}P_0))$, dove $\overline{T}$ è l'immagine di T nella proiezione canonica $B_n \to S_n$ e la rappresentazione di monodromia è:

$$T \to \rho(T)\overline{T}.$$

§9.4 Calcolo della rappresentazione di monodromia.

Passiamo adesso ad illustrare come, in linea di principio, si possa calcolare la rappresentazione di monodromia associata alla soluzione asintotica determinata da un monomio non associativo. Richiamiamo anzitutto la successione esatta di omotopia della fibrazione $X_n \to X_n/S_n$ (cfr. §3.2):

$$1 \to P_n \to B_n \to S_n \to 1.$$

Vogliamo descrivere una costruzione di Brieskorn [Br] che seleziona un sollevamento *canonico* $T_i \in B_n$ della permutazione $(i\, i+1) \in S_n$. Per far questo consideriamo la camera fondamentale

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > x_2 > \dots > x_n\}$$

Sia $p \in C$; decomponiamo p nella forma $p = a + b$ con $a \in \mathbb{R}(e_i - e_{i+1})$, $b \in (\mathbb{R}(e_i - e_{i+1}))^{\perp}$ ($\{e_1, \dots, e_n\}$ denota la base standard di $\mathbb{R}^n$); consideriamo la curva $\gamma_i : [0,1] \to X_n$, $\gamma_i(t) = e^{\pi i t} a + b$. Risultando $\gamma_i(0) = p$, $\gamma_i(1) = (i\, i+1)p$, γ_i è una curva chiusa in X_n/S_n e la sua classe di omotopia in $\pi_1(X_n/S_n, p)$ è un sollevamento di $(i\, i+1)$. Poiche' poi le camere sono contraibili, si hanno identificazioni canoniche dei gruppi $\pi_1(X_n/S_n, p)$, $p \in C$.

$\pi^{-1}(\mathcal{R}_n)$ è unione disgiunta delle sue componenti connesse, che sono permutate in modo semplicemente transitivo da gruppo delle trasformazioni del rivestimento $\mathcal{D}$. Scegliamo una componente connessa $\mathcal{C} \subset \tilde{X}_n$ di $\pi^{-1}(\mathcal{R}_n)$ tale che $\pi(\mathcal{C}) = C$. Allora $\pi^{-1}(\mathcal{R}_n) = \mathcal{D} \times \mathcal{C}$ con azione sul fattore di sinistra. Fissata $\mathcal{C}$, l'identificazione $\pi_1(X_n/S_n, p) \cong \mathcal{D}$ è indipendente dal punto base $p \in \mathcal{C}$.

Avendo immerso una "copia" della camera fondamentale in $\tilde{X}_n$, ogni soluzione della K-Z definita su $\mathcal{C}$ si estende univocamente ad una soluzione globale su $\tilde{X}_n$.

Teorema 9.4.1. *Se il grafo* Γ *contiene la coppia* $i, i+1$ *come coppia associata allora* $\rho_\Gamma(T_i) = e^{\frac{t_{i,i+1}}{2}}$.

Dim. Sia $G(u) = f(u) \prod_w u_w^{A_w}$ la soluzione associata a Γ, che è ben definita su C; vogliamo riscriverla in opportune coordinate attorno a 0; per questo poniamo, se $q = sup(i, i+1)$

$$y_v = \begin{cases} \dfrac{s_v + (i\, i+1)s_v}{2} & \text{se } v \neq q \\ s_q & \text{se } v = q \end{cases}$$

Intanto osserviamo che le y sono funzioni positive su C; poniamo poi, con le usuali convenzioni, $r_v = \dfrac{y_v}{\overline{y}_v}$. Si noti che

$$(\square) \qquad (i\, i+1)r_v = \begin{cases} r_v & \text{se } v \neq q \\ -r_q & \text{se } v = q \end{cases}$$

Per verificare che le r sono effettivamente coordinate in un intorno di 0, notiamo che esse sono legate alle coordinate u da una relazione del tipo $u_v = r_v H_v(r_w)$, ove H_v è una funzione razionale delle coordinate r_w, $w < v$ con $H(0) = 1$; in particolare

$\det\left(\frac{\partial u_t}{\partial r_w}(0)\right) \neq 0$, perchè la matrice jacobiana è triangolare con 1 sulla diagonale. Scelto $\varepsilon > 0$, consideriamo il polidisco $D_\varepsilon = \{|r_v| < \varepsilon\}$ e sia $D^0_\varepsilon = D_\varepsilon \cap X_n$ il corrispondente polidisco puntato. Per come sono state definite le nuove coordinate, D_ε è stabile rispetto alla trasposizione $(i\,i+1)$; inoltre se $P \in D_\varepsilon \cap C$, la curva $\gamma_{i,P}(t)$ è tutta contenuta in D_ε e

$$(\triangle) \qquad r_v(\gamma_{i,P}(t)) = \begin{cases} r_v(P) & \text{se } v \neq q \\ e^{\pi\sqrt{-1}t} r_q(P) & \text{se } v = q \end{cases}$$

In particolare, la componente connessa di $\pi^{-1}(D^0_\varepsilon)$ che interseca $\mathcal{C}$ è T_i–stabile. Riscriviamo ora la soluzione G nelle nuove coordinate:

$$G = f(u)\prod_w (r_w H_w)^{\frac{t_w}{2\pi\sqrt{-1}}} = \tilde{f}(r)\prod_w (r_w)^{\frac{t_w}{2\pi\sqrt{-1}}}.$$

La funzione $\tilde{f}(r) = f(u)\prod_w (H_w)^{\frac{t_w}{2\pi\sqrt{-1}}}$ si estende a una funzione olomorfa su D_ε; inoltre, dal momento che risulta $\Omega = \sum \frac{t_w}{2\pi\sqrt{-1}} dlog\, r_w + \Omega_0'$, con Ω_0' olomorfa, l'equivarianza di Ω rispetto al gruppo simmetrico e l'invarianza della parte polare $\sum \frac{t_w}{2\pi\sqrt{-1}} dlog\, r_w$ - chiara dalle formule $(\square)$ - comporta che la soluzione di

$$df = \left[\sum \frac{t_v}{2\pi\sqrt{-1}}, dlog\, r_v f\right] + \Omega_0' f$$

olomorfa in D_ε e tale che $f(0) = 1$ è $(i\,i+1)$-equivariante; se $\overline{f}$ è la sua estensione al rivestimento universale, consideriamone la restrizione alla componente connessa di $\pi^{-1}(D^0_\varepsilon)$ che interseca $\mathcal{C}$: per $P \in D_\varepsilon \cap \mathcal{C}$ otteniamo che

$$T_i(\overline{f}(T_i^{-1}(P)) = (i\,i+1)f((i\,i+1)\pi(P)) = f(\pi(P)) = \overline{f}(P).$$

La seconda uguaglianza deriva dal fatto che $((i\,i+1).f)$ è una soluzione definita in C che vale 1 in 0: per unicità deve coincidere con f. Dunque il contributo al calcolo del fattore di monodromia proviene soltanto da $\prod_w (r_w)^{\frac{t_w}{2\pi\sqrt{-1}}}$; effettuiamo tale calcolo in D^0_ε; ricordando le formule $(\triangle)$ si ottiene T_i agisce su P trasformando $log(z_i - z_{i+1})$ in $log(z_i - z_{i+1}) + \pi\sqrt{-1}$; da ciò tutto segue. $\square$

Diciamo che i grafi Γ, Γ' differiscono per un'associazione elementare $(AB)C \to A(BC)$ se $M_\Gamma = (AB)C$, $M_{\Gamma'} = A(BC)$ per opportune sottoparole A, B, C.

Teorema 9.4.2. *Se Γ, Γ' differiscono per un'associazione elementare $(AB)C \to A(BC)$, si ha $G_{\Gamma'} = G_\Gamma \Phi(t_{A,B}, t_{B,C})$. (Abbiamo posto $t_{X,Y} = \sum_{i\in X, j\in Y} t_{ij}$).*

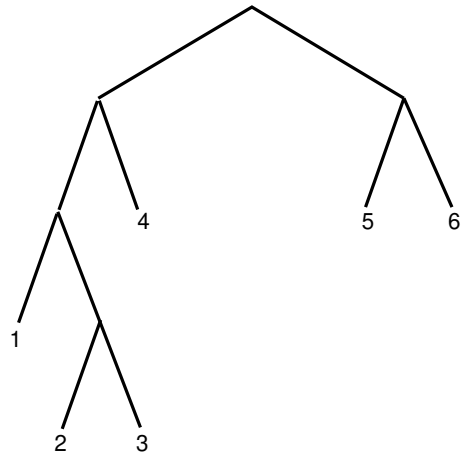
Dim. Sia w il vertice che è radice del sottoalbero cui è associato il monomio $(AB)C$ o $A(BC)$ nei due casi; notiamo che le funzioni u_x, $x \lneq w$ coincidono per i due grafi. Mettiamo a zero tutte le variabili u_x, $x \not< w$, poi usando la proposizione 9.2.10 rendiamo uguali tutte le coordinate in A, B, C rispettivamente, riducendoci così al caso di tre variabili per il quale quanto si vuole è stato già dimostrato in §9.2. $\square$

Il precedente risultato completa l'analisi del calcolo della rappresentazione di monodromia in virtù della seguente proposizione.

Proposizione 9.4.3. *Date due scelte di parentesi, si può passare dall'una all'altra tramite una successione finita di associazioni elementari.*

Dim. Data una parola non associativa, diciamo che essa è in forma standard se ha lunghezza 1 o è del tipo $(A)x$ con A standard e x di lunghezza 1, e.g. $(((ab)c)d)e$; per provare la proposizione mostriamo per induzione su n che ogni parola di lunghezza n può essere messa in forma standard tramite associazioni elementari. Se $n = 1$ non c'è niente da dimostrare; sia ora A una parola di lunghezza $n > 1$; se A non è standard, allora è del tipo $A = (B)(C)$, per opportune sottoparole B, C di lunghezza positiva e minore di n; per induzione, a meno di associazioni elementari possiamo assumere $B = (B')x$, $C = (C')y$; allora $A = ((B')x)((C')y)$ può essere trasformata in $(((B')x)(C'))y$; per induzione $((B')x)(C')$ può essere messa in forma standard, e quindi lo stesso è vero per $(((B')x)(C'))y$. □

Esempio. Il monomio $M = ((1(23))4)(56)$ è codificato dall'albero binario Γ



Vogliamo calcolare il fattore di monodromia $\rho_\Gamma(T_i)$, $i = 1, \ldots, 5$. Dal teorema 9.4.1 possiamo immediatamente dedurre che

$$\rho_\Gamma(T_2) = e^{\frac{t_{23}}{2}} \quad \rho_\Gamma(T_5) = e^{\frac{t_{56}}{2}}.$$

Per calcolare il valore del fattore di monodromia sui rimanenti generatori del gruppo delle trecce B_6 operiamo nel monomio M opportune associazioni elementari in modo da far apparire associata la coppia $(i\, i+1)$, $(i = 1, 3, 4)$; poi effettuiamo il calcolo usando i seguenti fatti:

(1) se nelle associazioni elementari di cui sopra è coinvolto di fatto un sottomonomio di M possiamo restringerci a tale sottomonomio;
(2) nel passaggio $\Gamma' \to \Gamma''$, ove Γ', Γ'' differiscono per un'associazione elementare, la rappresentazione di monodromia cambia per coniugazione tramite la serie di Drinfeld calcolata in opportuni residui (cfr. 9.3.1, 9.4.2).

Per calcolare $\rho_\Gamma(T_1)$ dobbiamo far apparire associata la coppia 1,2; è sufficiente un'associazione elementare $A(BC) \to (AB)C$:

$$((1(23))4)(56) \to ((12)3))4)(56)$$

con $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$. Per la prima osservazione possiamo limitarci a considerare i sottomonomi $M_1 = 1(23)$, $M_2 = (12)3$. Dunque:

$$\pi_M(T_1) = \pi_{M_2}(T_1) = \Phi(t_{A,B}, t_{B,C}) e^{\frac{t_{12}}{2}}(12)\Phi(t_{A,B}, t_{B,C})^{-1}.$$

Il fattore di monodromia è allora

$$\rho_\Gamma(T_1) = \Phi(t_{12}, t_{23}) e^{\frac{t_{12}}{2}} \Phi(t_{13}, t_{12}).$$

Passiamo a calcolare $\rho_\Gamma(T_3)$; possiamo restringerci al monomio $M_3 = (1(23))4$; la successione di associazioni elementari è

$$M_3 = (1(23))4 \to M_4 = 1((23)4) \to M_5 = 1(2(34)).$$

(La prima associazione elementare è del tipo $(DE)F \to D(EF)$ con $D = 1$, $E = (23)$, $F = 4$; la seconda è dello stesso tipo $(GH)L \to G(HL)$ con $G = 2$, $H = 3$, $L = 4$). Ne deduciamo:

$$\pi_{M_3}(T_3) = \Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34})^{-1} \pi_{M_4}(T_3) \Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34}) =$$
$$\Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34})^{-1} \Phi(t_{23}, t_{34})^{-1} e^{\frac{t_{34}}{2}}(34) \Phi(t_{23}, t_{34}) \Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34}).$$

$$\rho_\Gamma(T_3) = \Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34})^{-1} \Phi(t_{23}, t_{34})^{-1} e^{\frac{t_{34}}{2}} \Phi(t_{24}, t_{34}) \Phi(t_{12} + t_{14}, t_{23} + t_{34}).$$

Per calcolare $\rho_\Gamma(T_4)$ si deve considerare tutto il monomio M; le associazioni elementari necessarie sono le seguenti:

$$M = ((1(23))4)(56) \to M_6 = (1(23))(4(56)) \to M_7 = (1(23))((45)6).$$

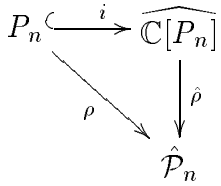
Corrispondentemente si ha:

$$\pi_M(T_4) =$$
$$\Phi(t_{14} + t_{24} + t_{34}, t_{45} + t_{46})^{-1} \pi_{M_7}(T_5) \Phi(t_{14} + t_{24} + t_{34}, t_{45} + t_{46}) =$$
$$\Phi(t_{14}+t_{24}+t_{34}, t_{45}+t_{46})^{-1} \Phi(t_{45}, t_{56}) e^{\frac{t_{45}}{2}}(45) \Phi(t_{45}, t_{56})^{-1} \Phi(t_{14}+t_{24}+t_{34}, t_{45}+t_{46})$$

$$\rho_\Gamma(T_4) = \Phi(t_{14}+t_{24}+t_{34}, t_{45}+t_{46})^{-1} \Phi(t_{45}, t_{56}) e^{\frac{t_{45}}{2}} \Phi(t_{45}, t_{46})^{-1} \Phi(t_{15}+t_{25}+t_{35}, t_{45}+t_{56})$$

Osservazione. Khono e Hain ([Kh], [Ha]) hanno dato la seguente notevole interpretazione del fattore di monodromia ρ nel caso del gruppo delle trecce pure P_n, che lega l'algebra $\mathcal{P}_n$ al cosiddetto completamento pro-nilpotente di P_n. Sia $\varepsilon : \mathbb{C}[P_n] \to \mathbb{C}$ la counità , $\mathcal{I} := Ker\, \varepsilon$ e $\widehat{\mathbb{C}[P_n]}$ il completamento di $\mathbb{C}[P_n]$ rispetto alle potenze di $\mathcal{I}$. Sia poi $i : P_n \to \widehat{\mathbb{C}[P_n]}$ l'omomorfismo naturale.

Teorema 9.4.4. *La rappresentazione di monodromia ρ si estende ad un isomorfismo $\hat{\rho} : \widehat{\mathbb{C}[P_n]} \to \widehat{\mathcal{P}_n}$ di algebre di Hopf tale che il seguente diagramma è commutativo:*



§9.5 L'invariante universale di Kontsevich: costruzione combinatoria.

In questa sezione applichiamo i risultati precedentemente ottenuti sulle soluzioni dell'equazione K-Z e sulle associate rappresentazioni di monodromia del gruppo delle trecce B_n esplicitando una costruzione combinatoria, nello spirito di [Car2], [Piu], dell'integrale di Kontsevich. È opportuno preliminarmente richiamare alcuni punti cruciali dell'approccio analitico a tale invariante.

Proposizione 9.5.1.

(1) *Sia $\tilde{X}_n$ il rivestimento universale del complementare delle diagonali in $\mathbb{C}^n$. Comunque siano scelti $b \in B_n$, $P \in \tilde{X}_n$ e una soluzione G dell'equazione K-Z, risulta:*

$$G(b^{-1}P)G(P)^{-1} = \exp^{:\int \Omega(t)dt:}$$

ove $\exp^{:\int \Omega(t)dt:}$ è l'integrale iterato di Chen della forma Ω calcolato lungo un qualsiasi cammino in $\tilde{X}_n$ da P a $b^{-1}(P)$. La classe di tale valore nell'algebra $\mathcal{A}^c$ coincide con l'integrale di Kontsevich $Z^{\alpha}_{\beta}(K)$ di un nodo $K \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, $p \mapsto (t(p), z(p))$, ristretto all'intervallo di tempo $[\alpha, \beta] \equiv [t^{-1}(P), t^{-1}(b^{-1}(P))]$ in cui non cadono punti critici, che induce un cammino chiuso in X_n/S_n isotopo a b.

(2) *Se ρ_G è il fattore di monodromia associato alla prescelta soluzione G e $\overline{b}$ è l'immagine di $b \in B_n$ nella proiezione su S_n, si ha:*

$$G(b^{-1}P) = b^{-1}(G(P)\rho_G(b)).$$

(3) *Se G_0 è la soluzione con $G_0(P) = 1$, allora*

$$G(b^{-1}P)G(P)^{-1} = b^{-1}(\rho_{G_0}(b)).$$

Dim. In §8.3 avevamo provato che l'equazione di trasporto parallelo $dG = \omega G$ per una connessione piatta di forma ω con condizione iniziale $G(P) = 1$ lungo una curva da P a Q ha soluzione (unica), dipendente solo dalla classe di omotopia del cammino da P a Q, espressa esplicitamente dall'integrale iterato di Chen; in particolare, per la forma K-Z su X_n, il valore di tale soluzione in Q coincide con l'integrale di Kontsevich opportunamente interpretato come nell'enunciato. Consideriamo ora l'equazione $dG = \Omega G$ in $\tilde{X}_n$: dunque G è una funzione su $\tilde{X}_n$ a valori nel completamento dell'algebra $\mathcal{A}^c$ e Ω è , con lieve abuso di notazione, il pull-back della forma K-Z in $\tilde{X}_n$. Se ora G è una qualsiasi soluzione, $G\,G(P)^{-1}$ è chiaramente una soluzione; inoltre essa vale 1 in P, dunque è espressa dall'integrale di Chen; infine, poichè stiamo lavorando sul rivestimento universale, non c'è dipendenza dalla classe di omotopia di cammini a estremi fissati: posto $Q = b^{-1}(P)$ si ha quanto si voleva.

Riguardo (2), le relazioni $(bG)(P) = \overline{b}(G(b^{-1}(P))$ e $(bG)(P) = G(P)\rho_G(g)$ implicano

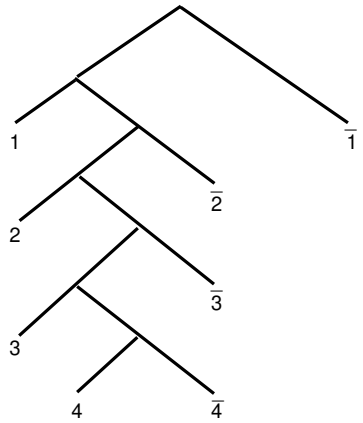
$$G(b^{-1}(P)) = (b^{-1}(bG))(b^{-1}P) = \overline{b}^{-1}((bG)(P)) = \overline{b}^{-1}(G(P)\rho_G(g)).$$

che è quanto si voleva. In particolare, usando le parti (1) e (2):

$$G(b^{-1}P)G(P)^{-1} = G_0(b^{-1}P)G_0(P)^{-1} = G_0(b^{-1}P)$$
$$= \overline{b}^{-1}(G_0(P)\rho_{G_0}(b)) = \overline{b}^{-1}(\rho_{G_0}(b)). \quad \square$$

Consideriamo ora il monomio non associativo M_n in $2n$ variabili (ordinate) - che indichiamo $x_1, \dots, x_n, y_n, \dots, y_1$ invece che $1, \dots, 2n$ - costruito induttivamente come segue. Poniamo $M_1 = (x_1 y_1)$; M_n si ottiene da M_{n-1} sostituendo a x_{n-1} l'espressione $(x_{n-1}(x_n y_n))$.

Ad esempio, il monomio M_4 è $(x_1((x_2((x_3((x_4 y_4))y_3))y_2)y_1$ e l'albero corrispondente è :



Sia $\mathcal{S}$ l'albero binario associato a M_n, $G \equiv G_{\mathcal{S}}$ la relativa soluzione della K-Z e $\rho \equiv \rho_{\mathcal{S}}$ il corrispondente fattore di monodromia. Calcoliamo anzitutto i "residui" relativi. Numeriamo convenzionalmente gli indici delle prime n variabili x_i con i e quelli delle variabili y_j con $\overline{j}$. Osserviamo che i $2n-1$ sottovertici di $\Gamma_{\mathcal{S}}$ sono di due tipi:

$$s_i = sup(i, \overline{i}),\ i = 1, \dots, n \qquad r_j = sup(j, \overline{j+1}),\ j = 1, \dots, n-1.$$

Inoltre $\overline{s}_i = r_{i-1}$, $\overline{r}_i = s_i$; pertanto le coordinate "u" sono date da

$$u_{r_i} := \frac{x_i - y_{i+1}}{x_i - y_i},\ i = 1, \dots, n-1 \quad u_{s_i} := \frac{x_i - y_i}{x_{i-1} - y_i},\ i = 2, \dots, n,\ u_{s_1} := x_1 - y_1.$$

Da tutte queste osservazioni non è difficile dedurre il seguente

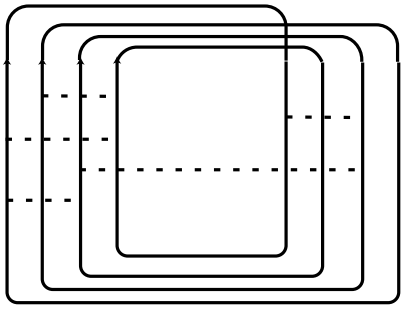
Lemma 9.5.2. *Per il monomio M_n risulta:*

(1) $T_{s_i} = \sum_{i \le h < k \le n}(t_{hk} + t_{h\overline{k}} + t_{k\overline{h}} + t_{\overline{kh}}) + \sum_{i \le h \le n} t_{h\overline{h}}$.

(2) $T_{r_i} = T_{s_{i+1}} + \sum_{i < k \le n}(t_{ik} + t_{i\overline{k}}) = \sum_{i+1 \le h < k \le n}(t_{hk} + t_{h\overline{k}} + t_{k\overline{h}} + t_{\overline{kh}}) + \sum_{i+1 \le h \le n} t_{h\overline{h}} + \sum_{i < k \le n}(t_{ik} + t_{i\overline{k}})$.

Sia R_{2n} l'algebra generata dagli elementi t_{hk} per $h,k = 1,\dots,2n$; sia poi σ un ciclo su n elementi $\{1,\dots,n\}$; riguarderemo σ, senza cambiare notazione, anche come permutazione su $\{1,2,\dots,i,\dots,n,\overline{n},\dots,\overline{i},\dots,\overline{2},\overline{1}\}$ che agisce come n-ciclo sui primi n elementi e come l'identità su $\overline{n},\dots,\overline{i},\dots,\overline{2},\overline{1}$.

Definiamo ora un'applicazione $\mathcal{T}_\sigma : R_{2n} \longrightarrow \mathcal{A}^c$, ove $\mathcal{A}^c$ è , al solito, l'algebra generata dai diagrammi di corde sul cerchio modulo le relazioni a quattro termini e la relazione di corda isolata. Per definire $\mathcal{T}_\sigma$ disegnamo $2n$ linee verticali indicizzate da $1,2,\dots,i,\dots,n,\overline{n},\dots,\overline{i},\dots,\overline{2},\overline{1}$; pensiamo orientate le prime n linee verso l'alto, le ultime n verso il basso. Riguardiamo ogni t_{hk} come una corda tra la h-esima e la k-esima linea se tali linee sono equiorientate, come meno la stessa corda in caso contrario. Un monomio nei t_{hk} può allora interpretarsi come una successione di corde con segno. Per definire $\mathcal{T}_\sigma$ basta dare il suo valore su un insieme di generatori lineari, dunque, ad esempio, sui monomi nei t_{hk}; dato un tale monomio m, poniamo $\mathcal{T}_\sigma(m) = [D_m]$, ove $[D_m]$ è la classe in $\mathcal{A}^c$, del diagramma di corde D_m che si ottiene dalla configurazione m di corde su $2n$ linee chiudendola in modo da ottenere un cerchio orientato; precisamente, si uniscono con archi non intersecantisi il punto finale della $\overline{i}$-esima linea al punto iniziale della i-esima e il punto finale della della $\sigma(i)$-esima al punto iniziale della $\overline{i}$-esima. Ad esempio per $n = 4$ e $\sigma = (1234)$ si ha:



Lemma 9.5.3. *Per ogni $u \in R_{2n}$ sussistono le seguenti relazioni:*

(1)

$$\mathcal{T}_\sigma(ut_{h\overline{k}}) = -\mathcal{T}_\sigma(ut_{hk}).$$

$$\mathcal{T}_\sigma(ut_{\overline{hk}}) = \mathcal{T}_\sigma(ut_{hk}).$$

$$\mathcal{T}_\sigma(t_{h\overline{k}}u) = -\mathcal{T}_\sigma(t_{h\sigma^{-1}(k)}u).$$

$$\mathcal{T}_\sigma(t_{\overline{hk}}u) = \mathcal{T}_\sigma(t_{\sigma^{-1}(h)\sigma^{-1}(k)}u).$$

(2)

$$\mathcal{T}_\sigma(uT_{s_i}) = \mathcal{T}_\sigma(\sigma^{-1}(T_{s_i})u) = \mathcal{T}_\sigma(uT_{r_i}) = \mathcal{T}_\sigma(\sigma^{-1}(T_{r_i})u) = 0.$$

Dim. Le quattro relazioni in (1) seguono dalla costruzione geometrica, tenendo conto dell'equivalenza sussistente sui diagrammi di corde. Ad esempio, nella precedente figura e raffigurata la "chiusura" del monomio $t_{24}t_{\overline{24}}t_{14}t_{\overline{23}}t_{13}$; posto $u := t_{24}t_{\overline{24}}t_{14}t_{\overline{23}}$, $u' := t_{\overline{24}}t_{14}t_{\overline{23}}t_{13}$, risulta chiaro che

$$\mathcal{T}_\sigma(ut_{13}) = \mathcal{T}_\sigma(ut_{\overline{13}}), \qquad \mathcal{T}_\sigma(t_{24}u') = \mathcal{T}_\sigma(t_{\overline{13}}u').$$

Per quanto rigurda (2), dalla prima parte del lemma 9.5.2 deduciamo $T_{s_i} = \sum_{i\le h<k\le n}(t_{hk}+t_{h\overline{k}}+t_{k\overline{h}}+t_{\overline{kh}})+\sum_{i\le h\le n}t_{h\overline{h}}$; avendosi $\mathcal{T}_\sigma(ut_{h\overline{k}}) = -\mathcal{T}_\sigma(ut_{hk})$ e $\mathcal{T}_\sigma(ut_{h\overline{h}}) = 0$ per la relazione di corda isolata, otteniamo quanto dovevasi dimostrare. La seconda asserzione segue allo stesso modo; poichè σ è l'identità su $\overline{n},\dots,\overline{1}$, si ha:

$$\mathcal{T}_\sigma(\sigma^{-1}(T_{s_i})u) =$$
$$\mathcal{T}_\sigma((\sum_{i\le h<k\le n}(t_{\sigma^{-1}(h)\sigma^{-1}(k)}+t_{\sigma^{-1}(h)\overline{k}}+t_{\sigma^{-1}(k)\overline{h}}+t_{\overline{kh}})+\sum_{i\le h\le n}t_{\sigma^{-1}(h)\overline{h}})u).$$

Per la parte (1), $\mathcal{T}_\sigma(t_{i\overline{\sigma(j)}}u) = -\mathcal{T}_\sigma(t_{ij}u)$, dunque

$$\mathcal{T}_\sigma(t_{\sigma^{-1}(h)\sigma^{-1}(k)}+t_{\sigma^{-1}(h)\overline{k}}+t_{\sigma^{-1}(k)\overline{h}}+t_{\overline{kh}}) =$$
$$\mathcal{T}_\sigma(t_{\sigma^{-1}(h)\sigma^{-1}(k)}-t_{\sigma^{-1}(h)\sigma^{-1}(k)}-t_{\sigma^{-1}(k)\sigma^{-1}(h)}+t_{\sigma^{-1}(k)\sigma^{-1}(h)}) = 0.$$

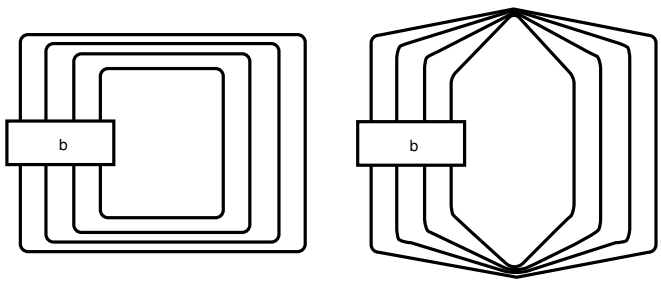
mentre $\mathcal{T}_\sigma(t_{\sigma^{-1}(h)\overline{h}}u) = 0$ contenendo una corda isolata. Le uguaglianze per T_{r_i} si provano con argomenti analoghi usando la seconda parte del lemma precedente. □

Sia $b \in B_n$ un elemento che induce in S_n un n-ciclo σ; il link che si ottiene da b per chiusura è allora un nodo. Denotiamo con $\tilde{b}$ la treccia su $2n$ fili uguale a b per i primi n fili e uguale all'identità sugli altri; $\tilde{b}$ induce una permutazione di S_n che è l'n-ciclo σ su $\{1,\dots,n\}$ e l'identità sugli altri elementi; continueremo a chiamare σ questo elemento di S_{2n}, con un abuso di notazione che avevamo già evidenziato in precedenza. Sia M_n il monomio non associativo in $2n$ variabili introdotto all'inizio e $\rho \equiv \rho_{\mathcal{S}}$ il fattore di monodromia di B_{2n} associato alla soluzione $G_{\mathcal{S}}$ dell'equazione K-Z.

Teorema 9.5.4. *Se K è il nodo ottenuto chiudendo la treccia b, allora*

$$\mathcal{T}_\sigma(\sigma^{-1}\rho(\tilde{b})) = Z(K).$$

Proof. Consideriamo il nodo K ottenuto per chiusura della treccia b (figura a sinistra): vogliamo calcolare l'integrale di Kontsevich $Z(K)$. Tramite movimenti orizzontali e verticali, che non cambiano questo integrale, possiamo deformare il nodo nella curva $\overline{K}$ disegnata nella figura a destra:



$\overline{K}$ può riguardarsi come supporto di un cammino $\phi : (0,1) \to \tilde{X}_{2n}$ che ha punti estremi aventi tutte le coordinate uguali. Il differente ordine di svanimento delle differenze delle coordinate si esprime richiedendo che questo cammino si estenda a

0 tendendo al punto con coordinate u tutte nulle e che, data la simmetria dell'operazione di chiusura della treccia, per ϵ piccolo si abbia $\phi(1-\epsilon) = \tilde{b}^{-1}\phi(\epsilon)$.

Per la proposizione 9.5.1, data comunque una soluzione G dell'equazione K-Z, risulta:

$$Z(K) = \lim_{\epsilon \to 0}[G(\phi(1-\epsilon))G(\phi(\epsilon))^{-1}]$$

ove le parentesi quadre denotano la classe nell'algebra $\mathcal{A}^c$.

Scegliamo ora la soluzione $G \equiv G_{\mathcal{S}}$ associata a M_n. Abbiamo:

$$G(\phi(1-\epsilon))G(\phi(\epsilon))^{-1} = G(\tilde{b}^{-1}\phi(\epsilon))G(\phi(\epsilon))^{-1} = \sigma^{-1}(G(\phi(\epsilon))\rho(\tilde{b}))G(\phi(\epsilon))^{-1}.$$

Nelle coordinate u si ha $G(u) = F(u)\prod_i u_i^{A_i}$ con $F(0) = 1$; espandiamo poi i seguenti termini:

$$F = 1 + F_0 \qquad F^{-1} = 1 + F_1$$

$$\prod_i u_i^{A_i} = \prod_i e^{log(u_i)A_i} = 1 + log(u_i)A_i + \dots$$

$$(\prod_i u_i^{A_i})^{-1} = \prod_i e^{-log(u_i)A_i} = 1 - log(u_i)A_i + \dots$$

Denotiamo $u_i(\epsilon), F_0(\epsilon), F_1(\epsilon)$ il valore di queste funzioni nel punto $\phi(\epsilon)$; abbiamo:

$$G(\phi(1-\epsilon))G(\phi(\epsilon))^{-1} = \sigma^{-1}((1+F_0(\epsilon))\prod_i (u_i(\epsilon))^{A_i}\rho(\tilde{b}))\prod_i (u_i(\epsilon))^{-A_i}(1+F_1(\epsilon)).$$

Usando ora la definizione di $\mathcal{T}_\sigma$ otteniamo

$$\begin{aligned}[(G(\phi(1-\epsilon))G(\phi(\epsilon))^{-1})] &= \mathcal{T}_\sigma(G(\phi(1-\epsilon))G(\phi(\epsilon))^{-1}) \\ &= \mathcal{T}_\sigma(\sigma^{-1}(\prod_i (u_i(\epsilon))^{A_i}\rho(\tilde{b}))\prod_i (u_i(\epsilon))^{-A_i}) \\ &+ \mathcal{T}_\sigma(\sigma^{-1}(F_0(\epsilon))\prod_i (u_i(\epsilon))^{A_i}\rho(\tilde{b}))\prod_i (u_i(\epsilon))^{-A_i})(1+F_1) \\ &+ \sigma^{-1}(\prod_i (u_i(\epsilon))^{A_i}\rho(\tilde{b}))\prod_i (u_i(\epsilon))^{-A_i})F_1).\end{aligned}$$

Tenendo conto che ogni A_i è somma di termini del tipo T_{s_j}, T_{r_j}, utilizzando le espansioni precedentemente fornite per le funzioni $\prod_i u_i^{A_i}$ e la parte (2) del lemma precedente, otteniamo:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{T}_\sigma(\sigma^{-1}(\prod_i (u_i(\epsilon))^{A_i}\rho(\tilde{b}))\prod_i (u_i(\epsilon))^{-A_i}) = \mathcal{T}_\sigma(\sigma^{-1}(\rho(\tilde{b})).$$

mentre

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to 0} \sigma^{-1}(F_0(\epsilon))\prod_i (u_i(\epsilon))^{A_i}\rho(\tilde{b}))\prod_i (u_i(\epsilon))^{-A_i})(1+F_1) + \\ \sigma^{-1}(\prod_i (u_i(\epsilon))^{A_i}\rho(\tilde{b}))\prod_i (u_i(\epsilon))^{-A_i})F_1 = 0.\end{aligned}$$

dal momento che ogni coefficiente risulta essere una somma di termini di tipo $p(u)\prod_i (log(u_i)^{h_i})$ ove p è un polinomio che si annulla in 0. □

§10 Costruzione categoriale dell'integrale di Kontsevich

§10.1 Categorie monoidali, intrecciamenti, intrecciamenti infinitesimali.

In questo paragrafo procederemo come segue.

(1) Introduciamo le nozioni di categoria monoidale e di categoria tensoriale. Mostriamo poi come si possa associare canonicamente ad una categoria monoidale $\mathcal{C}$ una categoria tensoriale $\tilde{\mathcal{C}}$.
(2) Introduciamo le nozioni di intrecciamento e intrecciamento infinitesimale.
(3) Discutiamo la nozione di dualità e analizziamo il legame con le nozioni introdotte in precedenza.

Per ulteriori esempi relativi alle nozioni che saranno introdotte rimandiamo al capitolo successivo.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria; denoteremo con $Ob(\mathcal{C})$ la classe degli oggetti e con $Hom(\mathcal{C})$ quella dei morfismi. Se, X, Y sono oggetti di $\mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ denoterà l'insieme dei morfismi $X \to Y$ in $\mathcal{C}$; scriveremo spesso, per semplicità , $f : X \to Y$ invece di $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Date due categorie $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, ricordiamo ([Kas], Prop. XI.1.5) un utile criterio di equivalenza. Un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ si dice *essenzialmente suriettivo* se per ogni $B \in \mathcal{O}b(\mathcal{C}')$ esiste $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ tale che $F(A) \cong B$. Inoltre F si dice *fortemente fedele* se per ogni $(A, A') \in \mathcal{O}b(\mathcal{C}) \times \mathcal{O}b(\mathcal{C})$, $F : Hom_{\mathcal{C}}(A, A') \to Hom_{\mathcal{C}'}(F(A), F(A'))$ è biunivoca.

Proposizione 10.1.1. *Un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ è un'equivalenza di categorie se e solo se è essenzialmente suriettivo e fortemente fedele.*

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia dato un funtore $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ che indicheremo con $(X,Y) \to X \otimes Y$; analogamente per due morfismi indicheremo con $f \otimes g$ il morfismo indotto dal funtore. Se iteriamo il funtore con piú variabili possiamo costruire vari nuovi funtori: ad esempio in tre variabili, senza invertire l'ordine, abbiamo $(X \otimes Y) \otimes Z$, $X \otimes (Y \otimes Z)$. Siamo interessati a poter comparare questi due funtori: supponiamo dunque che esista una trasformazione naturale invertibile

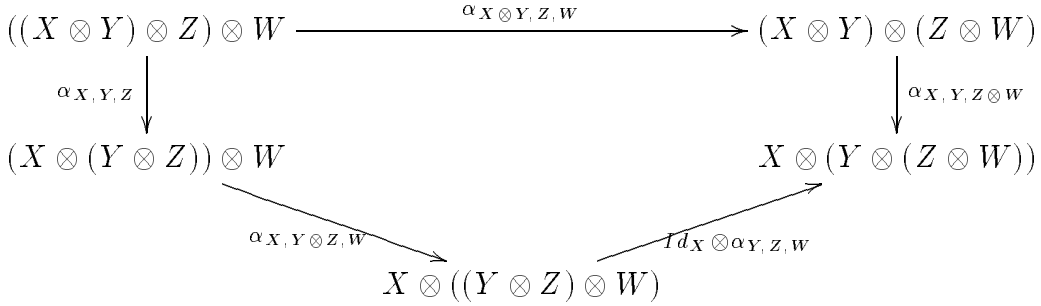
$$\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z).$$

Usando questa trasformazione naturale abbiamo la possibilità di confrontare non solo i due funtori in tre variabili appena introdotti ma anche quelli coinvolgenti un numero superiore di variabili. Ad esempio in quattro variabili abbiamo cinque possibili modi di associare:

$$((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W,\ (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W,\ (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W),$$
$$X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)),\ X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W).$$

Applicando la trasformazione naturale abbiamo vari modi di confrontare queste associazioni: ad esempio da $((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W$ possiamo passare a $(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W$

con $\alpha_{X,Y,Z} \otimes Id_W$ oppure a $(X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W)$ con $\alpha_{X\otimes Y,Z,W}$. Abbiamo quindi due possibili isomorfismi fra $((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W$, $X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))$, seguendo i due percorsi del seguente *pentagono*:

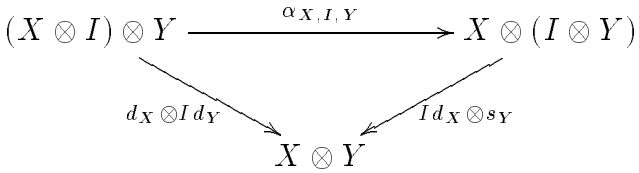


Pertanto possiamo porre la seguente definizione:

Definizione 10.1.2. *Una categoria $\mathcal{C}$ si dice monoidale, se è dotata di:*

(1) *Un funtore $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, $(X,Y) \mapsto X \otimes Y$ è un isomorfismo naturale (detto vincolo associativo) $\alpha : \otimes(\otimes \times id) \to \otimes(id \times \otimes)$, $\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$ per cui tutti i pentagoni siano commutativi.*

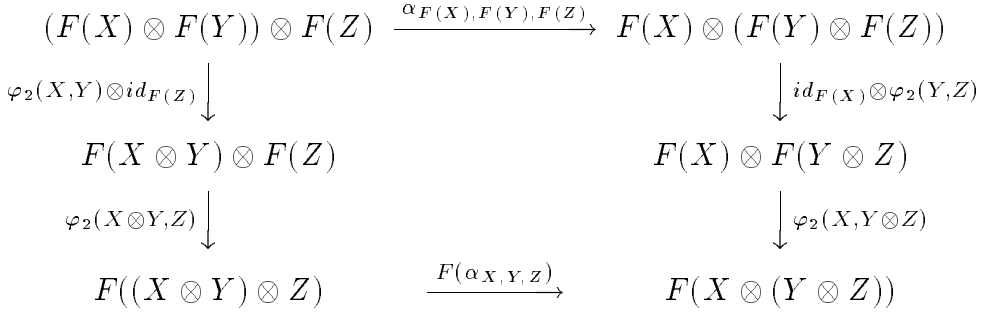
(2) *Un oggetto indicato con I (unità) e isomorfismi naturali (detti vincoli unità sinistro e destro) $s : \otimes(I \times id) \to id, d : \otimes(id \times I) \to id$, tali che il seguente diagramma è commutativo per ogni coppia (X,Y) di oggetti:*



Una categoria tensoriale (o monoidale stretta) è una categoria monoidale in cui il vincolo associativo α e i vincoli unità destro e sinistro d, s sono tutti l'identità .

Definizioni 10.1.3.

(1) *Un funtore monoidale tra due categorie monoidali $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ è il dato di un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, di un isomorfismo $\varphi_0 : I \to F(I)$ e di una famiglia di isomorfismi naturali indicizzati da coppie (X,Y) di oggetti di $\mathcal{C}$, $\varphi_2(X,Y) : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$ per cui i seguenti diagrammi sono commutativi:*



$$\begin{array}{ccc} I \otimes F(X) & \xrightarrow{s_{F(X)}} & F(X) \\ {\scriptstyle \varphi_0 \otimes id_{F(X)}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle F(s_X)} \\ F(I) \otimes F(X) & \xrightarrow{\varphi_2(I,X)} & F(I \otimes X) \\ F(X) \otimes I & \xrightarrow{d_{F(X)}} & F(X) \\ {\scriptstyle id_{F(X)} \otimes \varphi_0}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle F(d_X)} \\ F(X) \otimes F(I) & \xrightarrow{\varphi_2(X,I)} & F(X \otimes I) \end{array}$$

(2) *Una trasformazione naturale monoidale* $\eta : (F, \varphi_0, \varphi_2) \to (G, \psi_0, \psi_2)$ *tra due funtori monoidali* $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *è una trasformazione naturale* $\eta : F \to G$ *per cui i due seguenti diagrammi sono commutativi:*

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{\varphi_2(X,Y)} & F(X \otimes Y) \\ {\scriptstyle \eta(X) \otimes \eta(Y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta(X \otimes Y)} \\ G(X) \otimes G(Y) & \xrightarrow{\psi_2(X,Y)} & G(X \otimes Y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(I) & \xrightarrow{\eta(I)} & G(I) \\ & {\scriptstyle \varphi_0} \nwarrow \quad \nearrow {\scriptstyle \psi_0} & \\ & I & \end{array}$$

Osserviamo che dagli assiomi di categoria monoidale segue subito che

$$\alpha_{X,Y,Z} = id$$

se uno dei tre oggetti X, Y, Z è uguale ad I. A priori però possiamo pensare che, nel caso di prodotti in piú di quattro variabili, vi possano essere isomorfismi differenti costruiti a partire da una sequenza di associatori e loro inversi; questo fortunatamente non avviene, per il teorema di coerenza di Mac Lane.

Teorema 10.1.4. *In una categoria monoidale qualsiasi diagramma costruito tramite i vincoli* α, s, d, *l'identità e le operazioni di composizione e tensorizzazione commuta.*

Proveremo l'asserto in modo costruttivo. Precisamente, costruiremo, a partire da una categoria monoidale $\mathcal{C}$, una nuova categoria tensoriale $\tilde{\mathcal{C}}$ e un'equivalenza di categorie $F : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ che rispetta il prodotto tensoriale (F è dunque una trasformazione naturale monoidale invertibile).
Procediamo nel modo seguente. Gli oggetti di $\tilde{\mathcal{C}}$ sono le sequenze $\underline{X} := X_1 X_2 \dots X_n$ di oggetti di $\mathcal{C}$ modulo la relazione di equivalenza $\approx$ che "dimentica" le unità eventualmente presenti:

$$X_1 X_2 \dots X_n \approx X_1 X_2 \dots X_{i-1} X_{i+1} \dots X_n, \text{ se } X_i = I.$$

Data una sequenza $\underline{X}$ introduciamo l'oggetto $F(\underline{X})$ di $\mathcal{C}$ definito per ovvia ricorrenza:

$$F(\emptyset) = I, \qquad F(X_1) = X_1,$$

$$F(X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n) := F(X_1 X_2 \dots X_{n-1}) \otimes X_n.$$

In altri termini $F(X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n) = (\dots((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3)\dots) \otimes X_n$. Poniamo ora:

$$Hom_{\tilde{\mathcal{C}}}(\underline{X}, \underline{Y}) := Hom_{\mathcal{C}}(F(\underline{X}), F(\underline{Y})).$$

Le identità e le composizioni sono indotte dagli analoghi in $\mathcal{C}$.

Proposizione 10.1.5. *$\tilde{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{C}$ sono equivalenti.*

Dim. F si estende a un funtore $F : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ che è l'identità sui morfismi (quindi, in particolare, fortemente fedele); basta allora provare, in virtù del criterio di equivalenza precedentemente enunciato, che F è essenzialmente suriettivo, la qual cosa è evidente poichè ogni oggetto $X \in \mathcal{C}$ è immagine tramite F della sequenza di lunghezza uno individuata da X stesso. □

Definiamo in $\tilde{\mathcal{C}}$ un prodotto tensoriale associativo $\cdot$ sugli oggetti per giustapposizione delle sequenze: se $\underline{X} = (X_1 \dots X_n)$, $\underline{Y} = (Y_1 \dots Y_m)$, poniamo

$$\underline{X} \cdot \underline{Y} =: (X_1 \dots X_n Y_1 \dots Y_m).$$

Per quanto riguarda il prodotto tensoriale dei morfismi, consideriamo $f : \underline{X} \to \underline{Y}$, $g : \underline{H} \to \underline{K}$; definiamo $f \cdot g$ nel modo seguente. Con un'opportuna composizione di associazioni passiamo da $F(\underline{X} \cdot \underline{H})$ a $F(\underline{X}) \otimes F(\underline{H})$, poi applichiamo $f \otimes g$ in $\mathcal{C}$ che va in $F(\underline{Y}) \otimes F(\underline{K})$ e di nuovo tramite una composizione di associazioni arriviamo a $F(\underline{Y} \cdot \underline{K})$. Più precisamente costruiamo un isomorfismo naturale

$$\varphi(\underline{X}, \underline{Y}) : F(\underline{X}) \otimes F(\underline{Y}) \to F(\underline{X} \cdot \underline{Y})$$

per ogni coppia di oggetti $(\underline{X}, \underline{Y})$ in $\tilde{\mathcal{C}}$; l'isomorfismo è definito per induzione sulla lunghezza della sequenza $\underline{Y}$. Poniamo

$$\varphi(\emptyset, \underline{X}) = s_{\underline{X}} \quad \varphi(\underline{X}, \emptyset) = d_{\underline{X}}$$

$$\varphi(\underline{X}, (Z)) = id_{F(\underline{X}) \otimes Z} : F(\underline{X}) \otimes Z \to F((\underline{X}) \cdot (Z))$$

$$\varphi(\underline{X}, \underline{Y} \cdot (Z)) = (\varphi(\underline{X}, \underline{Y}) \otimes id_Z) \circ \alpha^{-1}_{F(\underline{X}), F(\underline{Y}), Z}$$

Allora $f \cdot g$ viene definito richiedendo la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
\underline{X} \cdot \underline{Y} & & \xrightarrow{\qquad\qquad f \cdot g \qquad\qquad} & & & & \underline{Y} \cdot \underline{K} \\
\Big\downarrow F & & & & & & \Big\downarrow F \\
F(\underline{X} \cdot \underline{H}) & \xrightarrow{\varphi(\underline{X}, \underline{H})^{-1}} & F(\underline{X}) \otimes F(\underline{H}) & \xrightarrow{f \otimes g} & F(\underline{Y}) \otimes F(\underline{K}) & \xrightarrow{\varphi(\underline{Y}, \underline{K})} & F(\underline{Y} \cdot \underline{K})
\end{array}$$

Teorema 10.1.6. *L'equivalenza di categorie $F : \mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}$ rispetta il prodotto tensoriale.*

Dim. Proveremo che (F, id_I, φ) è un'equivalenza monoidale. La dimostrazione di tale asserto si riduce facilmente alla verifica dell'identità seguente: per ogni $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$ in $\tilde{\mathcal{C}}$

$$\varphi(\underline{X}, \underline{Y} \cdot \underline{Z}) \circ (id_{\underline{X}} \otimes \varphi(\underline{Y}, \underline{Z})) \circ \alpha_{F(\underline{X}), F(\underline{Y}), F(\underline{Z})} = \varphi(\underline{X} \cdot \underline{Y}, \underline{Z}) \circ (\varphi(\underline{X}, \underline{Y}) \otimes id_{\underline{Z}}).$$

Si procede per induzione sulla lunghezza della sequenza $\underline{Z}$; per il primo passo dell'induzione si assume $\underline{Z} = \emptyset$ e si conclude usando la naturalità di d. Nel caso generale bisogna usare la naturalità dell'associatore e l'assioma pentagonale. Per maggiori dettagli si veda [Kas], Lemma XI.5.2. □

Introduciamo ora la nozione di intrecciamento in una categoria monoidale. Sia $\mathcal{C}$ una categoria dotata di prodotto tensoriale $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ e sia $\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ il funtore "scambio", definito da $\tau(X, Y) = (Y, X)$, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$.

Definizione 10.1.7. *Una categoria monoidale si dice intrecciata se è dato un isomorfismo naturale (detto intrecciamento) $R : \otimes \to \otimes\tau$, $R_{X,Y} : X \otimes Y \mapsto Y \otimes X$ tale che:*

(1) $R_{I,X} = R_{X,I} = Id_X$.
(2)

$$R_{X\otimes Y,Z} = \alpha_{Z,X,Y}\ R_{X,Z} \otimes Id_Y\ \alpha^{-1}_{X,Z,Y}\ Id_X \otimes R_{Y,Z}\ \alpha_{X,Y,Z},$$
$$R_{X,Y\otimes Z} = \alpha^{-1}_{Y,Z,X}\ Id_Y \otimes R_{X,Z}\ \alpha_{Y,X,Z}\, R_{X,Y} \otimes Id_Z\ \alpha^{-1}_{X,Y,Z}.$$

In altri termini, i due seguenti esagoni devono essere commutativi $\forall\ X, Y, Z$:

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{R_{X\otimes Y,Z}} & Z \otimes (X \otimes Y) \\ {\scriptstyle \alpha_{X,Y,Z}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha_{Z,X,Y}} \\ X \otimes (Y \otimes Z) & & (Z \otimes X) \otimes Y \\ {\scriptstyle Id_X \otimes R_{Y,Z}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle R_{X,Z} \otimes Id_Y} \\ X \otimes (Z \otimes Y) & \xrightarrow{\alpha^{-1}_{X,Z,Y}} & (X \otimes Z) \otimes Y \end{array}$$

$$(**) \qquad \begin{array}{ccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{R_{X,Y\otimes Z}} & (Y \otimes Z) \otimes X \\ {\scriptstyle \alpha^{-1}_{X,Y,Z}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha^{-1}_{Y,Z,X}} \\ (X \otimes Y) \otimes Z & & Y \otimes (Z \otimes X) \\ {\scriptstyle R_{X,Y} \otimes Id_Z}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle Id_Y \otimes R_{X,Z}} \\ (Y \otimes X) \otimes Z & \xrightarrow{\alpha_{Y,X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) \end{array}$$

Una categoria tensoriale si dice simmetrica se $R_{Y,X}R_{X,Y} = Id_{X\otimes Y}$ *per ogni coppia di oggetti* X, Y.

Nel caso di una categoria simmetrica useremo spesso il simbolo $\sigma_{X,Y}$ al posto di $R_{X,Y}$. Osserviamo che tramite le $\sigma_{X,Y}$ possiamo operare come con il gruppo simmetrico su prodotti $X_1X_2X_3\ldots X_n$.

Osservazione. Dalla funtorialità dell'intrecciamento e dalla commutatività degli esagoni (*), (**) non è difficile dedurre l'*equazione di Yang-Baxter*:

$$\alpha_{Z,Y,X}\, R_{Y,Z}\otimes Id_X\, \alpha^{-1}_{Y,Z,X}\, Id_Y\otimes R_{X,Z}\, \alpha_{Y,X,Z}\, R_{X,Y}\otimes Id_Z =$$
$$Id_Z\otimes R_{X,Y}\, \alpha_{Z,X,Y}\, R_{X,Z}\otimes Id_Y\, \alpha^{-1}_{X,Z,Y}\, Id_X\otimes R_{Y,Z}\, \alpha_{X,Y,Z}.$$

Nel caso di una categoria tensoriale tale equazione diviene semplicemente:

$$(R_{Y,Z}\otimes Id_X)(Id_Y\otimes R_{X,Z})(R_{X,Y}\otimes Id_Z) = (Id_Z\otimes R_{X,Y})(R_{X,Z}\otimes Id_Y)(Id_X\otimes R_{Y,Z}).$$

Esempio. Definiamo la categoria libera tensoriale simmetrica $\mathcal{C}_{sym}(1)$, generata da un solo oggetto a.

Gli oggetti di $\mathcal{C}_{sym}(1)$ sono gli elementi formali a^n, $n\in\mathbb{Z}_+$, poniamo come morfismi $Hom(a^n,a^m) = \emptyset$ se $n\neq m$; altrimenti $Hom(a^n,a^n) = S_n$, il gruppo simmetrico su n elementi. Il prodotto tensoriale di oggetti è $a^n\otimes a^m = a^{n+m}$ mentre per i morfismi due permutazioni su n, m elementi danno luogo evidentemente ad una permutazione su $m+n$ elementi.

Per quanto riguarda la simmetria di $a^n\otimes a^m$ si prende lo scambio fra i primi n e gli ultimi m elementi.

Esercizio. Definire in modo analogo la categoria libera tensoriale intrecciata $\mathcal{C}_{br}(1)$, generata da un solo oggetto a.

Il fatto che queste categorie siano *libere* è conseguenza della seguente proposizione; poniamo per semplicità $X^n \equiv X^{\otimes n}$.

Proposizione 10.1.8. *Sia* $\mathcal{C}$ *una categoria tensoriale intrecciata e* X *un oggetto di* $\mathcal{C}$*; allora esiste per ogni* $n\in\mathbb{N}$ *un omomorfismo* ρ *del gruppo delle trecce* B_n *in* $Iso(X^n)$*. Se inoltre l'intrecciamento è simmetrico* ρ *induce un omomorfismo* $\tilde{\rho}: S_n\to Iso(X^n)$.

Dim. Consideriamo il gruppo libero F_{n-1} su $n-1$ generatori $g_1,\ldots,g_{n-1}$. Definiamo un omomorfismo di gruppi $\rho': F_{n-1}\to Iso(X^n)$ tramite la relazione

$$\rho'(g_i) = Id_{X^{i-1}}\otimes R_{X,X}\otimes Id_{X^{n-i-1}}$$

L'equazione di Yang-Baxter implica la validità delle relazioni di treccia

$$\rho'(g_i)\rho'(g_{i+1})\rho'(g_i) = \rho'(g_{i+1})\rho'(g_i)\rho'(g_{i+1}).$$

Dunque, ricordando la presentazione di Artin per il gruppo delle trecce, ρ' si fattorizza ad un omomorfismo $\rho: B_n\to Iso(X^n)$, come si voleva.

La seconda asserzione segue subito dal fatto che, essendo l'intrecciamento involutivo nel caso simmetrico, si ha $\rho(g_i^2) = 1$, dunque ρ si fattorizza ad una rappresentazione $\tilde{\rho}$ del gruppo simmetrico. □

Per $b\in B_n$, denoteremo con b_X l'immagine di b tramite ρ in $Iso(X^n)$.

Discutiamo ora la nozione di dualità .

Definizioni 10.1.9.

(1) *In una categoria tensoriale $\mathcal{C}$ è definita una dualità sinistra se per ogni oggetto V esistono un oggetto V^* e morfismi $\varepsilon_V : I \to V \otimes V^*$, $\eta_V : V^* \otimes V \to I$ tali che:*

$$(id_V \otimes \eta_V)(\varepsilon_V \otimes id_V) = id_V$$
$$(\eta_V \otimes id_{V^*})(id_{V^*} \otimes \varepsilon_V) = id_{V^*}.$$

(2) *Sia $\mathcal{C}$ una categoria tensoriale intrecciata con dualità sinistra. Un operatore di torsione (twist) in $\mathcal{C}$ è il dato di una famiglia di isomorfismi naturali $\theta_V : V \to V$ indicizzati dagli oggetti V di $\mathcal{C}$ tali che:*

$$\theta_{V\otimes W} = (\theta_V \otimes \theta_W) R_{W,V} R_{V,W}$$
$$\theta_{V^*} = (\theta_V)^*$$

ove il trasposto di un morfismo $f : U \to V$ è il morfismo $f^* : V^* \to U^*$ definito da

$$f^* = (\eta_V \otimes id_{U^*}) \circ (id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*}) \circ (id_{V^*} \otimes \varepsilon_U).$$

Osservazioni.

(1) Se $\mathcal{C}$ è una categoria *simmetrica* con dualità sinistra, l'identità è un operatore di torsione.

(2) Sia $\mathcal{C}$ una categoria tensoriale intrecciata con dualità sinistra e operatore di torsione θ. In [Kas] XIV.3.5 si prova che è possibile definire una dualità destra $\varepsilon'_V : I \to V^* \otimes V$, $\eta'_V : V \otimes V^* \to I$ ponendo

$$\varepsilon'_V = (id_{V^*} \otimes \theta_V) R_{V,V^*} \varepsilon_V$$
$$\eta'_V = \eta_V R_{V,V^*} (\theta_V \otimes id_{V^*})$$

(3) Introducendo opportunamente gli associatori, la nozione di dualità può darsi anche in una categoria monoidale.

Abbiamo gia visto come una categoria monoidale $\mathcal{C}$ determini una categoria tensoriale $\tilde{\mathcal{C}}$; osserviamo che se $\mathcal{C}$ è intrecciata, tale è anche $\tilde{\mathcal{C}}$. Su $\tilde{\mathcal{C}}$ possiamo infatti definire il nuovo intrecciamento come

$$R_{\underline{X},\underline{Y}} = \Psi' R_{(\underline{X}),(\underline{Y})} \Psi$$

dove Ψ associa da $F(\underline{X} \cdot \underline{Y})$ a $F(\underline{X}) \otimes F(\underline{Y})$ mentre Ψ' associa da $F(\underline{Y}) \otimes F(\underline{X})$ a $F(\underline{Y} \cdot \underline{X})$:

$$F(\underline{X} \cdot \underline{Y}) \xrightarrow{\Psi} F(\underline{X}) \otimes F(\underline{Y}) \xrightarrow{R_{F(\underline{X}),F(\underline{Y})}} F(\underline{Y}) \otimes F(\underline{X}) \xrightarrow{\Psi'} F(\underline{Y} \cdot \underline{X}).$$

La verifica degli assiomi è un semplice esercizio.

Una categoria monoidale si dice *lineare* su un campo $\mathbb{K}$ se gli insiemi $Hom(X, Y)$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, e la composizione ed il prodotto tensoriale sono bilineari.

Sia data una categoria $\mathcal{C}^0$ tensoriale, simmetrica, lineare su $\mathbb{K}$.

Definizione 10.1.10. *Un intrecciamento infinitesimale in* $\mathcal{C}^0$ *è una trasformazione naturale* $t : \otimes \to \otimes$, $t_{X,Y} : X \otimes Y \to X \otimes Y$ *tale che:*

(1) $t_{X,I} = t_{I,Y} = 0$ *per ogni* $X, Y \in Ob(\mathcal{C}^0)$.

(2) *Per ogni* $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C}^0)$*:*

$$t_{X\otimes Y,Z} = Id_X \otimes t_{Y,Z} + (Id_X \otimes \sigma_{Z,Y})(t_{X,Z} \otimes Id_Y)(Id_X \otimes \sigma_{Y,Z}).$$

La terminologia usata deriva dalla seguente osservazione: se in una categoria intrecciata con intrecciamento R i morfismi possono formalmente svilupparsi in serie di potenze rispetto ad un parametro h e poniamo

$$R_{X,Y} = \sigma_{X,Y}\left(Id_{X\otimes Y} + ht_{X,Y} + h^2 \dots\right),$$

allora gli assiomi di intrecciamento per R corrispondono alle condizioni richieste su t. Vogliamo immediatamente connettere queste condizioni le regole di commutazione dell'algebra di olonomia. Posto che gli analoghi degli elementi t_{12}, t_{13}, t_{23} sono $t_{X,Y} \otimes Id_Z$, $(Id_X \otimes \sigma_{Z,Y})(t_{X,Z} \otimes Id_Y)(Id_X \otimes \sigma_{Y,Z}), Id_X \otimes t_{Y,Z}$, la relazione $[t_{12}, t_{13} + t_{23}] = 0$ diviene la seguente.

Lemma 10.1.11. *Dati tre oggetti* X, Y, Z *si ha*

$$[t_{X,Y} \otimes Id_Z, Id_X \otimes t_{Y,Z} + (Id_X \otimes \sigma_{Z,Y})(t_{X,Z} \otimes Id_Y)(Id_X \otimes \sigma_{Y,Z})] = 0$$

Dim. L'identità richiesta equivale, per l'assioma (2), alla relazione

$$[t_{X,Y} \otimes Id_Z, t_{X\otimes Y,Z}] = 0,$$

che segue dalla naturalità di t:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{t_{X\otimes Y,Z}} & X \otimes Y \otimes Z \\ {\scriptstyle t_{X,Y}\otimes Id_Z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_{X,Y}\otimes Id_Z} \\ X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{t_{X\otimes Y,Z}} & X \otimes Y \otimes Z \end{array} \quad \square$$

Osservazione. Se una categoria simmetrica con intrecciamento infinitesimale $\mathcal{C}$ è dotata di una dualità sinistra, l'intrecciamento infinitesimale $t_{V,W}$ si può ottenere in termini dei soli t_{V,V^*}, t_{W,W^*} "polarizzando" l'elemento di Casimir[26] C_V, definito come

$$C_V = -(id_V \otimes (\eta_V \circ t_{V^*,V})) \circ (\varepsilon_V \otimes id_V).$$

Proposizione 10.1.12. *Per ogni* $V, W \in \mathcal{O}b\mathcal{C}$*, risulta:*

$$t_{V,W} = \frac{1}{2}(C_{V\otimes W} - C_V \otimes id_W - id_V \otimes C_W).$$

Dim. Verifica diretta. $\square$

[26] La terminologia è ripresa dalla teoria delle algebre di Lie [Hum]: se L è un'algebra di Lie semisemplice complessa di dimensione finita e $\{x_i\}_{i\in I}$ è una base ortonormale di L rispetto alla forma di Killing, poniamo $t := \Sigma_{i\in I}\, x_i \otimes x_i$; l'azione di t definisce un intrecciamento infinitesimale nella categoria degli L-moduli; se V è un L-modulo, l'endomorfismo C_V è dato dall'elemento di Casimir quadratico $\Sigma_{i\in I}\, x_i^2$.

§10.2 Quantizzazione di una categoria simmetrica con intrecciamento infinitesimale.

Espliciteremo ora una costruzione, dovuta a Cartier [Car2], che permette di ottenere una categoria monoidale intrecciata $\mathcal{C}_h^0$ partendo da una categoria tensoriale lineare con intrecciamento infinitesimale $\mathcal{C}^0$. Definiamo $\mathcal{C}_h^0$, che chiameremo *quantizzazione* di $\mathcal{C}^0$, ponendo:

$$Ob(\mathcal{C}_h^0) := Ob(\mathcal{C}^0)$$

$$Hom_{\mathcal{C}_h^0}(A,B) := Hom_{\mathcal{C}^0}(A,B)[[h]].$$

Dunque i morfismi in $\mathcal{C}_h^0$ sono le serie formali a coefficienti $Hom_{\mathcal{C}^0}(A,B)$ nel parametro h: la composizione di due morfismi si ottiene facendo il prodotto alla Cauchy delle corrispondenti serie formali. Il prodotto tensoriale in $\mathcal{C}_h^0$ coincide con quello di $\mathcal{C}^0$ sugli oggetti, mentre sui morfismi si deduce da quello di $\mathcal{C}^0$ estendendo per distributività la relazione

$$h^i f \circ h^j g = h^{i+j} f \circ g.$$

Dobbiamo ora definire associatori ed intrecciamento. Poniamo:

$$R_{X,Y} := \sigma_{X,Y} e^{\frac{h t_{X,Y}}{2}}$$

$$\alpha_{X,Y,Z} = \Phi(ht_{X,Y}, ht_{Y,Z})$$

dove $\Phi \equiv \Phi_{KZ}$ è la serie di Drinfeld già introdotta nella teoria K-Z (cfr. 9.1.3).

Teorema 10.2.1. *$\mathcal{C}_h^0$ è una categoria monoidale intrecciata.*

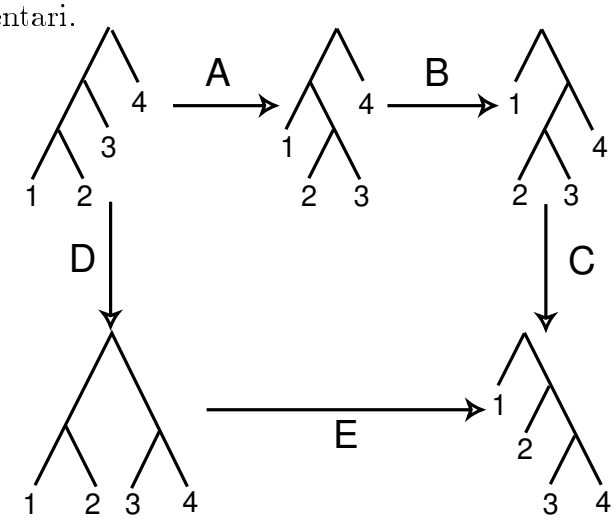
Dim. Bisogna verificare, per l'associatore Φ ed l'intrecciamento R sopra introdotti, gli assiomi del pentagono e degli esagoni; questi a loro volta si traducono nelle cosiddette "identità di Drinfeld":

$$\Phi(t_{12}, t_{23}+t_{24})\Phi(t_{13}+t_{23}, t_{34}) = \Phi(t_{23}, t_{34})\Phi(t_{12}+t_{13}, t_{24}+t_{34})\Phi(t_{12}, t_{23}).$$

$$\exp((t_{13}+t_{23})/2) = \Phi(t_{13}, t_{12}) \exp(t_{13}/2) \Phi(t_{12}, t_{23})^{-1} \exp(t_{23}/2) \Phi(t_{12}, t_{23}),$$
$$\exp((t_{12}+t_{13})/2) = \Phi(t_{23}, t_{13})^{-1} \exp(t_{13}/2) \Phi(t_{12}, t_{13}) \exp(t_{12}/2) \Phi(t_{12}, t_{23})^{-1}.$$

Proveremo queste identità usando i risultati relativi alle soluzioni speciali della equazione K-Z e alle associate rappresentazioni di monodromia del gruppo delle trecce ottenuti in §9.2-9.4.

La prima relazione segue dall'analisi del seguente diagramma, in cui gli alberi binari relativi alle possibili scelte di parentesi su quattro oggetti sono collegati da associazioni elementari.



Il teorema 9.4.2 asserisce che la soluzioni della K-Z associate a questi alberi binari differiscono per la serie di Drinfeld calcolata nelle variabili t_{IJ} che si ottengono "contraendo" i vertici fino a ridursi al caso di tre variabili; precisamente, denotiamo con $F_1, \dots, F_5$ le soluzioni associate agli alberi del diagramma precedente enumerate in senso orario a partire dall'angolo in alto a sinistra; si ha

$$F_1 = F_2 A \quad F_2 = F_3 B \quad F_3 = F_4 C$$

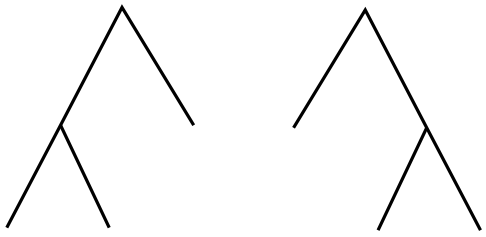
$$F_1 = F_5 D \qquad F_5 = F_4 E.$$

ove si è posto

$$\begin{aligned} A &= \Phi(t_{12}, t_{23}) \\ B &= \Phi(t_{1\overline{2}}, t_{\overline{2}4}) = \Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34}) \\ C &= \Phi(t_{23}, t_{34}) \\ D &= \Phi(t_{\overline{1}3}, t_{34}) = \Phi(t_{13} + t_{23}, t_{34}) \\ E &= \Phi(t_{12}, t_{2\overline{3}}) = \Phi(t_{12}, t_{23} + t_{24}). \end{aligned}$$

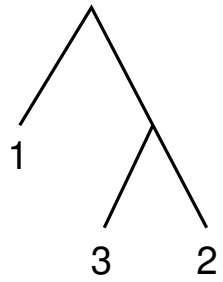
Poichè il diagramma è commutativo, dall'unicità della soluzione con assegnato andamento asintotico segue $C \cdot B \cdot A = E \cdot D$, che è quanto si voleva.

Proviamo ora le relazioni "esagonali"; consideriamo a tale scopo l'equazione K-Z per $n = 3$. Abbiamo già osservato che si hanno due possibili andamenti asintotici

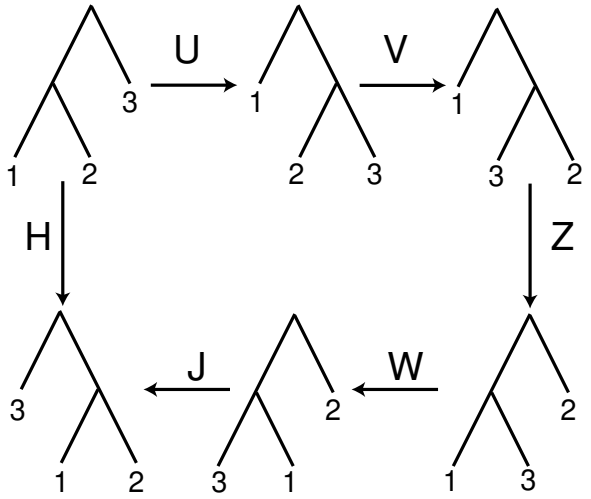


relativi alle due associazioni su tre lettere (12)3, 1(23). A ciascuno di questi alberi abbiamo associato esplicitamente una soluzione definita nella camera fondamentale

$z_1 > z_2 > z_3$ ed estesa al rivestimento universale del complementare delle diagonali in $\mathbb{C}^n$ come spiegato in §9.3. Possiamo considerare soluzioni definite in altre camere numerando i vertici degli alberi secondo una permutazione di $1, 2, 3$ e procedendo come prima; ad esempio all'albero



corrisponde la soluzione $(z_1 - z_2)^{t_{13}+t_{12}}(z_3 - z_2)^{t_{23}}$ definita nella camera $z_1 > z_3 > z_2$. Su tali soluzioni agisce, per l'equivarianza dell'equazione K-Z, il gruppo simmetrico, cosicchè possiamo confrontare le diverse soluzioni riportandole alla camera fondamentale (tenendo conto delle determinazioni dei logaritmi). Ciò premesso, per provare la prima delle relazioni (per l'altra si ragiona analogamente) applichiamo ancora i teorema 9.4.1-2 al seguente diagramma:



Se, con le convenzioni precedenti, denotiamo con $G_1, \ldots, G_6$ le soluzioni relative, si ha

$$G_1 = G_2 U \quad G_2 = G_3 V \quad G_3 = G_4 Z \quad G_4 = G_5 W \quad G_5 = G_6 J$$

$$G_1 = G_6 H$$

con

$$U = \Phi(t_{12}, t_{23}) \quad Z = \Phi^{-1}(t_{13}, t_{23}) \quad J = \Phi(t_{13}, t_{12})$$

$$V = \exp \frac{t_{23}}{2} \quad W = \exp \frac{t_{13}}{2} \quad H = \exp \frac{t_{13}}{2} \exp\left(\frac{t_{13} + t_{23}}{2}\right).$$

Deduciamo per unicità , come in precedenza, la relazione voluta. □

Teorema 10.2.2. *Sia $\mathcal{C}$ una categoria simmetrica con intrecciamento infinitesimale dotata di dualità sinistra ε, η; sia poi $\mathcal{C}_h$ la sua quantizzazione. Allora la categoria $\tilde{\mathcal{C}_h}$ tensorizzata di $\mathcal{C}_h$ è una categoria tensoriale intrecciata con dualità e operatore di torsione. La dualità è data da:*

$$\overline{\varepsilon}_V = \varepsilon_V \qquad \overline{\eta}_V = \eta_V \circ (\tilde{\lambda}_{V^*}^{-1} \otimes id_V) = \eta_V \circ (id_{V^*} \otimes \lambda_V^{-1})$$

ove $\tilde{\lambda}_{V^*}$, λ_V sono gli automorfismi di V^*, V definiti rispettivamente da:

$$\tilde{\lambda}_{V^*} = (\eta_V \otimes id_{V^*}) \circ \Phi^{-1}(t_{V^*,V}, t_{V,V^*}) \circ (id_{V^*} \otimes \varepsilon_V)$$
$$\lambda_V = (id_V \otimes \eta_V) \circ \Phi(t_{V,V^*}, t_{V^*,V}) \circ (\varepsilon_V \otimes id_V).$$

L'operatore di torsione è dato da

$$\theta_V = \exp\left(\frac{hC_V}{2}\right).$$

Dim. Premettiamo le seguenti osservazioni:

(1) $\tilde{\lambda}_{V^*}$, λ_V sono effettivamente automorfismi, essendo serie formali che iniziano con 1: ciò segue dal fatto che quest'ultimo asserto vale per l'associatore e dagli assiomi di dualità in $\mathcal{C}$ per η, ε.

(2) Le due espressioni fornite per $\overline{\eta}$ sono equivalenti: poichè , per il punto (1), $\tilde{\lambda}$, λ sono invertibili, basta verificare che $\eta_V \circ (Id_{V^*} \otimes \lambda_V) = \eta_V \circ (\tilde{\lambda}_{V^*} \otimes Id_V)$, ovvero che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
I & \xrightarrow{=} & I & \xrightarrow{=} & I \\
\uparrow{\scriptstyle \eta_V \circ ((\eta_V \otimes Id_{V^*}) \otimes Id_V)} & & \uparrow{\scriptstyle \zeta} & & \uparrow{\scriptstyle \eta_V \circ (Id_{V^*} \otimes (Id_V \otimes \eta_V))} \\
((V^* \otimes V) \otimes V^*) \otimes V & \xrightarrow{\Phi_1} & (V^* \otimes V) \otimes (V^* \otimes V) & \xrightarrow{\Phi_2} & V^* \otimes (V \otimes (V^* \otimes V)) \\
\uparrow{\scriptstyle \Phi^{-1}(t_{V^*,V}, t_{V,V^*}) \otimes Id_V} & & & & \uparrow{\scriptstyle Id_{V^*} \otimes \Phi(t_{V,V^*}, t_{V^*,V})} \\
(V^* \otimes (V \otimes V^*)) \otimes V & & \xrightarrow{\Phi(t_{V^*,V \otimes V^*}, t_{V \otimes V^*,V})} & & V^* \otimes ((V \otimes V^*) \otimes V) \\
\uparrow{\scriptstyle (Id_{V^*} \otimes \varepsilon_V) \otimes Id_V} & & & & \uparrow{\scriptstyle Id_{V^*} \otimes (\varepsilon_V \otimes Id_V)} \\
V^* \otimes V & & \xrightarrow{=} & & V^* \otimes V
\end{array}$$

ove $\Phi_1 = \Phi(t_{V^* \otimes V,V^*}, t_{V^*,V})$, $\Phi_2 = \Phi(t_{V^*,V}, t_{V,V^* \otimes V})$,

$$\zeta = \eta_V \circ (\eta_V \otimes Id_{V^* \otimes V}) = \eta_V \circ (Id_{V^* \otimes V} \otimes \eta_V).$$

La commutatività del diagramma segue dall'assioma del pentagono e dalla naturalità dell'associatore.

Dobbiamo ora provare che se $V \in Ob(\tilde{\mathcal{C}}_h)$, allora le composizioni

$$V \xrightarrow{\overline{\varepsilon}_V Id_V} VV^*V \xrightarrow{Id_V \overline{\eta}_V} V$$

$$V^* \xrightarrow{Id_{V^*} \overline{\varepsilon}_V} V^*VV^* \xrightarrow{\overline{\eta}_V Id_{V^*}} V^*$$

sono l'identità ; possiamo ridurci a provare l'asserto nel caso in cui V, come oggetto di $\tilde{\mathcal{C}}_h$, sia una sequenza di lunghezza 1, cioè un oggetto di $\mathcal{C}$. Allora quanto si deve provare equivale al fatto che la composizione dei morfismi che si trovano sui cammini a tratteggio semplice dei diagrammi seguenti è l'identità .

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, Rightarrow, "\lambda_V^{-1}"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_V \otimes Id_V"] & V \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon_V \otimes Id_V"'] \\
(V \otimes V^*) \otimes V \arrow[r, "(Id_V \otimes Id_{V^*}) \otimes \lambda_V^{-1}"] \arrow[d, dashed, "\Phi(t_{V,V^*}, t_{V^*,V})"] & (V \otimes V^*) \otimes V \arrow[d, Rightarrow, "\Phi(t_{V,V^*}, t_{V^*,V})"'] \\
V \otimes (V^* \otimes V) \arrow[r, dashed, "Id_V \otimes (Id_{V^*} \otimes \lambda_V^{-1})"] & V \otimes (V^* \otimes V) \arrow[d, dashed, "Id_V \otimes \eta_V"'] \arrow[d, Rightarrow, "Id_V \otimes \eta_V"] \\
 & V
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
V^* \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{\lambda}_{V^*}^{-1}"] \arrow[d, dashed, "Id_{V^*} \otimes \varepsilon_V"] & V \arrow[d, Rightarrow, "Id_{V^*} \otimes \varepsilon_V"'] \\
V^* \otimes (V \otimes V^*) \arrow[r, "\tilde{\lambda}_{V^*}^{-1} \otimes (Id_V \otimes Id_{V^*})"] \arrow[d, dashed, "\Phi^{-1}(t_{V^*,V}, t_{V,V^*})"] & V^* \otimes (V \otimes V^*) \arrow[d, Rightarrow, "\Phi^{-1}(t_{V^*,V}, t_{V,V^*})"'] \\
(V^* \otimes V) \otimes V^* \arrow[r, dashed, "(\tilde{\lambda}_{V^*}^{-1} \otimes Id_V) \otimes Id_{V^*}"] & (V^* \otimes V) \otimes V^* \arrow[d, dashed, "\eta_V \otimes Id_{V^*}"'] \arrow[d, Rightarrow, "\eta_V \otimes Id_{V^*}"] \\
 & V^*
\end{tikzcd}$$

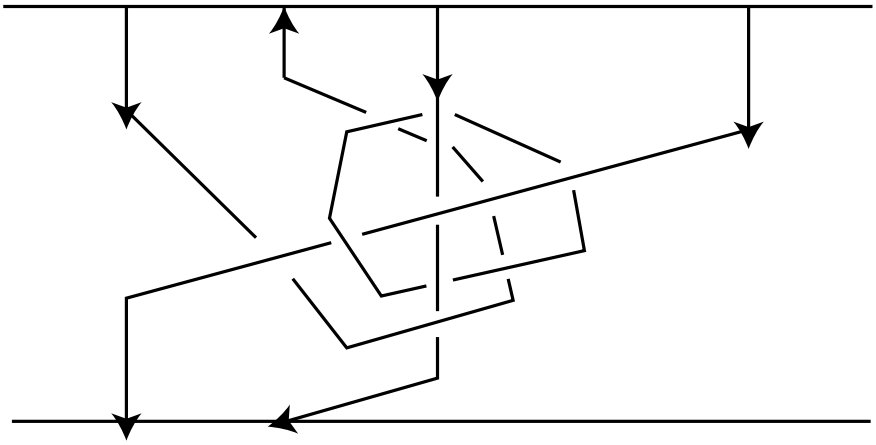
Dal momento che in entrambe i casi i cammini a tratteggio doppio sono l'identità per la definizione stessa di λ, $\tilde{\lambda}$, basta dimostrare che i diagrammi sono commutativi; ciò a sua volta segue dal fatto che Φ commuta con $\tilde{\lambda} \otimes Id \otimes Id$ e con $Id \otimes Id \otimes \lambda$. La verifica degli assiomi relativi al twist è lasciata per esercizio. $\square$

§10.3 Costruzione di un invariante universale.

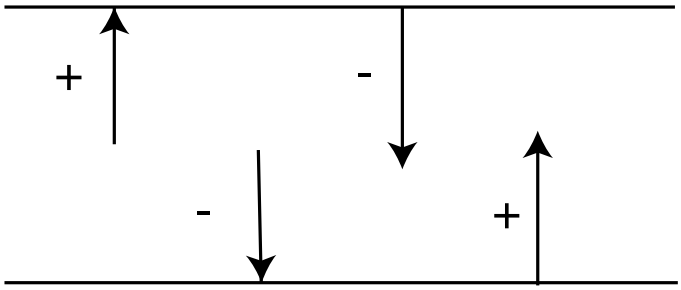
In questa sezione descriveremo una costruzione dell'invariante di Kontsevich utilizzando i risultati del paragrafo precedente. Iniziamo con la seguente definizione "geometrica". Per $n \in \mathbb{N}$ poniamo $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$.

Definizione 10.3.1. *Un tangle*[27] $L \subset \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ *è una 1-varietà compatta orientata tale che* ∂L *è contenuto nei piani* $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ *e tale che in ogni punto del bordo* L *è ortogonale a questi due piani.*

Un tangle L si dice di tipo (k,l) se $\#\left(\partial L \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\}\right) = k$, $\#\left(\partial L \cap \mathbb{R}^2 \times \{1\}\right) = l$; nella figura seguente rappresentiamo un $(2,4)$-tangle.



Ad ogni tangle L possiamo associare due sequenze di segni $\pm$, $s(L), b(L)$ secondo le convenzioni seguenti:

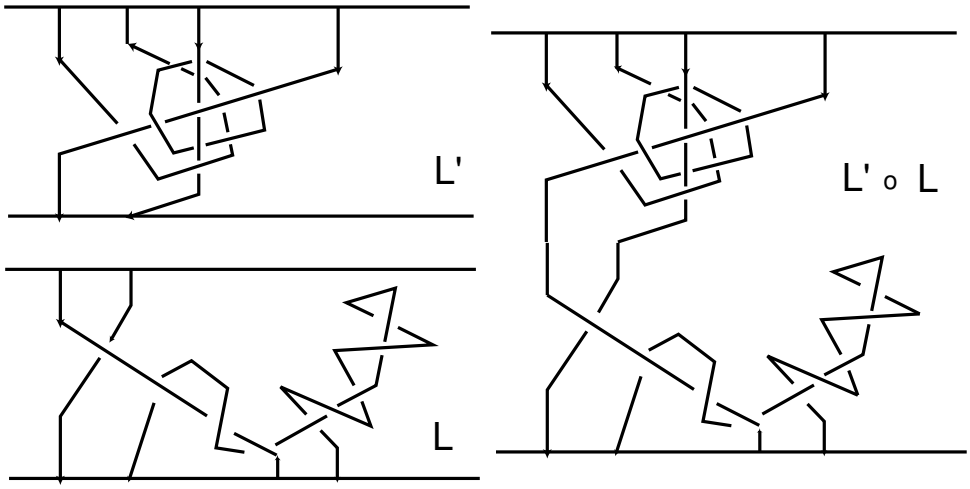


Nel caso dell'esempio precedente risulta $s(L) = (-,-)$, $b(L) = (-,+,-,-)$.

Possiamo adesso definire la *categoria dei tangles* $\mathcal{T}$ come quella i cui oggetti sono le successioni finite di segni $\pm$ (includiamo anche la successione vuota) e i cui morfismi sono le classi di isotopia di tangle (geometrici).

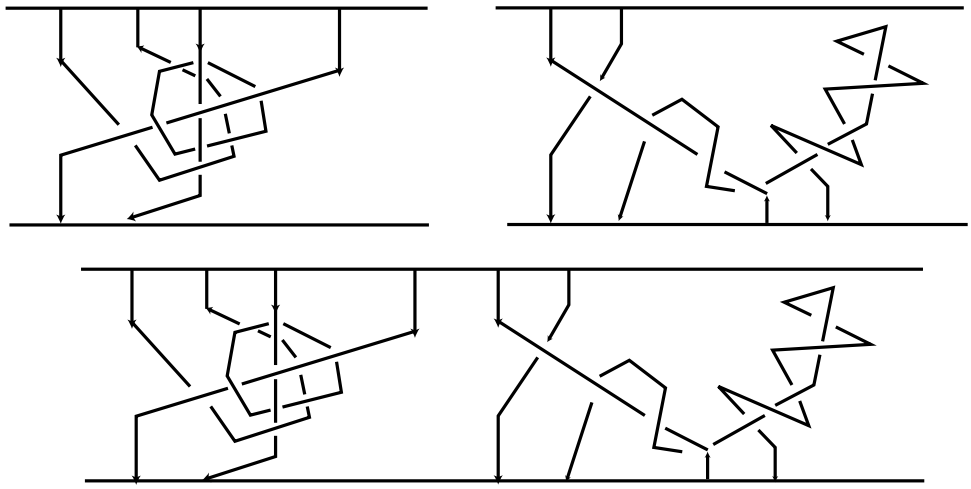
La composizione $L' \circ L$ tra morfismi L, L' tali che $b(L) = s(L')$ si effettua sovrapponendo i due tangles (L' "sopra" L) e riscalando in $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ la varietà ottenuta.

[27] letteralmente "groviglio".

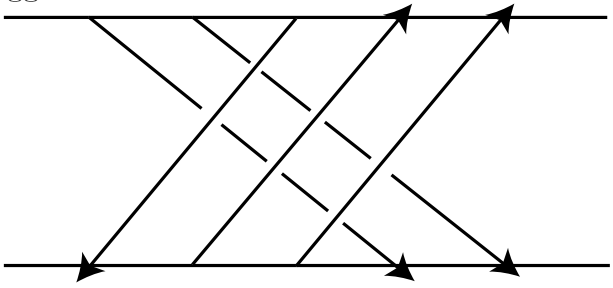


$\mathcal{T}$ può inoltre dotarsi di un prodotto tensoriale associativo che è dato su oggetti e morfismi dalla giustapposizione di sequenze e tangles rispettivamente. Se cioè $L = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$, $L' = (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_h)$, $\quad \epsilon_i, \epsilon'_j \in \{\pm\}$, allora

$$L \otimes L' = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_h).$$



$\mathcal{T}$ è una categoria intrecciata: date due sequenze L, L', l'intrecciamento $R_{L,L'} : L \otimes L' \to L' \otimes L$ è dato dal tangle in figura (l'orientazione su ciascuna stringa è determinata dalla successione di segni in L, L': l'esempio disegnato è $R_{(-,+,+),(-,-)}$). L'oggetto unità è la succesione vuota $\emptyset$.



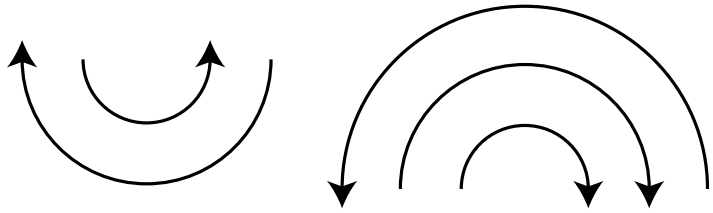
Precisamente, se $L = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$, $L' = (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_h)$, e σ_i è l'i-esimo generatore canonico del gruppo delle trecce, allora

$$R_{L,L'} = (\sigma_h \sigma_{h-1} \dots \sigma_1)(\sigma_{h+1} \sigma_h \dots \sigma_2) \dots (\sigma_{k+h-1} \sigma_{k+h-2} \dots \sigma_k)$$

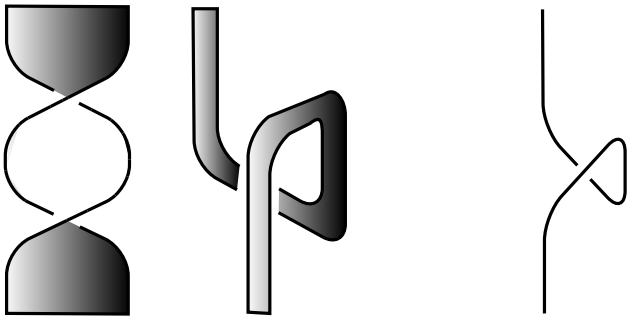
Infine in $\mathcal{T}$ possiamo definire una dualità sinistra: se $L = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in \mathcal{O}b(\mathcal{T})$, poniamo

$$L^* := (-\epsilon_k, \dots, -\epsilon_1);$$

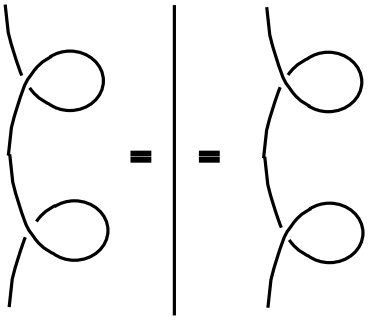
i morfismi di dualità $\varepsilon_L : \emptyset \to L \otimes L^*$, $\eta_L : L^* \otimes L \to \emptyset$ sono i tangles disegnati in figura (come prima l'orientazione su ciascuna stringa è determinata naturalmente dalla successione di segni in L: l'esempio disegnato è relativo a $\varepsilon_{+,-}$, $\eta_{-,+,+}$).



Definiamo adesso un'importante "variante" di $\mathcal{T}$, la categoria dei *ribbons*, che sarà denotata con $\mathcal{R}$. Tale categoria ha gli stessi oggetti di $\mathcal{T}$ mentre i morfismi in $\mathcal{R}$ sono le classi di isotopia di *framed tangles*[28]. Rappresenteremo un framed tangle tramite un diagramma di tangle con la convenzione che il framing sia determinato dal campo vettoriale costante perpendicolare ed "uscente" dal piano di proiezione. In tal modo ai framed tangles isotopi disegnati nella parte sinistra della figura seguente corrisponde il diagramma a destra.

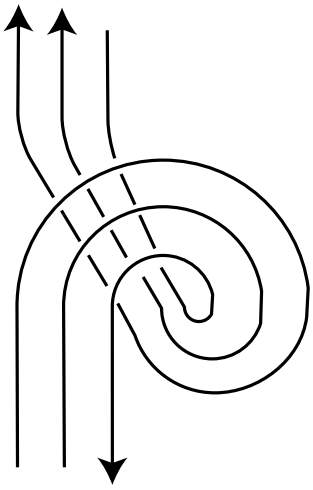


Ricordiamo che esiste una caratterizzazione dell'isotopia tra framed tangles in termini di diagrammi analoga al teorema di Reidemeister 2.3: l'unica differenza consiste nel fatto che la prima mossa di Reidemeister deve essere rimpiazzata dalla seguente.



Chiaramente, la struttura di categoria tensoriale intrecciata con dualità sinistra si trasporta senza modifiche da $\mathcal{T}$ a $\mathcal{R}$; possiamo però definire un operatore di torsione θ come nella figura seguente (in cui è disegnato $\theta_{+,+,-}$).

[28] La definizione di framed tangle può agevolmente dedursi dalle definizioni 1.1.1 e 10.3.1.



Pertanto la categoria $\mathcal{R}$ è una categoria tensoriale intrecciata con dualità e operatore di torsione; una categoria in cui siano definite tali strutture si dice *ribbon category*. Questa terminologia è giustificata dal fatto che $\mathcal{R}$ è "universale" tra le categorie di questo tipo:

Teorema 10.3.2. *[FY] Se $\mathcal{C}$ è una ribbon category e V un oggetto di $\mathcal{C}$, allora esiste un'unico funtore tensoriale*[29] *$F_V : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$, che preserva intrecciamento, dualità e twist, tale che $F_V(+) = V$.*

Osservazioni.

1. La dimostrazione consiste sostanzialmente nel dimostrare che $\mathcal{R}$ è la categoria tensoriale intrecciata con dualità e operatore di torsione "libera" sull'oggetto $+$ (la freccia verticale $\uparrow$), nel senso che $\mathcal{R}$ è definita dalle sole relazioni imposte da intrecciamento, dualità e twist.

2. La categoria dei tangles $\mathcal{T}$ è una ribbon category con $\theta_T = Id_T$; $\mathcal{T}$ ha una proprietà universale simile a quella di $\mathcal{R}$ per le ribbon categories con $\theta_X = Id_X$. Si osservi che la relazione $\theta_\pm = id_\pm$ equivale alla prima mossa di Reidemeister.

Generalizziamo ai tangle la nozione di diagramma di corde: se T è un tangle un *diagramma di corde* su T è il dato di un insieme finito di coppie ordinate di punti di $T \setminus \partial T$ riguardate a meno di diffeomorfismi che preservano le componenti connesse e l'orientazione su ciascuna componente (consideriamo pertanto anche corde non orizzontali). Diremo poi che in una categoria con intrecciamento infinitesimale e dualità vale la relazione di *corda isolata* se per ogni oggetto X risulta

$$t_{X,X^*} \circ \varepsilon_X = 0 \qquad \eta_X \circ t_{X^*,X} = 0.$$

Definiamo ora due notevoli categorie $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$.

(1) $Ob(\mathcal{D}) := Ob(\mathcal{T})$.

$Mor(\mathcal{D}) :=$ *diagrammi di corde su framed tangles* $/$ *relazione a 4 termini.*

(2) $Ob(\mathcal{D}') := Ob(\mathcal{T})$.

$Mor(\mathcal{D}') :=$ *diagrammi di corde su tangles* $/$ *relazione a 4 termini, corda isolata.*

Osserviamo che entrambe le categorie hanno una struttura di categoria tensoriale con intrecciamento infinitesimale.

[29] Cfr. Def. 10.1.3; si ricordi che "tensoriale" equivale a "monoidale stretto".

Proposizione 10.3.3.

(1) *Con le notazioni di §10.2, $\widetilde{\mathcal{D}_h}$, $\widetilde{\mathcal{D}'_h}$ sono ribbon categories; in $\widetilde{\mathcal{D}'_h}$ il twist è l'identità .*

(2) *Sia $\mathcal{S}$ una categoria simmetrica con intrecciamento infinitesimale e dualità sinistra. Per ogni $V \in Ob(\mathcal{S})$ esiste un unico funtore tensoriale $F_V : \mathcal{D} \to \mathcal{S}$ che preserva le intrecciamento simmetrico, intrecciamento infinitesimale e dualità tale che $F_V(+) = V$.*

Dim. Proviamo (1): per (2) si veda [Kas], Prop. XX.5.2.

La prima asserzione in (1) è una conseguenza diretta della costruzione della quantizzazione di una categoria con intrecciamento infinitesimale.

Per provare la seconda asserzione ricordiamo da 10.2.2 che $\theta_V = \exp(\frac{C_V}{2})$ con $C_V = -(id_V \otimes (\overline{\eta}_V \circ t_{V^*,V})) \circ (\overline{\varepsilon}_V \otimes id_V)$; d'altronde

$$\begin{aligned} C_V &= -(id_V \otimes (\overline{\eta}_V \circ t_{V^*,V})) \circ (\overline{\varepsilon}_V \otimes id_V) \\ &= -(id_V \otimes (\eta_V \circ (id_{V^*} \otimes \lambda_V^{-1}) \circ t_{V^*,V})) \circ (\overline{\varepsilon}_V \otimes id_V) \\ &= -(id_V \otimes (\eta_V \circ t_{V^*,V} \circ (id_{V^*} \otimes \lambda_V^{-1})) \circ (\overline{\varepsilon}_V \otimes id_V) = 0 \end{aligned}$$

per la naturalità dell'intrecciamento infinitesimale e la relazione di corda isolata. □

Da 10.3.2 deduciamo l'esistenza di un funtore tensoriale $F_+ : \mathcal{R} \to \widetilde{\mathcal{D}_h}$ che preserva intrecciamento dualità e twist, tale che $F_+(+) = +$; in particolare F_+ è l'identità sugli oggetti. Sia L un framed link; ricordando che $End_{\mathcal{R}}(\emptyset)$ può identificarsi all'insieme delle classi di isotopia di framed links, possiamo concludere che

$$F_+(L) \in End_{\widetilde{\mathcal{D}}_h}(\emptyset) = \bigoplus_{n>0} \widehat{\mathcal{A}}(\mathcal{O}^n)$$

è un invariante isotopico; nella relazione precedente $\mathcal{O}^n$ è il link banale a n componenti, $\mathcal{A}^m(\mathcal{O}^n)$ lo spazio dei diagrammi di m corde su $\mathcal{O}^n$ modulo la relazione a quattro termini e $\widehat{\mathcal{A}}(\mathcal{O}^n) = \prod_{m\geq 0} \mathcal{A}^m(\mathcal{O}^n)$.

Per ottenere un invariante dei nodi dobbiamo recuperare l'indipendenza dal framing, e ciò è assicurato dalla relazione di corda isolata. Infatti, per la proposizione precedente, nella ribbon category $\widetilde{\mathcal{D}'_h}$ il twist è l'identità , dunque in virtù della seconda osservazione che segue il teorema 10.3.2 possiamo dedurre l'esistenza di un funtore tensoriale $F'_+ : \mathcal{T} \to \widetilde{\mathcal{D}'_h}$. con $F'_+(+) = +$ che preserva la struttura di ribbon category.

Possiamo adesso ragionare come in precedenza: se K è un nodo (orientato), K può pensarsi come un elemento di $End_{\mathcal{T}}(\emptyset)$, e $F'_+(K)$ è un invariante di isotopia appartenente a $\widehat{\mathcal{A}^c} \hookrightarrow End_{\widetilde{\mathcal{D}}'_h}(\emptyset)$.

Teorema 10.3.4. *F'_+ (risp. F_+) è un invariante universale dei nodi (risp. nodi con framing).*

Dim. L'argomento è lo stesso per F_+ e per F'_+, e ricalca la dimostrazione del teorema 8.4.6. È facile vedere che F'_+ è un invariante di tipo finito; per provare poi l'universalità valutiamo il contributo locale di F'_+ in ogni autointersezione di una

curva singolare con m autointersezioni. Tale contributo è del tipo $R_{X,Y} - R_{X,Y}^{-1}$ che per la costruzione di $\widetilde{\mathcal{D}'_h}$ può scriversi come

$$\exp\left(h\frac{t_{X,Y}}{2}\right) - \exp\left(-h\frac{t_{X,Y}}{2}\right) = ht_{X,Y} + \text{termini di grado} > 1.$$

Pertanto, come in 8.4.6:

$$(F'_+)^{(m)}(C) = [D_C]h^m + \text{termini di grado} > m. \quad \square$$

10.3.5 Osserviamo che un ruolo cruciale nella costruzione dell'invariante è svolto dalla serie di Drinfeld Φ_{KZ}; peraltro osserviamo che Φ_{KZ} può essere rimpiazzata da una qualsiasi serie formale in due variabili non commutative che sia invertibile e che verifichi le identità di Drinfeld (cfr. 10.2.1). Chiameremo *associatore* una tale serie (la terminologia sarà giustificata in 11.1). Nel prossimo capitolo proveremo l'esistenza un associatore a coefficienti razionali (si noti - cfr. 9.1 - che i coefficienti Φ_{KZ} possono essere trascendenti!); inoltre un tale associatore può essere costruito ricorsivamente. Esaminando la costruzione di Cartier e tenendo conto che l'inversa di una serie a coefficienti razionali ha ancora coefficienti razionali, è facile rendersi conto che l'invariante costruito a partire da un associatore razionale è esso stesso razionale. Pertanto abbiamo stabilito che *esiste un invariante universale dei nodi a valori in* $\widehat{\mathcal{A}^c_{\mathbb{Q}}}$*; inoltre esso è esplicitamente calcolabile.*

In realtà vale un risultato più forte (cui accenneremo in seguito): l'invariante così costruito non dipende dall'associatore scelto e coincide con l'integrale di Kontsevich. Pertanto

Teorema 10.3.6. $\tilde{Z}(K) \in \widehat{\mathcal{A}^c_{\mathbb{Q}}}$*; inoltre esso è esplicitamente calcolabile.*

§.11 Razionalità degli associatori e dell'integrale di Kontsevich

Le idee generali e i risultati di questo capitolo sono dovuti a Drinfeld, che li ha sviluppati in due fondamentali lavori: [D3], [D4]. Presenteremo quei risultati che si legano più direttamente alla nostra trattazione, seguendo sostanzialmente l'esposizione di Bar-Natan [BN3], [BN4]. Il risultato più importante è l'esistenza di un associatore razionale costruibile ricorsivamente: descriveremo in dettaglio tale costruzione in 11.2-3; un rapido schema generale si trova all'inizio di 11.2. Premettiamo a tale argomento un breve excursus sulle quasi-Hopf algebre, necessario per inquadrare i risultati precedenti nel loro contesto originario.

§11.1 Quasi-Hopf algebre.

La nozione di associatore nasce in vista di una generalizzazione delle algebre di Hopf, le *quasi-Hopf algebre*, per le quali l'assioma di coassociatività viene rimpiazzato da una condizione più debole. Drinfeld introduce questa nozione con riferimento al problema della *quantizzazione* della coppia $(\mathfrak{g}, t)$ ove $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie qualsiasi di dimensione finita e t un 2-tensore simmetrico e $\mathfrak{g}$-invariante in $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ (cfr. [D3], [Kas]). Drinfeld nota che la categoria delle algebre di Hopf è troppo rigida per la soluzione del problema precedente, mentre la presenza di un notevole gruppo di simmetrie permette di risolverlo nella classe più ampia delle quasi-Hopf algebre. Una digressione su questi argomenti ci porterebbe troppo lontani dal filo conduttore di queste note; nel seguito diamo, a titolo di motivazione per quanto seguirà , le definizioni fondamentali della teoria delle quasi-algebre di Hopf, subito seguite da una loro reinterpretazione in termini categoriali. Spieghiamo anche come tale reinterpretazione, dovuta a Bar-Natan, si leghi direttamente alla teoria dell'integrale di Kontsevich.

Definizione 11.1.1. *Una quasi-Hopf algebra su un anello commutativo K è una quadrupla $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$, dove A è una K-algebra associativa con unità, Δ un omomorfismo di algebre $A \to A \otimes A$, ε un omomorfismo $A \to K$, e Φ un elemento invertibile di $A \otimes A \otimes A$ tali che*

$$(id \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi \cdot (\Delta \otimes id)(\Delta(a)) \cdot \Phi^{-1}, \qquad a \in A \tag{1}$$

$$(id \otimes id \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes id \otimes id)(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (id \otimes \Delta \otimes id)(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1) \tag{2}$$

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta \tag{3}$$

$$(id \otimes \varepsilon \otimes id)(\Phi) = 1 \tag{4}$$

e per cui valga un assioma che nel caso $\Phi = 1 \otimes 1 \otimes 1$ si riduce all'esistenza e biettività dell'antipodo[30]*. Φ si chiama associatore per l'algebra A.*

Cerchiamo di illustrare il significato di questi assiomi. Data un algebra A e due A-moduli U, V abbiamo già osservato che, in generale, $U \otimes V$ è un $A \otimes A$-modulo

[30] Precisamente: esistono un antiomomorfismo $S : A \to A$ ed elementi $\alpha, \beta \in A$ tali che, se per

ma non ha alcuna naturale struttura di A-modulo. Questa si ottiene però se si dà una struttura di coalgebra $\Delta : A \to A \otimes A$. Date tre rappresentazioni di A U, V, W, possiamo pensare un *associatore* $\Phi \in A \otimes A \otimes A$ come un isomorfismo $U \otimes (V \otimes W) \xrightarrow{\Phi} (U \otimes V) \otimes W$.

Naturalmente le parentesi al momento sono pleonastiche ma illustrano l'idea successiva. Data una coalgebra possiamo dotare sia $U \otimes (V \otimes W)$ che $(U \otimes V) \otimes W$ di una struttura di modulo, come appare nelle colonne del seguente diagramma; il primo assioma altro non dice che Φ induce un isomorfismo di A-moduli:

$$\begin{array}{ccc} (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{\Phi} & U \otimes (V \otimes W) \\ {\scriptstyle (\Delta\otimes 1)\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (1\otimes\Delta)\Delta} \\ (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{\Phi} & U \otimes (V \otimes W) \end{array}$$

Il secondo assioma è un assioma di compatibilità delle associazioni multiple (assioma del pentagono). Per quattro rappresentazioni abbiamo:

$$\begin{array}{ccccc} ((U \otimes V)\otimes) \otimes Z & & \xrightarrow{(\Delta\otimes 1\otimes 1)\Phi} & & (U \otimes V) \otimes (W \otimes Z) \\ {\scriptstyle \Phi\otimes 1}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes(1\otimes\Delta)\Phi} \\ (U \otimes (V \otimes W)) \otimes Z & \xrightarrow{(1\otimes\Delta\otimes 1)\Phi} & U \otimes ((V \otimes W) \otimes Z) & \xrightarrow{1\otimes\Phi} & U \otimes (V \otimes (W \otimes Z)) \end{array}$$

Il terzo e quarto assioma esprimono il fatto che ε definisce su K la rappresentazione banale 1 per cui $1 \otimes U = U = U \otimes 1$ e l'associatore $(U \otimes 1) \otimes V \to U \otimes (1 \otimes V)$ è l'identità. Possiamo riassumere questa discussione asserendo, come in 6.4.1, che *se A è una quasi-Hopf algebra allora $\mathcal{M}(A)$ è una categoria monoidale.*

Introduciamo una notazione molto utile. Dati $X = \sum_i x_i^1 \otimes \ldots \otimes x_i^n \in A^{\otimes n}$ e una $n-$upla $(k_1, \ldots, k_n)$ di elementi distinti di $\{1, \ldots, m\}$, $m \geq n$, poniamo

$$X^{k_1 \ldots k_n} = \sum_i y_i^1 \otimes \cdots \otimes y_i^m \in A^{\otimes m}$$

con $y_i^{k_j} = x_i^j$ per $j \leq n$ e $y_i^k = 1$ per i rimanenti indici.[31] Per esempio

$$X = a \otimes b, \quad m = 3: \quad X^{12} = a \otimes b \otimes 1,\ X^{21} = b \otimes a \otimes 1,\ X^{13} = a \otimes 1 \otimes b \quad \text{etc.}$$

Data una coalgebra ne possiamo definire una nuova ponendo

$$\Delta'(a) := \Delta(a)^{21},\ \Delta(a) = \sum u_i \otimes v_i,\ \Delta'(a) = \sum v_i \otimes u_i.$$

Ora introduciamo una nuova definizione:

$a \in A$ $\Delta(a) = \sum_i x_i \otimes y_i$, $\Phi = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes c_i$, $\Phi^{-1} = \sum_i a'_i \otimes b'_i \otimes c'_i$, allora:

$$\sum_i S(x_i)\alpha y_i = \varepsilon(a)\alpha \qquad \sum_i x_i \beta S(y_i) = \varepsilon(a)\beta,$$

$$\sum_i S(a_i)\alpha b_i \beta S(c_i) = 1 \qquad \sum_i a'_i \beta S(b'_i)\alpha c'_i = 1.$$

Questi assiomi sono automaticamente soddisfatti in tutti i casi che ci interessano: Drinfeld [Dr1] prova infatti che se A è piatta come K-modulo, e I è un ideale nilpotente tale che che A/IA è una quasi-Hopf algebra su K/I, allora A è una quasi-Hopf algebra su K.

[31] In questa notazione m è implicito e si suppone sia chiaro dal contesto.

Definizione 11.1.2. *Una quasi-Hopf algebra quasitriangolare è una quintupla* $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$*, dove* $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ *è una quasi-Hopf algebra ed* R *un elemento invertibile di* $A \otimes A$ *tale che*

$$\Delta'(a) = R\Delta(a)R^{-1}, \qquad a \in A \tag{5}$$

$$(\Delta \otimes id)(R) = \Phi^{312} R^{13} (\Phi^{132})^{-1} R^{23} \Phi \tag{6.a}$$

$$(id \otimes \Delta)(R) = (\Phi^{231})^{-1} R^{13} \Phi^{213} R^{12} \Phi^{-1} \tag{6.b}$$

Illustriamo di nuovo gli assiomi che a prima vista sono incomprensibili.

Date due rappresentazioni U, V indichiamo con $\tau : U \otimes V \to V \otimes U$ lo scambio $\tau(u \otimes v) = v \otimes u$. Tale scambio è un omomorfismo di A-moduli solo se A è *cocommutativa*, ovvero $\Delta = \Delta'$. In generale il primo assioma ci dice che $\tilde{R} := \tau R$ induce un isomorfismo di A-moduli:

$$\begin{array}{ccccc} U \otimes V & \xrightarrow{R} & U \otimes V & \xrightarrow{\tau} & V \otimes U \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta'} & & \downarrow{\scriptstyle\Delta} \\ U \otimes V & \xrightarrow{R} & U \otimes V & \xrightarrow{\tau} & V \otimes U \end{array}$$

Se vogliamo mettere in evidenza che $\tilde{R}$ agisce su $U \otimes V$ scriveremo $\tilde{R}_{U,V}$. L'assioma 6a) si traduce in

$$\begin{array}{ccccc} (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{\Phi} & U \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow{1 \otimes \tilde{R}_{V,W}} & U \otimes (W \otimes V) \\ {\scriptstyle \tilde{R}_{U \otimes V, W}}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle\Phi} \\ W \otimes (U \otimes V) & \xleftarrow{\Phi} & (W \otimes U) \otimes V & \xleftarrow{\tilde{R}_{U,W} \otimes 1} & (U \otimes W) \otimes V \end{array}$$

Il 6b) è simile. Si tratta di *relazioni di treccia.*
Dato un elemento invertibile $F \in A \otimes A$ con $(\varepsilon \otimes id)(F) = (id \otimes \varepsilon)(F) = 1$ a partire da una quasi-Hopf algebra quasitriangolare $A = (A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ se ne puó costruire un'altra, $A_F = (A, \Delta_F, \varepsilon, \Phi_F, R_F)$, che si dice ottenuta dalla vecchia tramite *twist* per F, ponendo

$$\Delta_F(a) = F\Delta(a)F^{-1}, \quad a \in A$$

$$\Phi_F = F^{23} \cdot (id \otimes \Delta)(F) \cdot \Phi \cdot (\Delta \otimes id)(F^{-1}) \cdot (F^{12})^{-1} \tag{♣}$$

$$R_F = F^{21} \cdot R \cdot F^{-1}.$$

Esercizio. Si provi che le formule precedenti definiscono effettivamente una struttura di quasi-Hopf algebra quasitriangolare su A.

Si osservi che se $\Phi = 1$, ciò non è necessariamente vero per Φ_F; *pertanto i twists operano sulla classe delle quasi-Hopf algebre, ma non, in generale, su quella*

delle algebre di Hopf. Il twist corrisponde a modificare la comoltiplicazione come illustrato nel seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} U \otimes V & \xrightarrow{F} & U \otimes V \\ {\scriptstyle \Delta(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_F(a)} \\ U \otimes V & \xrightarrow{F} & U \otimes V \end{array}$$

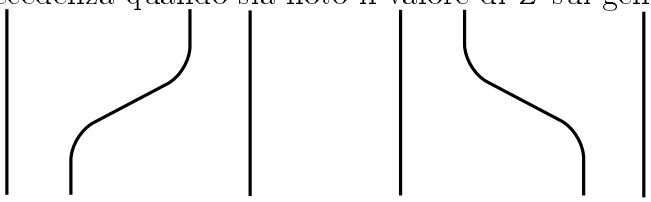
in modo da ottenere una teoria equivalente; naturalmente le restrizioni sono necessarie per mantenere gli assiomi; il senso preciso dell'equivalenza è espresso dalla seguente

Proposizione 11.1.3. *Se le quasi-Hopf algebre (risp. quasi-Hopf algebre quasi-triangolari) A, B sono ottenute l'una dall'altra tramite twist, allora $\mathcal{M}(A)$ e $\mathcal{M}(B)$ sono equivalenti come categorie monoidali (risp. categorie monoidali intrecciate).*

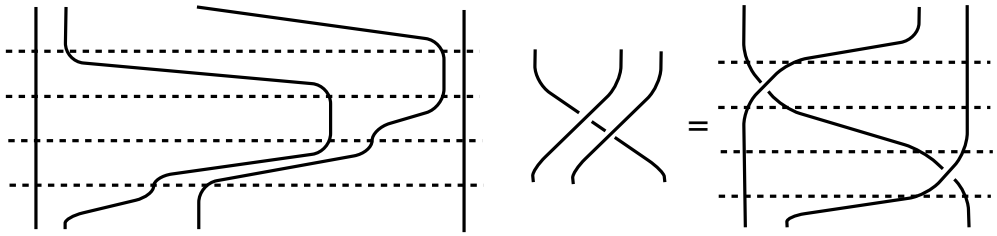
11.1.4 Bar-Natan [BN2] ha proposto un modo di interpretare gli assiomi precedenti che prende spunto dalla definizione dell'integrale di Kontsevich e che è implicito nella costruzione di Cartier descritta nel capitolo precedente. Precisamente, consideriamo un nodo e una sua proiezione del tipo descritto in 8.1 (decomponiamo cioè $\mathbb{R}^3$ come $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$, con coordinate t, z; assumiamo inoltre che t abbia un numero finito di punti critici non degeneri). Nel capitolo precedente abbiamo interpretato un nodo come un particolare endomorfismo dell'oggetto unità nella categoria dei tangles; tale categoria è generata dalle dualità e dagli intrecciamenti elementari: ciò significa che, data una proiezione come in precedenza, è sempre possibile trovare una suddivisione dell'intervallo in cui varia la coordinata t tale che in ogni sottointervallo capiti uno e uno solo dei "generatori". Poichè l'integrale di Kontsevich Z è moltiplicativo, per calcolarlo basta conoscere il valore (che un'elemento dell'algebra associativa $\hat{\mathcal{A}}^c$) su tali generatori.

Supponiamo ora che il diagramma rappresenti un morfismo in una categoria monoidale: dovremo allora tener conto della distanza relativa dei vari rami in ogni sottointervallo: consideriamo ad esempio

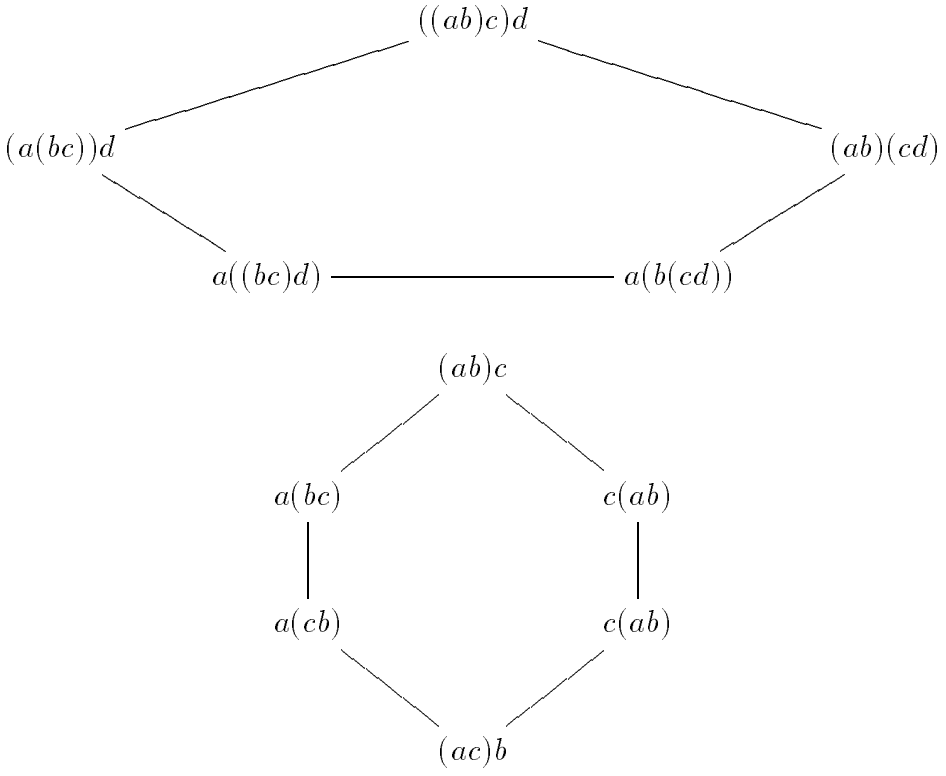
Se etichettiamo i quattro rami da sinistra a destra con le lettere a, b, c, d il precedente diagramma può interpretarsi come un morfismo da $((ab)c)d$ a $(a(bc))d$. Dunque, ai fini del calcolo dell'invariante, se assumiamo che i soli contributi rilevanti siano quelli di rami "vicini", possiamo dedurre usando la moltiplicatività , il valore come in precedenza quando sia noto il valore di Z sui generatori e su



Sia Φ il valore di Z sul morfismo disegnato a sinistra; pensiamo dunque Φ come un *associatore* che rende "vicini" due rami che in precedenza non lo erano. Osserviamo che al morfismo disegnato a destra corrisponde Φ^{-1} e che, tramite l'azione del gruppo simmetrico, possiamo tener conto delle associazioni su tutte le terne di rami consecutivi (dunque useremo notazioni del tipo Φ^{234}). Riguardiamo infine la comoltiplicazione Δ come l'operazione che "raddoppia" le stringhe (in altri termini Δ sostituisce a una stringa due stringhe parallele e "vicine"); possiamo finalmente reinterpretare gli assiomi del pentagono e degli esagoni: il primo segue dalla scrittura della treccia banale mostrata nella figura di sinistra; gli altri derivano dall'ovvia identità disegnata nella figura a destra (e dall'analoga figura, non disegnata, in cui si scambiano tutti gli incroci).



Le due figure corrispondono rispettivamente alle associazioni seguenti:



Riprenderemo brevemente queste idee in 11.4.

§11.2 p-trecce, p-diagrammi di corde, associatori.

L'obiettivo centrale di questo e del prossimo paragrafo sarà quello di dimostrare i seguenti risultati:

(1) Sia $\mathcal{P}_n$ l'algebra generata *sui razionali* dai diagrammi di corde su n frecce verticali modulo le relazioni a 4 termini. Esiste un associatore "formale", cioè a valori nel completamento $\widehat{\mathcal{P}_3}$ dell'algebra $\mathcal{P}_3$.
(2) Gli associatori costituiscono uno spazio omogeneo su un gruppo unipotente.
(3) Gli associatori sono costruibili induttivamente.
(4) Per ogni associatore formale Φ, esiste un invariante di Vassiliev universale di framed tangles $\mathcal{Z}_\Phi$ che, nel caso dei links, coincide con l'integrale di Kontsevich ed è indipendente da Φ. In particolare l'integrale di Kontsevich è razionale, nel senso che ha valori in nell'algebra $(\hat{\mathcal{A}}^c)_{\mathbb{Q}}$.

Diamo un'idea generale della dimostrazione dei primi tre punti: presenteremo tali risultati, che sono impliciti in [D3], come esposti da [BN3].

Si cerca di generalizzare l'isomorfismo di Khono tra $\widehat{\mathbb{C}[P_n]} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathcal{P}_n}(\mathbb{C})$ (cfr. 9.4.4). Precisamente al posto di $\mathbb{C}[P_n]$ si considera una opportuna variante $\mathfrak{B}$ della categoria delle "p-trecce" (*parenthesized braid*, [BN3]), mentre al posto di $\mathcal{P}_n$ si considera la categoria $\mathfrak{D}$ dei p-diagrammi, opportuni diagrammi di corde "non associativi". Questi oggetti hanno gradazioni e filtrazioni compatibili, inoltre sono dotati di ulteriori strutture che si mantengono anche sui graduati e sui completamenti; c'e' poi una opportuna nozione di "isomorfismo $\mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ che preserva la struttura". Il primo punto chiave e' che ogni tale isomorfismo puo' pensarsi come un associatore formale; a questo punto si hanno automaticamente azioni naturali e semplicemente transitive sugli associatori, di $Aut(\mathfrak{B})$ (azione destra) e di $Aut(\mathfrak{D})$ (azione sinistra). $Aut(\mathfrak{B})$, $Aut(\mathfrak{D})$ sono chiamati da Drinfeld gruppi di Grothendieck-Teichmuller: si noti che essi sono definiti implicitamente dalla costruzione precedente, in particolare non è banale calcolare esplicitamente la moltiplicazione.

Il secondo punto cruciale consiste nel provare che, detto $\mathbf{Ass}^{(m)}$ l'insieme degli associatori "fino a grado m", la proiezione naturale $\mathbf{Ass}^{(m)} \to \mathbf{Ass}^{(m-1)}$ e' suriettiva; per questo basta vedere che $Aut(\mathfrak{D})^{(m)} \to Aut(\mathfrak{D})^{(m-1)}$ e' suriettiva, e la cosa si fa presentando $\mathfrak{D}^{(m)}$ per generatori e relazioni, e deducendo una presentazione per $Aut(\mathfrak{D})^{(m)}$, che risulta essere uno schema in gruppo unipotente. Si conclude con un argomento coomologico; è da notare il fatto che, cercando di procedere parallelamente a [D3] con un approccio esclusivamente coomologico si incontrano difficoltà tecniche al momento non superate: si veda a proposito [BN2].

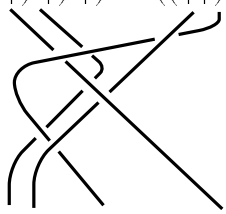
Il risultato in (4) è tratto da [LM]; verrà brevemente discusso nel terzo paragrafo.

Notazione. In questo capitolo adotteremo la seguente convenzione per la composizione di morfismi nelle categorie $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, ...: $F \circ G$ è il morfismo ottenuto applicando *prima* F *e poi* G.

Definizione 11.2.1. *Una parola non associativa su* $\uparrow$ *è un elemento dell'algebra non associativa libera generata su* $\mathbb{K}$ *dal simbolo* $\uparrow$ *(e.g.* $(((\uparrow\uparrow)\uparrow)(\uparrow\uparrow))$*).*

Una p-treccia è il dato di due parole non associative w_1, w_2 *su* $\uparrow$ *della stessa lunghezza* m *e di una treccia geometrica in* B_m*.*

Penseremo le p-trecce come una categoria $\mathfrak{B}'$ i cui oggetti sono le parole non associative, i morfismi sono trecce geometriche $b : w_1 \to w_2$, $\ell(w_1) = \ell(w_2) = m$, $b \in B_m$ e la composizione è data sostanzialmente dal prodotto nel gruppo delle trecce. Disegneremo le p-trecce come normali trecce geometriche, ma nelle figure dovremo tener conto della distanza relativa dei vari rami nei punti iniziali e finali della treccia; ad esempio se $b : (((\uparrow\uparrow)\uparrow)\uparrow) \to ((\uparrow\uparrow)(\uparrow\uparrow))$

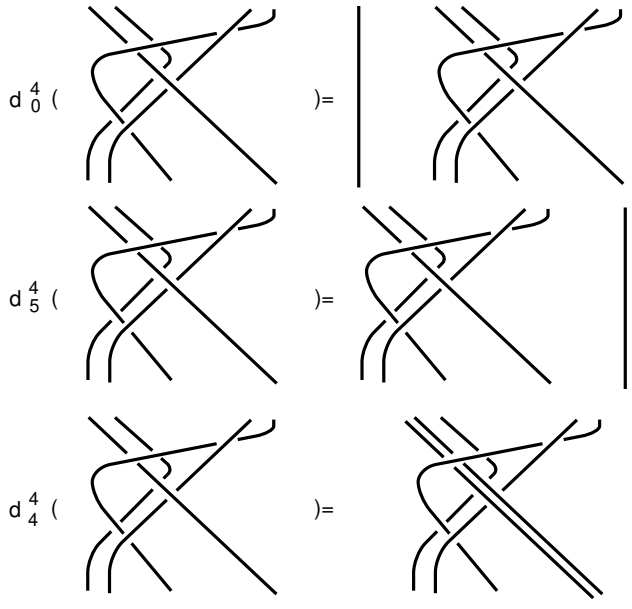


Chiaramente, $\mathfrak{B}'$ ha una struttura di categoria monoidale analoga a quella descritta in §10.3 per i tangles. Introduciamo adesso alcuni notevoli operatori che agiscono sulle trecce (pensate come morfismi in $\mathfrak{B}'$). Se w è una parola non associativa su $\uparrow$ di lunghezza n, denotiamo con w^i la parola di lunghezza $n+1$ in cui la i-esima freccia $\uparrow$ è rimpiazzata da $(\uparrow\uparrow)$. Sia $b \in B_n$, $b : w_1 \to w_2$ e sia $\overline{b}$ l'immagine di b nella proiezione canonica $B_n \to S_n$; allora

$$d_0^n(b) : (\uparrow (w_1)) \to (\uparrow (w_2)), \qquad d_0^n\left(\boxed{b}\right) = \left(\uparrow \boxed{b}\right)$$

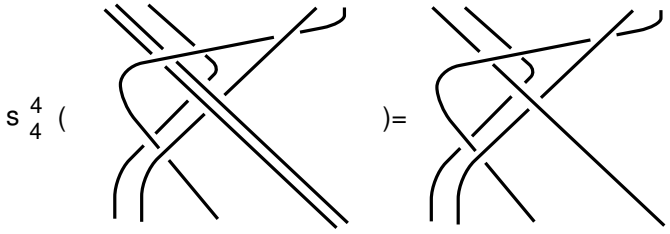
$$d_{n+1}^n(b) : ((w_1)\uparrow) \to ((w_2)\uparrow), \qquad d_{n+1}^n\left(\boxed{b}\right) = \left(\boxed{b} \uparrow\right)$$

$$d_i^n(b) : w_1^i \to w_2^{\overline{b}(i)},\ 1 \le i \le n \qquad d_i^n\left(\boxed{b}\right) = \boxed{\underbrace{\ldots(\uparrow\uparrow)\ldots}_{i}}$$

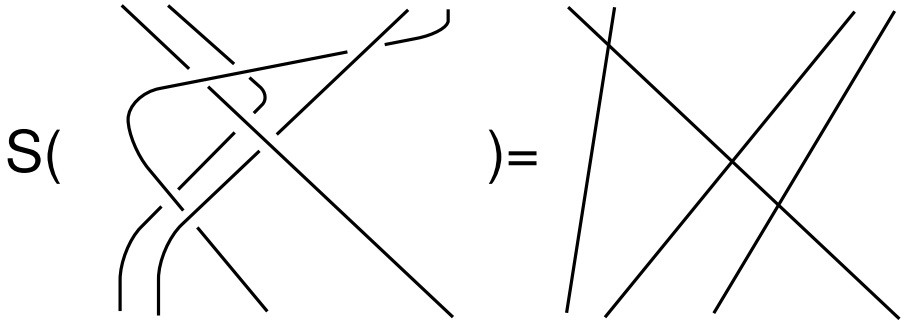


Dunque d_0^n aggiunge una stringa a sinistra di b, $d_{n+1}^n(b)$ aggiunge una stringa a destra di b, mentre d_i^n "raddoppia" la i-esima stringa (più precisamente, sostituisce alla i-esima stringa due stringhe parallele e "vicine").

Possamo considerare anche operatori s_i^n, $1 \leq i \leq n$ che tolgono la i-esima stringa:



Introduciamo anche l'analogo della suriezione canonica $B_n \to S_n$, ovvero il funtore $S : \mathfrak{B}' \longrightarrow \mathfrak{P}$ dalla categoria delle p-trecce a quella delle p-permutazioni (lasciamo al lettore la formulazione precisa).

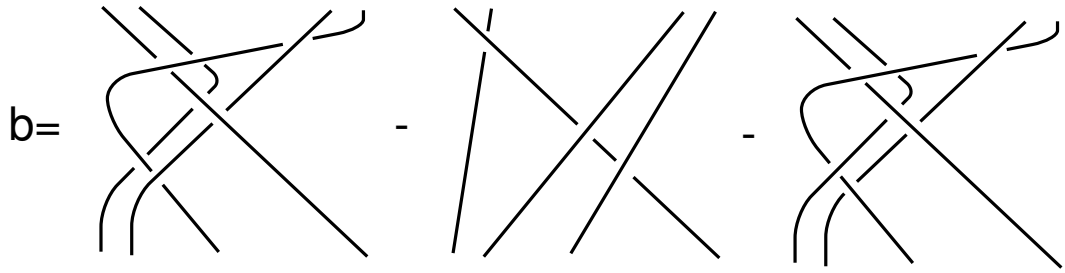


In realtà considereremo una "variante" di $\mathfrak{B}'$: ciò corrisponde al fatto che, come spiegato nell'introduzione, ci interessa un analogo delle trecce pure.

Definizione 11.2.2. *Sia* $\mathbb{A}$ *una* $\mathbb{K}$*-algebra associativa unitaria; la categoria* $\mathfrak{B}(\mathbb{A}) \equiv \mathfrak{B}$ *è la categoria i cui oggetti sono le parole non associative e i cui morfismi sono combinazioni lineari formali finite a coefficienti in* $\mathbb{A}$ *di p-trecce che hanno la stessa immagine tramite S:*

$$b \in \ Mor(\mathfrak{B}) \iff b = \sum_{i=1}^{k} \beta_i b_i, \ S(b_i) = S(b_j) \, \forall \, i, j, \ \beta_i \in \mathbb{A}.$$

Ad esempio



La coppia $(\mathfrak{B}, S : \mathfrak{B} \to \mathfrak{P})$ è un esempio di *categoria lineare fibrata su* $\mathfrak{P}$: in altri termini, S è l'identità sugli oggetti e per ogni morfismo $\pi \in \mathfrak{P}$, $S^{-1}(\pi)$ è uno spazio

vettoriale, con l'ulteriore proprietà che la somma in $S^{-1}(\pi)$ e la composizione di morfismi sono mutuamente distributivi:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i b_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{h} \gamma_j c_j\right) = \sum_{i,j} \beta_i \gamma_j b_i c_j.$$

Per una categoria lineare fibrata ha senso, come nella categoria delle $\mathbb{K}$-algebre introdurre le nozioni ideale, quoziente, filtrazione, gradazione, limite diretto e inverso , "sostituendo" negli assiomi la moltiplicazione con la composizione: ad esempio, se definiamo *sottocategoria* di una categoria lineare fibrata il dato di sottospazi $\{\Sigma_\pi \mid \Sigma_\pi \subseteq S^{-1}(\pi),\ \pi \in \mathfrak{P}\}$ chiusi rispetto alla composizione, un *ideale* in $(\mathfrak{B}, S : \mathfrak{B} \to \mathfrak{P})$ è una sottocategoria $\mathfrak{I}$ tale che se b_1, b_2 sono morfismi componibili in $\mathfrak{B}$ e almeno uno appartiene ad $\mathfrak{I}$, allora $b_1 \circ b_2 \in Mor(\mathfrak{I})$.

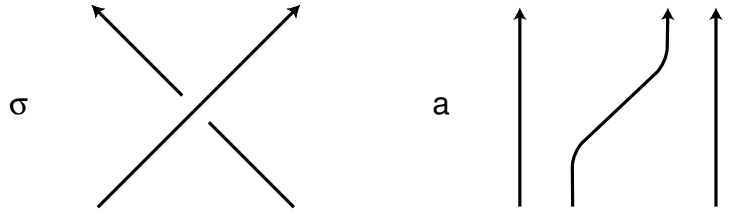
Se $\mathfrak{I}$ è un ideale, $\mathfrak{I}^m$ è l'ideale dei morfismi che possono essere presentati come composizione di m morfismi in $\mathfrak{I}$; considereremo anche il *completamento* $\mathfrak{I}$*–adico* $\varprojlim_m \mathfrak{B}/\mathfrak{I}^m$.

Definizione 11.2.3. *Introduciamo in* $\mathfrak{B}$ *le seguenti strutture:*

(1) *L'ideale di aumentazione* $\mathfrak{J}$*, consistente dei morfismi* $\sum_i \beta_i b_i$ *tali che* $\sum_i \beta_i = 0$.
(2) *La filtrazione unipotente, definita dalle potenze di* $\mathfrak{J}$*:* $\mathcal{F}_m\mathfrak{B} = \mathfrak{J}^{m+1}$.
(3) *L'*m*-esimo quoziente unipotente* $\mathfrak{B}^{(m)} = \mathfrak{B}/\mathfrak{J}^{m+1}$*, e l'associato completamento unipotente*

$$\hat{\mathfrak{B}} = \varprojlim_m \mathfrak{B}^{(m)}.$$

Introduciamo anche una comoltiplicazione, definita da $\square(b) = b \otimes b$ *per ogni p-treccia. Siano infine* $\sigma : (\uparrow\uparrow) \to (\uparrow\uparrow)$ *e* $a : ((\uparrow\uparrow)\uparrow) \to (\uparrow(\uparrow\uparrow))$ *le p-trecce seguenti*



Osservazione. Gli operatori d_i^n, s_i^n inducono analoghi operatori in $\hat{\mathfrak{B}}$ e in $\mathfrak{B}^{(m)}$; per *struttura* associata a $\hat{\mathfrak{B}}$ o $\mathfrak{B}^{(m)}$ intenderemo il dato

$$\underline{\hat{\mathfrak{B}}} = \left(\hat{\mathfrak{B}},\ S : \hat{B} \to \mathfrak{P},\ d_i^n,\ s_i^n,\ \square,\ \sigma\right)$$
$$\underline{\mathfrak{B}}^{(m)} = \left(\mathfrak{B}^{(m)},\ S : B^{(m)} \to \mathfrak{P},\ d_i^n,\ s_i^n,\ \square,\ \sigma\right).$$

Dalla presentazione di Artin del gruppo delle trecce non è difficile dedurre che

Proposizione 11.2.4. $\mathfrak{B}$ *è generata da* $a^{\pm 1}$, $\sigma^{\pm 1}$ *e dalle loro immagini tramite gli operatori* d_m^n *(al variare di* m, n*).*

Consideriamo adesso la categoria $\mathfrak{D}$, che sarà costruita a partire dalla bialgebra $\mathcal{P}_n$ dei diagrammi di corde su n stringhe verticali $\uparrow$ modulo le relazioni a quattro

termini introdotta in §8.2; ricordiamo che in $\mathcal{P}_n$ si definisce una comoltiplicazione Δ estendendo moltiplicativamente la relazione di primitività per i t_{ij}.

La gradazione introdotta richiedendo che i t_{ij} abbiano grado 1 induce la filtrazione decrescente $\mathcal{F}_m\mathcal{P}_n = \oplus_{m'>m}\mathcal{G}_{m'}\mathcal{P}_n$; possiamo corrispondentemente considerare il completamento $\hat{\mathcal{P}}_n = \varprojlim_m \mathcal{F}_m\mathcal{P}_n$.

Ricordiamo anche che su $\mathcal{P}_n$ opera il gruppo simmetrico permutando le stringhe.

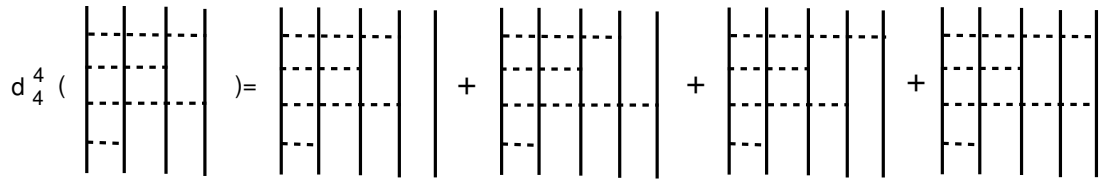
Definizione 11.2.5. *Introduciamo gli operatori* $d_i^n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}$, $0 \le i \le n+1$, $s_i^n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$, $1 \le i \le n$ *definendoli sui generatori nel modo seguente:*

$$d_i^n(t_{j\,k}) = \begin{cases} t_{j+1\,k+1} & i<j<k \\ t_{j\,k+1}+t_{j+1\,k+1} & i=j<k \\ t_{j\,k+1} & j<i<k \\ t_{j\,k}+t_{j\,k+1} & j<i=k \\ t_{j\,k} & j<k<i \end{cases} \qquad s_i^n(t_{j\,k}) = \begin{cases} t_{j-1\,k-1} & i<j<k \\ 0 & i=j<k \\ t_{j\,k-1} & j<i<k \\ 0 & j<i=k \\ t_{j\,k} & j<k<i \end{cases}$$

Si verifica che in tal modo di definiscono omomorfismi di algebra (esercizio).
Le precedenti formule possono interpretarsi pensando che, dato un diagramma di corde D, d_0^n, d_{n+1}^n operano inserendo una stringa su cui non terminano corde rispettivamente alla sinistra e alla destra di D:

$$d_0^n\left(\boxed{D}\right) = \left(\uparrow \boxed{D}\right) \qquad d_{n+1}^n\left(\boxed{D}\right) = \left(\boxed{D} \uparrow\right)$$

$d_i^n(D)$ di ottiene invece da D duplicando la i-esima stringa e considerando la somma dei diagrammi che si ottengono disponendo in tutti i modi possibili le corde con vertici sulla i-esima corda anche sulla nuova corda introdotta (in particolare, se la i-esima corda contiene k vertici, $d_i^n(D)$ è somma di 2^k diagrammi):



Più semplice è l'azione degli altri operatori: s_i^n è zero se sulla i-esima stringa di D capitano vertici di corda mentre cancella la i-esima corda da D in caso contrario.

Definizione 11.2.6. *Sia* $\mathbb{A}$ *una* $\mathbb{K}$*-algebra associativa unitaria. Denotiamo con* $\mathfrak{D}(\mathbb{A}) \equiv \mathfrak{D}$ *la categoria dei p-diagrammi di corde: gli oggetti in* $\mathfrak{D}$ *sono le parole non associative, mentre i morfismi sono i prodotti formali* $D \cdot p$, $D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $p \in \mathfrak{P}$. *Se* p_1, p_2 *sono componibili, la composizione è data da*

$$(D_1 \cdot p_1) \circ (D_2 \cdot p_2) = (D_1 D_2^{p_1}) \cdot (p_1 \circ p_2),$$

ove $D_2^{p_1}$ *denota l'azione di permutazione di* p_1 *su* D_2.

Osservazioni. **(1)** La gradazione naturale in $\mathcal{P}$ si trasferisce su $\mathfrak{D}$, che pertanto può decomporsi come $\mathfrak{D} = \oplus_m \mathcal{G}_m\mathfrak{D}$; sussiste anche la filtrazione $\mathcal{F}_m\mathfrak{D} := \oplus_{m'>m}\mathcal{G}_{m'}\mathfrak{D}$.

$\mathfrak{D}$ ha la struttura di categoria fibrata su $\mathfrak{P}$ rispetto all'applicazione $S : D \cdot p \mapsto p$.

(2) Gli operatori d_i, s_j inducono operatori in $\mathfrak{D}$ tramite le relazioni:

$$d_i^n(D \cdot p) = d_i^n(D) \cdot d_i^n(p), \qquad s_i^n(D \cdot p) = s_i^n(D) \cdot s_i^n(p).$$

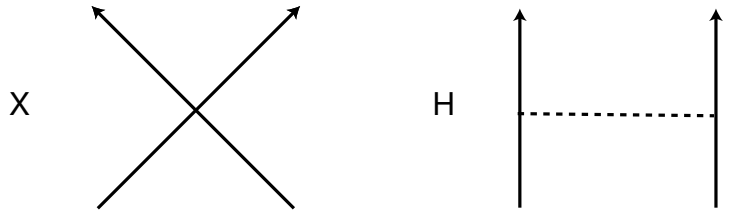
Analogamente, la comoltiplicazione Δ induce un funtore comoltiplicazione in $\mathfrak{D}$.

Definizione 11.2.7. *Introduciamo le categorie*

$$\mathfrak{D}^{(m)} = \mathfrak{D}/\mathcal{F}_m\mathfrak{D},$$
$$\hat{\mathfrak{D}} = \varprojlim_m \mathfrak{D}^{(m)},$$

dette rispettivamente categoria dei p-diagrammi fino a grado m e categoria delle serie formali di p-diagrammi.

Come in precedenza consideriamo due morfismi speciali X, $H \in \mathfrak{D}$:



Consideriamo poi la serie formale $\tilde{R} = \exp\left(\frac{H}{2}\right) \cdot X$, che può rigurdarsi come un morfismo in $\mathfrak{D}^{(m)}$ o in $\hat{\mathfrak{D}}$.

Osservazione. Come accade per $\mathfrak{B}$ gli operatori d_i^n, s_i^n inducono analoghi operatori in $\hat{\mathfrak{D}}$ o a $\mathfrak{D}^{(m)}$; corrispondentemente si hanno le strutture:

$$\underline{\hat{\mathfrak{D}}} = \left(\hat{\mathfrak{D}},\ S : \hat{D} \to \mathfrak{P},\ d_i^n,\ s_i^n,\ \Delta,\ \tilde{R}\right)$$
$$\underline{\mathfrak{D}}^{(m)} = \left(\mathfrak{D}^{(m)},\ S : D^{(m)} \to \mathfrak{P},\ d_i^n,\ s_i^n,\ \Delta,\ \tilde{R}\right).$$

Analogamente a 11.2.4 si ha

Proposizione 11.2.8. *$\mathfrak{D}$ è generata da $a^{\pm 1}$, X, H e dalle loro immagini tramite gli operatori d_m^n (al variare di m, n).*

L'ultima nozione da introdurre è quella di "analogo" dell'associatore di Drinfeld: in questo caso non abbiamo una quasi-Hopf algebra di cui si considerano le potenze tensoriali, bensì l'unica algebra $\mathcal{P}$.

Definizione 11.2.9. *Un associatore (formale) è un elemento $\Phi \in \hat{\mathcal{P}}_3(\mathbb{A})$ che soddisfa i seguenti assiomi:*

(1) *il pentagono in $\hat{\mathcal{P}}_4$:*

$$d_4^3(\Phi) \cdot d_2^3(\Phi) \cdot d_0^3(\Phi) = d_1^3(\Phi) \cdot d_3^3(\Phi);$$

(2) *gli esagoni in $\hat{\mathcal{P}}_3$:*

$$d_1^2\left(\exp(\frac{\pm t_{12}}{2})\right) = \Phi \cdot \exp(\frac{\pm t_{23}}{2}) \cdot (\Phi^{-1})^{132} \cdot \exp(\frac{\pm t_{13}}{2}) \cdot \Phi^{312};$$

(3) *Φ è non degenere:*

$$s_1^3(\Phi) = s_2^3(\Phi) = s_3^3(\Phi) = 1;$$

(4) *Φ è di tipo gruppo:*

$$\Delta(\Phi) = \Phi \otimes \Phi$$

Osservazione. Essendo Φ di tipo gruppo, esso è l'esponenziale di una serie *di Lie* (9.1.4); ora, deduciamo da 8.2.7 che ogni elemento di $\hat{\mathcal{P}}_3$ si scrive in modo unico come $\alpha T + \Sigma$ ove $\alpha \in \mathbb{Q}$, $T = t_{13} + t_{12} + t_{23}$ è centrale e Σ é una serie in due delle variabili t_{12}, t_{23}, t_{13} (che generano un'algebra libera). La condizione (3) implica subito $\alpha = 0$, pertanto Φ è effettivamente un associatore rispetto alla definizione data in 10.3.5 come serie formale invertibile in $\mathbb{C}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ che verifica pentagono ed esagono.

Chiamiamo $\widehat{\mathbf{Ass}}(\mathbb{A}) \equiv \widehat{\mathbf{Ass}}$ l'insieme degli associatori formali $\Phi \in \hat{\mathcal{P}}_3(\mathbb{A})$.

Trascurando i gradi maggiori di m, possiamo definire anche l'insieme $\mathbf{Ass}^{(m)}$ degli *associatori fino a grado* m.

Il fatto che un associatore Φ in $\widehat{\mathbf{Ass}}$ o $\mathbf{Ass}^{(m)}$ debba verificare l'esagono comporta che

$$\Phi = 1 + \ \textit{termini di ordine superiore.}$$

Diciamo che un funtore $\hat{F} : \hat{\mathfrak{B}} \to \hat{\mathfrak{D}}$ *preserva la struttura* (e scriviamo $\hat{F} : \underline{\hat{\mathfrak{B}}} \to \underline{\hat{\mathfrak{D}}}$) se

$$\hat{F} \circ d_i^n = d_i^n \circ \hat{F}, \quad \hat{F} \circ s_i^n = s_i^n \circ \hat{F}, \quad \hat{F}(\sigma) = \tilde{R}, \quad (\hat{F} \otimes \hat{F}) \circ \square = \Delta \circ \hat{F}$$

ed il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathfrak{B}} & \xrightarrow{\hat{F}} & \hat{\mathfrak{D}} \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S} \\ \mathfrak{P} & \xrightarrow{Id} & \mathfrak{P} \end{array}$$

Proposizione 11.2.10. *Sia $\hat{F} : \underline{\hat{\mathfrak{B}}} \to \underline{\hat{\mathfrak{D}}}$ un funtore che preserva la struttura.*

(1) *$\hat{F}$ è univocamente determinato dal valore su a; più precisamente, esiste $\Phi_{\hat{F}} \in \hat{\mathcal{P}}_3$ tale che*

$$\hat{F}(a) = \Phi_{\hat{F}} \cdot a.$$

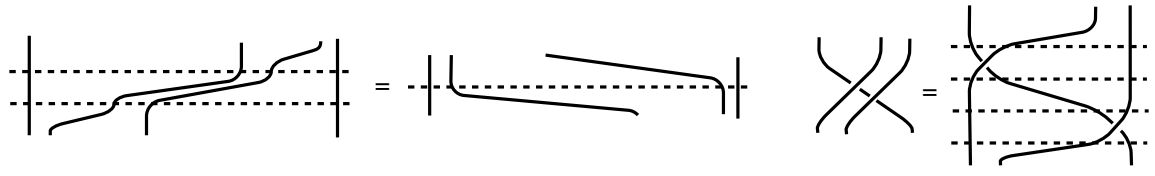
(2) *$\Phi_{\hat{F}}$ è un associatore, e l'applicazione $\hat{F} \mapsto \Phi_{\hat{F}}$ identifica in modo naturale l'insieme dei funtori $\underline{\hat{\mathfrak{B}}} \to \underline{\hat{\mathfrak{D}}}$ che preservano la struttura con $\widehat{\mathbf{Ass}}$.*

Analogamente, i funtori $\underline{\mathfrak{B}}^{(m)} \to \underline{\mathfrak{D}}^{(m)}$ che preservano la struttura possono naturalmente identificarsi a $\mathbf{Ass}^{(m)}$.

Dim. La prima affermazione segue subito dalla commutatività del precedente e dal fatto che $\hat{F}(\sigma) = \tilde{R}$.

Verifichiamo che $\Phi_{\hat{F}}$ è un'associatore: il pentagono e l'esagono si deducono applicando $\hat{F}$ alle seguenti identità tra p-trecce (cfr. 11.1.4):

$$d_4^3 a \circ d_2^3 a \circ d_0^3 a = d_1^3 a \circ d_3^3 a \qquad d_1^2 \sigma^{\pm 1} = a \circ d_0^2 \sigma^{\pm 1} \circ a^{-1} \circ d_3^2 \sigma^{\pm 1} \circ a$$



(per la seconda relazione abbiamo disegnato il caso di σ). Per il pentagono, ad esempio, si ha

$$(d_4^3\Phi \circ d_2^3\Phi \circ d_0^3\Phi)\cdot(d_4^3 a \circ d_2^3 a \circ d_0^3 a) = (d_1^3\Phi \circ d_3^3\Phi)\cdot(d_1^3 a \circ d_3^3 a)$$

e la componente in $\mathcal{P}_4$ di questa uguaglianza è l'identità voluta. Per gli esagoni si procede analogamente.

Poichè $s_1^2 a = s_1^2 a = s_1^2 a$ è l'identità in $Mor(\ (\uparrow\uparrow) \to (\uparrow\uparrow)\ )$, applicando $\hat{F}$ si ottiene che Φ è non degenere; è inoltre di tipo gruppo perchè $\hat{F}$ preserva il coprodotto.

Dobbiamo ora costruire l'applicazione inversa di $\hat{F} \mapsto \Phi_{\hat{F}}$; dato un associatore Φ, poniamo

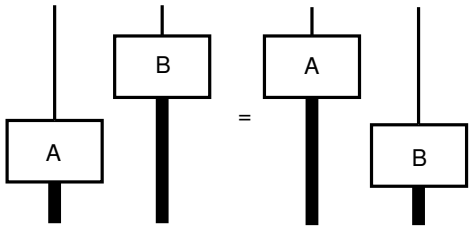
$$\hat{G}(a) = \Phi \cdot a, \qquad \hat{G}(\sigma) = \tilde{R}.$$

In virtù di 11.2.4 $\hat{G}$ è un ben definito funtore $\mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ se è compatibile con le relazioni; si prova che tali relazioni sono le immagini tramite d_i^n delle seguenti identità (le stringhe più marcate indicano un insieme qualsiasi di stringhe):

(1) $d_4^3 a \circ d_2^3 a \circ d_0^3 a = d_1^3 a \circ d_3^3 a$

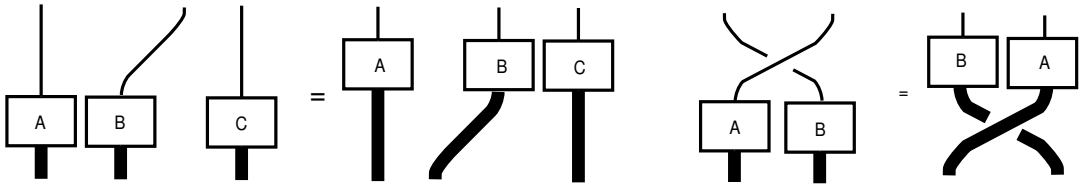
(2) $d_1^2 \sigma^{\pm 1} = a \circ d_0^2 \sigma^{\pm 1} \circ a^{-1} \circ d_3^2 \sigma^{\pm 1} \circ a$

(3)



ove A, B possono essere $a^{\pm 1}$, $\sigma^{\pm 1}$.

(4)



ove A, B, C possono essere $a^{\pm 1}$, $\sigma^{\pm 1}$.

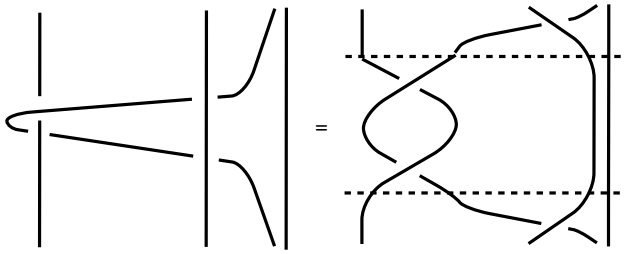
Chiaramente $\hat{G}$ rispetta (1), (2) perchè l'associatore Φ verifica il pentagono e gli esagoni; la compatibilità con (3) segue dal fatto che t_{ij}, t_{hk} commutano quando tutti gli indici sono distinti mentre quella con (4) è consegenza della relazione a quattro termini in $\mathcal{P}_n$; affinchè $\hat{G}$ possa considerarsi anche come un funtore $\hat{\mathfrak{B}} \to \hat{\mathfrak{D}}$ bisogna provare che $\hat{G}(\mathfrak{J}) \subseteq \mathcal{F}_1\hat{\mathfrak{D}}$ (esercizio). Infine, $\mathcal{G}$ preserva la struttura, come segue dal fatto che Φ è non degenere e di tipo gruppo. Un analogo argomento può usarsi nel caso di $\mathbf{Ass}^{(m)}$. $\square$

Proposizione 11.2.11. *Ogni funtore $\hat{F} : \hat{\mathfrak{B}} \to \hat{\mathfrak{D}}$ (o $F^{(m)} : \mathfrak{B}^{(m)} \to \mathfrak{D}^{(m)}$) è invertibile.*

Dim. Osserviamo preliminarmente che il completamento unipotente del gruppo delle trecce pure $\widehat{\mathbb{C}[P_n]}$ (risp. $\widehat{\mathcal{P}_n}$) può identificarsi con l'anello degli endomorfismi

ϕ di un fissato oggetto $\xi \in \hat{\mathfrak{B}}$ (risp. $\xi \in \hat{\mathfrak{D}}$) tali che $S(\phi) = Id \in \mathfrak{P}$. Pertanto $\hat{F} : \hat{\mathfrak{B}} \to \hat{\mathfrak{D}}$ induce un omomorfismo di anellli compatibile con le filtrazioni $\hat{F}_n : \widehat{\mathbb{C}[P_n]} \to \widehat{\mathcal{P}_n}$. Poichè i morfismi in $\hat{\mathfrak{B}}$, $\hat{\mathfrak{D}}$ sono composizione di morfismi invertibili e di un elemento di $\widehat{\mathbb{C}[P_n]}$ (per $\hat{\mathfrak{B}}$) o di $\widehat{\mathcal{P}_n}$ (per $\hat{\mathfrak{D}}$), avremo l'asserto se dimostriamo che, per ogni n, $\hat{F}_n$ è un isomorfismo. Poichè $\hat{F}_n$ è compatibile con le filtrazioni, possiamo ulteriormente ridurci a provare la cosa a livello di graduati associati; in definitiva dobbiamo dimostrare che $F_n^m : \mathcal{G}_m\mathbb{C}[P_n] = I^m/I^{m+1} \to \mathcal{G}_m\mathcal{P}_n$ è un isomorfismo per ogni m, n (I è l'ideale di aumentazione in $\mathbb{C}[P_n]$).

Consideriamo i generatori standard σ_{ij} di P_n introdotti in 3.2; si noti che, in $\mathfrak{B}$, la p-treccia corrispondente a σ_{ij} è essenzialmente un coniugato di σ^2: ad esempio se fissiamo $\xi = (\uparrow (\uparrow (\ldots \uparrow)))$ si ha per $\sigma_{13} \in P_4$:



Poichè $\hat{F}$ preserva la struttura e $\hat{F}(\sigma^2) = \tilde{R}^2 = e^H$, si ha

$$\begin{aligned}\hat{F}(\sigma_{ij} - 1) &= \hat{F}(C^{-1} \cdot (d \ldots \sigma^2) \cdot C - 1) = \hat{F}(C)^{-1} \cdot (e^{t_{ij}} - 1) \cdot \hat{F}(C) \\ &= t_{ij} + \text{termini di ordine superiore.}\end{aligned}$$

da cui

$$\hat{F}\left((\sigma_{i_1 j_1} - 1)(\sigma_{i_2 j_2} - 1) \ldots (\sigma_{i_k j_k} - 1)\right) = t_{i_1 j_1} t_{i_2 j_2} \ldots t_{i_k j_k} + \text{termini di ord. sup.}$$

Ciò prova che F_n^m è suriettiva; per l'iniettività si osserva che, modulo I^{m+1}, i prodotti $(\sigma_{i_1 j_1} - 1)(\sigma_{i_2 j_2} - 1) \ldots (\sigma_{i_m j_m} - 1)$ generano I^m. Allora, se ben definita, l'applicazione $(\sigma_{i_1 j_1} - 1)(\sigma_{i_2 j_2} - 1) \ldots (\sigma_{i_m j_m} - 1) \mapsto t_{i_1 j_1} t_{i_2 j_2} \ldots t_{i_m j_m}$ inverte F_n^m; d'altronde in questa applicazione le relazioni delle trecce pure si trasformano esattamente nelle relazioni *infinitesimali* delle trecce pure, dunque tutto segue. □

§11.3 Esistenza e costruzione ricorsiva di un associatore razionale.

Definizione 11.3.1. *Poniamo*

$$\mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{B}}^{(m)}} = Aut\left(\underline{\mathfrak{B}}^{(m)}\right) \qquad \mathbf{G}_{\underline{\hat{\mathfrak{B}}}} = Aut\left(\underline{\hat{\mathfrak{B}}}\right)$$
$$\mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}} = Aut\left(\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}\right) \qquad \mathbf{G}_{\underline{\hat{\mathfrak{D}}}} = Aut\left(\underline{\hat{\mathfrak{D}}}\right)$$

ove Aut significa "(endo)funtori che preservano la struttura".

Osservazione. Si osservi che gli elementi di $\mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}}, \mathbf{G}_{\underline{\hat{\mathfrak{D}}}}$ fissano X e H: infatti $\tilde{R}^2 = \exp H$, dunque $\exp H$ è fissata e a sua volta H è fissata; poichè però $X = e^{-H}\tilde{R}$, anche X è fissato. Riassumiamo nel seguente teorema quanto dimostrato in 9.1 e in 11.2.

Teorema 11.3.2.

(1) *L'insieme* $\widehat{\mathbf{Ass}}$ *(risp.* $\mathbf{Ass}^{(m)}$*) si identifica naturalmente all'insieme degli isomorfismi* $\hat{\mathfrak{B}} \to \hat{\mathfrak{D}}$ *(risp.* $\mathfrak{B}^{(m)} \to \mathfrak{D}^{(m)}$*) che preservano la struttura.*

(2) $\widehat{\mathbf{Ass}}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$*; in particolare* $\mathbf{Ass}^{(m)}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$*.*

(3) *I gruppi* $\mathbf{G}_{\underline{\hat{\mathfrak{B}}}}(\mathbb{C})$, $\mathbf{G}_{\underline{\hat{\mathfrak{D}}}}(\mathbb{C})$ *agiscono rispettivamente a destra e a sinistra su* $\widehat{\mathbf{Ass}}$ *in modo semplicemente transitivo; inoltre tali azioni commutano. Un analogo risultato vale per le azioni di* $\mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{B}^{(m)}}}(\mathbb{C})$, $\mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}^{(m)}}}(\mathbb{C})$ *su* $\mathbf{Ass}^{(m)}(\mathbb{C})$*.*

Il risultato chiave di questo paragrafo è il teorema seguente, dal quale potremo dedurre in che esiste un associatore razionale costruibile ricorsivamente.

Teorema 11.3.3. *La proiezione naturale* $\mathbf{Ass}^{(m)}(\mathbb{C}) \to \mathbf{Ass}^{(m-1)}(\mathbb{C})$ *è suriettiva.*

Per provare il teorema dobbiamo prima analizzare la struttura di $\mathfrak{D}$ e dedurne una "presentazione per generatori e relazioni". Abbiamo già osservato che le immagini di a, X, H tramite gli operatori d^n_m generano $\mathfrak{D}$.

Proposizione 11.3.4. *Le relazioni tra tali generatori sono le seguenti:*

(1) $XX^{-1} = X^{-1}X = 1, \quad [X, X] = 0.$

(2) Il pentagono

$$d^3_4 a \circ d^3_2 a \circ d^3_0 a = d^3_1 a \circ d^3_3 a.$$

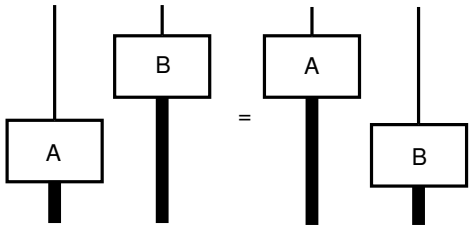
(3) L'esagono classico

$$d^2_1 X = a \circ d^2_0 X \circ a^{-1} \circ d^2_3 X \circ a.$$

(4) L'esagono semiclassico

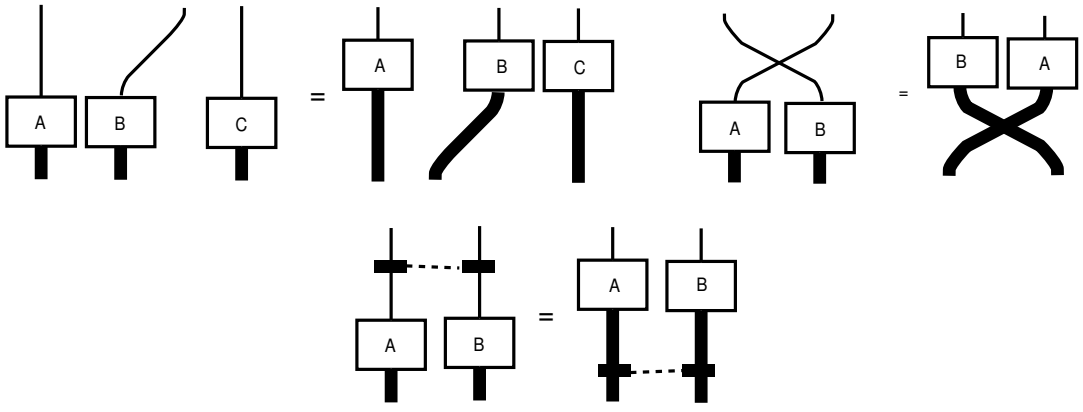
$$d^2_1 H \circ d^2_1 X = a \circ d^2_0 H \circ d^2_0 X \circ a^{-1} \circ d^2_3 X \circ a + a \circ d^2_0 X \circ a^{-1} \circ d^2_3 H \circ d^2_3 X \circ a.$$

(5)



ove A, B *possono essere* $a^{\pm 1}$, X, H.

(6)



ove A, B, C *possono essere* $a^{\pm 1}$, X, H.

Dim. Sia $\mathfrak{F}$ la categoria quoziente della categoria libera sulle immagini tramite d_m^n di $a^{\pm 1}$, X, H modulo le relazioni dell'enunciato. Poichè le relazioni dell'enunciato sono di fatto relazioni in $\mathfrak{D}$, c'è un ovvio funtore $E : \mathfrak{F} \to \mathfrak{D}$; vogliamo provare che E è un'equivalenza. Possiamo introdurre una gradazione su $\mathfrak{F}$ assegnando grado 0 ad a e X, grado 1 a H e richiedendo che i d_m^n preservino tale gradazione; chiaramente, $E : \mathfrak{F} \to \mathfrak{D}$ è compatibile con le gradazioni di $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}$. Vogliamo costruire un inverso $L : \mathfrak{D} \to \mathfrak{F}$: lo facciamo definendolo grado per grado.

Anzitutto si osserva che l'esistenza di L in grado 0 non è altro che il teorema di coerenza di MacLane, dato che che le uniche relazioni tra i generatori di grado 0 sono il pentagono e l'esagono.

Per definire L sui morfismi di grado positivo usiamo un artificio. Fissiamo un oggetto $\xi \equiv \xi_r \in \mathfrak{P}$, ad esempio l'allineamento di $2r$ parentesi "a destra" $(\uparrow (\uparrow (\dots \uparrow)))$; sia poi $\mathfrak{D}_r$ $(\mathfrak{F}_r)$ l'algebra degli automorfismi di ξ che sollevano la identità di $\mathfrak{P}_r$ ed $E_r : \mathfrak{D}_r \to \mathfrak{F}_r$ la restrizione di E. Possiamo assumere anche che i morfismi coinvolgano al più ν stringhe: allora si ha un'identificazione

$$Mor_{\mathfrak{D}_r}(\xi, \xi) \cong \mathcal{P}_\nu.$$

Definiamo adesso l'inverso L_r di E_r sui generatori di grado 1 $t_{ij} \in \mathcal{P}_\nu$; poniamo, se $i < j$, $L_1(t_{ij}) = P_{ij}^{-1} \circ H_\nu \circ P_{ij}$, ove $H_\nu = d_0^{\nu-1} d_0^{\nu-2} \dots d_0^2 H$ aggiunge stringhe alla sinistra di H mentre P_{ij} è è composizione di associazioni (dunque morfismi di grado 0) che inducono una p-permutazione che manda le stringhe di indici i, j nelle ultime due.

Per definizione $E_r \circ L_r = Id$, mentre $L_r \circ E_r = Id$ segue osservando che un morfismo di grado 1 "contiene una sola corda", la quale tramite l'esagono semiclassico può sempre essere spostata nelle posizioni $\nu - 1, \nu$: in questo caso l'asserto è ovvio.

Ora estendiamo moltiplicativamente la definizione di L_r; osserviamo che l'algebra libera F_1 generata da $\mathcal{G}_1 \mathfrak{F}_r$ è isomorfa all'algebra libera F_2 generata da $\mathcal{G}_1 \mathcal{P}_\nu$.

$\mathfrak{F}_r$, $\mathcal{P}_\nu$ sono quozienti di F_1, F_2 ripettivamente modulo relazioni quadratiche: le (4) con $A = B = H$ e la terza delle (5) con $A = H$ o $B = H$ nel primo caso, le relazioni a quattro termini nel secondo caso. D'altronde queste relazioni si corrispondono nell'isomorfismo $F_1 \to F_2$, pertanto tale isomorfismo passa ad un isomorfismo dei quozienti $E_r : \mathfrak{F}_r \to \mathcal{P}_\nu$ con inverso L_r.

La definizione di L_r è il punto essenziale per definire L: notiamo infatti che ogni morfismo T in $\mathfrak{D}$ può decomporsi come $P_1 \circ D \circ P_2$ con $D \in \mathcal{P}_\nu \cong \mathfrak{D}_r$, P_1, P_2 morfismi di grado 0 e P_1 sollevamento dell'identità .
Pertanto, posto $L(T) = L(P_1) \circ L_r(D) \circ L(P_2)$, L inverte E. $\square$

Corollario 11.3.5. *Il gruppo* $\mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}}$ $(\mathbf{G}_{\underline{\hat{\mathfrak{D}}}})$ *può insiemisticamente identificarsi allo insieme degli elementi* $\Gamma \in \mathcal{P}_3^{(m)}$ $(\Gamma \in \hat{\mathcal{P}}_3)$ *non degeneri di tipo gruppo che verificano il pentagono, l'esagono, l'esagono semiclassico:*

$$d_4^3\Gamma \cdot d_2^3\Gamma \cdot d_0^3\Gamma = d_1^3\Gamma \cdot d_3^3\Gamma, \qquad 1 = \Gamma \cdot (\Gamma^{-1})^{132} \cdot \Gamma^{312},$$
$$d_1^2 t_{12} = \Gamma \cdot (t_{23} \cdot (\Gamma^{-1})^{132} + (\Gamma^{-1} \cdot t_{12} \cdot \Gamma) \cdot \Gamma^{132}.$$

Dim. Da 11.2.4 e dall'osservazione successiva a 11.3.1 ogni $g \in \mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}}$ è determinato dalla sua azione sul generatore a, pertanto $g(a) = \Gamma \cdot a$ per un'unico $\Gamma \in \mathcal{P}_3^{(m)}$.

La non degeneratezza e la proprietà di essere di tipo gruppo seguono dal fatto che g preserva Δ e gli operatori s_i^n. Il pentagono, l'esagono, l'esagono semiclassico seguono dalle corrispettive relazioni in $\mathfrak{D}$, mentre le ulteriori relazioni in $\mathfrak{D}$ non impongono altri vincoli su Γ. $\square$

Dim. del Teorema 11.3.3. Anzitutto osserviamo che basta provare la suriettività della proiezione naturale $\pi : \mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}}(\mathbb{C}) \to \mathbf{G}_{\underline{D}^{(m-1)}}(\mathbb{C})$. Infatti sia dato $\Phi_{m-1} \in \mathbf{Ass}^{(m-1)}$; cerchiamo $\Phi_m \in \mathbf{Ass}^{(m)}$ tale che $\Phi_m \mapsto \Phi_{m-1}$; Poichè $\mathbf{Ass}^{(m)} \neq \emptyset$, prendiamo $\Phi'_m \in \mathbf{Ass}^{(m)}$ e consideriamo la sua immagine Φ'_{m-1} in $\mathbf{Ass}^{(m-1)}$; poiche' $\mathbf{G}_{\underline{D}^{(m-1)}}$ in grado $m-1$ agisce transitivamente sugli associatori, esiste $g_{m-1} \in \mathbf{G}_{\underline{D}^{(m-1)}}$ tale che $g_{m-1}\Phi'_{m-1} = \Phi_{m-1}$. Poichè stiamo assumendo la suriettività di π , esiste $g_m \in \mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}}$ che solleva g_{m-1}: allora $g_m\Phi'_m \mapsto \Phi_{m-1}$.

Osserviamo ora che in virtù del corollario precedente possiamo riguardare $\mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}}$ come uno schema affine in gruppo (i.e. un funtore dalla categoria delle $\mathbb{Q}$-algebre alla categoria dei gruppi, $\mathbb{A} \mapsto \mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}}(\mathbb{A})$.) In effetti, per ogni $\mathbb{A}$, $\mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}}(\mathbb{A})$ è un gruppo lineare unipotente: la linearizzabilità segue dal fatto che esso ammette una rappresentazione fedele nello spazio vettoriale dei p-diagrammi di corde che sollevano a; l'unipotenza può dedursi dalle relazioni

$$g(X) = X, \quad g(H) = H, \quad g(a) = a + \text{termini di grado più alto}$$

($g \in \mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}}(\mathbb{A})$). Da risultati generali sugli schemi affini su campi di caratteristica 0 si deduce che $\mathbf{G}_{\underline{\mathfrak{D}}^{(m)}}$ è ridotto e connesso; in particolare la suriettività di π può provarsi a livello di algebre di Lie. Scriviamo pertanto $\Gamma = 1 + h\gamma$; sostituendo nel pentagono e nell'esagono e confrontando i coefficienti di h si ha

$$d_4^3\gamma + d_2^3\gamma + d_0^3\gamma = d_1^3\gamma + d_3^3\gamma, \qquad 0 = \gamma - \gamma^{132} + \gamma^{312}$$

Ogni soluzione fino a grado $m-1$ può essere estesa a grado m (ad esempio ponendo uguale a 0 la parte in grado m). Resta da considerare l'esagono semiclassico, per la quale relazione non è possibile usare agevolmente un argomento diretto; ciò nonostante, come proveremo nella prossima proposizione, se $\Gamma \in \mathcal{P}_3^{(m)}$ verifica esagono e pentagono allora esso soddisfa automaticamente l'esagono semiclassico, dunque la suriettività di π è provata. $\square$

Per completare la dimostrazione del teorema 11.3.3 dobbiamo provare l'asserzione assunta nel paragrafo precedente. Quest'ultimo passo si effettua con metodi coomologici; dobbiamo pertanto premettere alcuni richiami.

Ci sono essenzialmente due modi di rendere la famiglia di algebre $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un complesso $\mathcal{P}_\bullet$: possiamo infatti definire un differenziale $d^n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}$ ponendo $d^n = \sum_{i=0}^{n+1} d_i^n$, ove gli operatori d_i^n sono quelli introdotti in 11.2.5.

Un'altro possibile differenziale è $\tilde{d}^n : \mathcal{P}_{n+1} \to \mathcal{P}_{n+2}$

$$\tilde{d}^n = \sum_{i=0}^{n+1} d_i^n, \qquad \tilde{d}_i^n = \begin{cases} \tilde{d}_i^n & i \leq n \\ (d_{n+2}^{n+1})^{12\ldots n(n+2)(n+1)} & i = n+1 \end{cases}$$

In altri termini, $\tilde{d}_{n+1}^n$ aggiunge una stringa priva di vertici di corda tra le stringhe $n, n+1$. Ricordiamo ora da 8.2.6 che, come spazi vettoriali, $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \otimes T(V^n)$,

ove $T(V^n)$ denota l'algebra tensoriale sullo spazio vettoriale V^n dei diagrammi le cui corde hanno un vertice sulla $n+1$-esima stringa (dunque $V^n = \oplus_{i=1}^n \mathbb{Q} t_{i\,n+1}$); poichè questa decomposizione è rispettata dagli operatori $\tilde{d}^n$, la formula di Kunneth dà

$$H_{\tilde{d}}^\bullet = H_d^\bullet \otimes T\left(H^\bullet(V^\bullet)\right).$$

Lemma 11.3.6. *[BN3]*

(1) $H_d^0 = \mathbb{Q}\,\mathbf{1}_{\mathcal{P}_0}$, $\quad H_d^1 = 0$, $\quad H_d^2 = \mathbb{Q}\,t_{12}$; *($\mathbf{1}_{\mathcal{P}_0}$ è il diagramma privo di corde).*
(2) $H^1(V^\bullet) = \mathbb{Q}\,t_{12}$, $\qquad H^i(V^\bullet) = 0\ \forall\, i \neq 1$.
(3) $H_{\tilde{d}}^2 = \mathbb{Q}\,t_{12} \oplus \mathbb{Q}\,[t_{13}, t_{23}]$.

Proposizione 11.3.7. *Il pentagono e l'esagono per $\Gamma \in \mathcal{P}_3^{(m)}$ implicano l'esagono semiclassico.*

Dim. Supponiamo che $\Gamma \in \mathcal{P}_3^{(m)}$ verifichi pentagono ed esagono:

$$(P) \qquad d_4^3\Gamma \cdot d_2^3\Gamma \cdot d_0^3\Gamma \cdot (d_3^3\Gamma)^{-1} \cdot (d_1^3\Gamma)^{-1} = 1$$

$$(E) \qquad \Gamma \cdot (\Gamma^{-1})^{132} \cdot \Gamma^{312} = 1$$

ma non l'esagono semiclassico (S)

$$(S) \qquad d_1^2 t_{12} = \Gamma \cdot (t_{23} \cdot (\Gamma^{-1})^{132} + (\Gamma^{-1} \cdot t_{12} \cdot \Gamma) \cdot \Gamma^{132}$$

Poichè lavoreremo a grado fissato, conviene fare i calcoli nell'algebra $\mathbb{A}_\epsilon$ dei numeri duali dell'algebra dei coefficienti $\mathbb{A}$, ovvero $\mathbb{A}[\epsilon]/(\epsilon^2)$; l'esagono e l'esagono semiclassico sono equivalenti alla

$$(E_\epsilon) \qquad \Gamma \cdot e^{\epsilon t_{23}} \cdot \left(\Gamma^{-1}\right)^{132} \cdot e^{\epsilon t_{13}} \cdot \Gamma^{312} e^{-\epsilon(t_{13}+t_{23})} = 1$$

Se Γ non verifica l'esagono semiclassico, la precedente relazione sarà verificata a meno di un certo *errore* ψ', che è proporzionale a ϵ, visto che l'esagono vale:

$$1 + \epsilon\psi' = \Gamma \cdot e^{\epsilon t_{23}} \cdot (\Gamma^{-1})^{132} \cdot e^{\epsilon t_{13}} \cdot \Gamma^{312} \cdot e^{-\epsilon(t_{13}+t_{12})}.$$

Poichè per ipotesi $\psi' \neq 0$, possiamo allora considerare la parte ψ di grado minimo - diciamo k - in ψ' e lavorare ignorando i termini di grado maggiore di k; osserviamo che necessariamente $k \geq 2$.

Il passo cruciale della dimostrazione consiste nel provare che

$$(*) \qquad \tilde{d}^2\psi = 0.$$

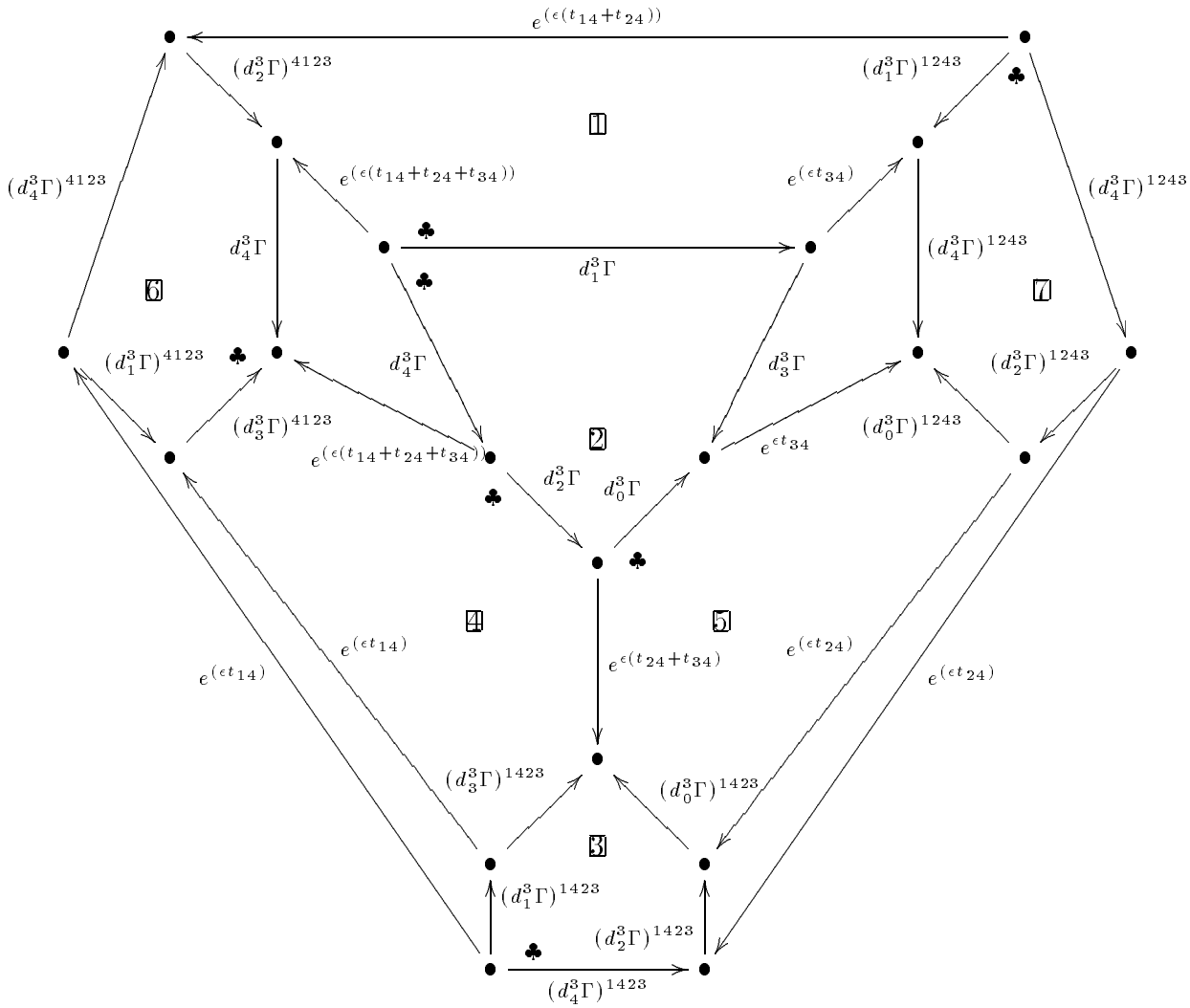
A tale scopo consideriamo la cellularizzazione del piano proiettivo reale descritta nella figura seguente. Al poligono numerato con i in figura ($i = 1, \ldots, 12$) associamo l'elemento $\mathcal{E}_i \in \mathcal{P}_4$ ottenuto facendo il prodotto delle etichette dei lati sulla faccia (calcolato giustapponendo le etichette in senso antiorario a partire dal vertice ♣); se la freccia ha verso contrario a quello indotto dal verso di rotazione, l'etichetta si intende elevata a -1). Gli elementi relativi alle facce esagonali e pentagonali

sono esattamente le seguenti (8 denota la faccia all'infinito: per tale faccia il vertice ♣ "in alto a destra").

$$\mathcal{E}_1 = d_1^3 E_\epsilon \qquad \mathcal{E}_2 = P \qquad \mathcal{E}_3 = P^{1423} \qquad \mathcal{E}_8 = (d_4^3 E_\epsilon)^{1243} = \tilde{d}_3^2 E_\epsilon$$
$$\mathcal{E}_4 = (d_2^3 P_\epsilon)^{-1} \qquad \mathcal{E}_5 = (d_0^3 P_\epsilon)^{-1} \qquad \mathcal{E}_6 = (P^{4123})^{-1} \qquad \mathcal{E}_7 = (P^{1243})^{-1}.$$

ove $P, E_\epsilon \ldots$ denotano i primi membri delle relatiove relazioni $(P), (E_\epsilon)$.

Per le facce quadrangolari 9-12, la cui numerazione non è riportata in figura, si ha $\mathcal{E}_i = 1,\ i = 9, 10, 11, 12$ in virtù delle relazioni 11.3.4 (5-6).



D'altra parte, quando consideriamo i prodotti delle etichette di due facce aventi un lato in comune, dato che questo viene percorso in versi opposti nei due poligoni, l'etichetta che otteniamo è il *prodotto* delle etichette relative ai due poligoni: e.g.

$$\mathcal{E}_{1\ \cup\ 2} = (d_1^3 E_\epsilon) \cdot P.$$

Tenendo conto che ignoriamo i gradi superiori a k, si vede facilmente che il prodotto relativo all'intera figura è $1 - d_0^3\psi + d_1^3\psi - d_2^3\psi$, che però è anche $(\tilde{d}_3^2 E_\epsilon)^{-1}$, pertanto $1 - d_0^3\psi + d_1^3\psi - d_2^3\psi = 1 - \tilde{d}_3^2\psi$, che è esattamente $(*)$.

Ora, per il lemma precedente $k > 2$ implica $\psi \in \tilde{d}^1 \mathcal{G}_k \mathcal{P}_2$, da cui $\psi = cost.\, \tilde{d}^1(t_{12}^k)$; se così fosse però , dal momento che Γ è di tipo gruppo, ψ dovrebbe essere primitivo. Si verifica direttamente che ciò non accade, dunque $\psi = 0$.

Se invece $k = 2$ ancora dal lemma deduciamo che esistono costanti α, β tali che

$$\psi = \alpha \tilde{d}^1(t_{12}^2) + \beta[t_{13}, t_{23}].$$

Ora si ragiona così : la moltiplicazione a sinistra per $d_3^2 X$ e a destra per $d_0^2 X$ lascia invariato l'esagono semiclassico (modulo le altre relazioni): corrispondentemente vale la relazione $\psi^{231} = \psi$, che confrontata con la precedente comporta $\beta = 0$; allora si può usare la primitività di ψ per concludere $\alpha = 0$ e a sua volta $\psi = 0$ anche in questo caso. □

Teorema 11.3.8. *Esistono associatori razionali; essi possono essere costruiti induttivamente.*

Dim. Procediamo per induzione sul grado m; supponiamo allora che esista $\Phi_{m-1} \in \mathbf{Ass}^{(m-1)}(\mathbb{Q})$ e sia costruibile induttivamente. Per il teorema 11.3.3 esiste $\Phi_m \in \mathbf{Ass}^{(m)}(\mathbb{C})$ che solleva Φ_{m-1}; d'altronde, se scriviamo $\Phi_m = \Phi_{m-1} + \varphi_m$, le condizioni su φ_m imposte dagli assiomi di associatore per Φ_m si esprimono tramite sistemi lineari che coinvolgono soltanto i coefficienti di Φ_{m-1}, pertanto sono risolubili su $\mathbb{Q}$. □

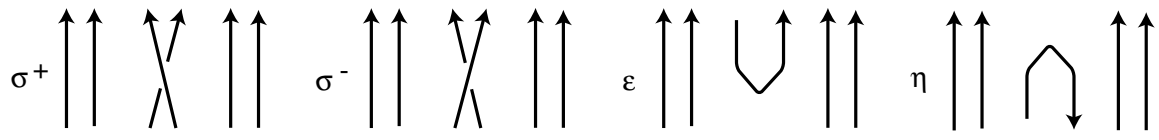
§11.4 Associatori, invarianti di tangles e integrale di Kontsevich.

Precisiamo le idee introdotte alla fine di 10.4; considereremo diagrammi di tangle, ovvero proiezioni di tangles in posizione generale su un piano con coordinate (x, t) dotate di una specifica sopra-sotto agli incroci. Riguarderemo i diagrammi a meno dell'equivalenza generata da isotopie di $\mathbb{R}^2$ che preservano le rette orizzontali $t =$ cost., riscalamenti e traslazioni parallele all'asse t. Osserviamo che ogni diagramma di tangle D individua un'unico framed tangle $T(D)$, precisamente quello che si proietta su D, coincide con D fuori da un intorno degli incroci e ammette $(0, -1, 0)$ come vettore normale in ogni punto. È anche chiaro che ogni framed tangle T è del tipo $T(D)$ per qualche diagramma D.

Introduciamo ora la struttura non associativa; conviene organizzare le definizioni in termini categoriali.

Definizione 11.4.1. *La categoria $\mathfrak{T}$ dei diagrammi di tangles non associativi è quella i cui oggetti sono le parole non associative nell'alfabeto $\{+, -\}$; un morfismo $D : w_1 \to w_2$ è un diagramma di tangle D con la proprietà che, trascurando la struttura non associativa, $s(D) = w_1$, $b(D) = w_2$ (cfr. 10.3.1). In modo simile si introduce la categoria $\hat{\mathfrak{T}}$ di diagrammi di framed tangles.*

Come ripetutamente visto in precedenti esempi, la giustapposizione di diagrammi induce in $\mathfrak{T}$ e $\hat{\mathfrak{T}}$ naturali strutture di categoria monoidale; non è poi difficile provare che ogni morfismo è composizione dei seguenti morfismi elementari:



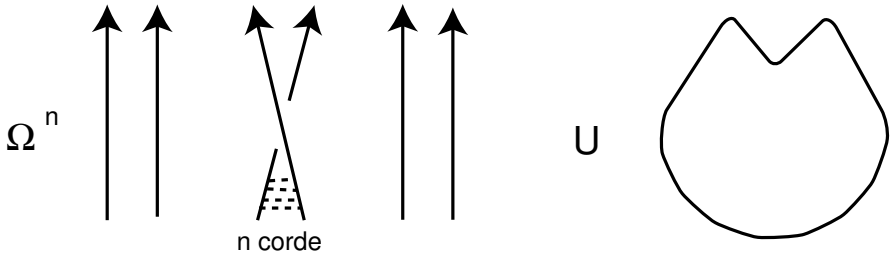
(1) $\sigma^{\pm}_{w,v} : w \to w$, ove w è una parola non associativa nel simbolo $+$ e $v = ++$ è una sottoparola di w.
(2) $\varepsilon_{w,v} : w_v \to w$, ove $v = -+$ è una sottoparola di w, e w_v, la parola non associativa ottenuta da w cancellando v, è una parola nel simbolo $+$.
(3) $\eta_{w,v} : w \to w_v$, ove $v = +-$ è una sottoparola di w, e w_vè una parola nel simbolo $+$.
(4) $T^{+}_{w_1w_2w_3,w} : w = \ldots((w_1w_2)w_3)\ldots \to w' := \ldots(w_1(w_2w_3))\ldots$; il tangle relativo è l'identità .
(5) $T^{-}_{w_1w_2w_3,w} : w' := \ldots(w_1(w_2w_3))\ldots \to w = \ldots((w_1w_2)w_3)\ldots$; il tangle relativo è l'identità .
(6) Tutti i diagrammi in (1)-(5) con orientazioni scambiate in tutti i possibili modi.

Dato ora un diagramma di tangle D, vogliamo costruire un "invariante" $D \mapsto Z_f(D) \in \hat{\mathcal{A}}(T(D))$, ove $\hat{\mathcal{A}}(T(D))$ è il completamento dell'algebra dei diagrammi di corde sulla 1-varietà $T(D)$ modulo relazioni a quattro termini (vedi la discussione che segue 10.3.2). Osserviamo poi che se X, X' sono due 1-varietà compatte e le uniche componenti di X sono cerchi, la scelta di una componente su X e una componente su X' permette di effettuare la somma connessa di diagrammi di corde lungo le componenti fissate esattamente come spiegato in 7.3.8 nel caso di $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S^1)$.

Denotiamo con $\mathbf{P}_n = \mathcal{A}(n \uparrow)$ l'algebra dei diagrammi di corde (non necessariamente orizzontali) sul tangle costituito da n stringhe verticali. Possiamo introdurre gli operatori $d^n_i : \mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_{n+1}$, $s^n_j : \mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_{n-1}$ come nella discussione che segue 11.2.5; in particolare, se $\Delta \equiv d^1_1 : \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_2$ osserviamo che $(1 \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes 1)\Delta$; poniamo poi

$$\Delta^n = \underbrace{(\Delta \otimes id \otimes \ldots \otimes id)}_{n \text{ volte}} \ldots (\Delta \otimes id)\Delta : \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_{n+1}.$$

Possiamo ora definire $Z_f : \mathfrak{T} \to \hat{\mathbf{P}}_n$ assegnado il valore sui morfismi elementari. Siano $\Omega^n, n \in \mathbb{N}$, U i diagrammi disegnati in figura



Poniamo

$$Z_f(\sigma^{\pm}_{w,v}) = \exp(\pm\frac{\Omega}{2}), \qquad Z_f(\varepsilon_{w,v}) = Z_f(\eta_{w,v}) = 1$$

$$Z_f(T^{+}_{w_1w_2w_3,w}) = 1^{\otimes s} \otimes \left[\left(\Delta^{\ell(w_1)-1} \otimes \Delta^{\ell(w_2)-1} \otimes \Delta^{\ell(w_3)-1}\right)\Phi_{KZ}\right] \otimes 1^{\otimes d}$$

$$Z_f(T^{+}_{w_1w_2w_3,w}) = 1^{\otimes s} \otimes \left[\left(\Delta^{\ell(w_1)-1} \otimes \Delta^{\ell(w_2)-1} \otimes \Delta^{\ell(w_3)-1}\right)\Phi^{-1}_{KZ}\right] \otimes 1^{\otimes d}$$

ove, per $D \in \mathbf{P}_n$, $1^{\otimes s} \otimes D \otimes 1^{\otimes d} \in \mathbf{P}_{n+s+d}$ è il diagramma che non ha corde ne' sulle prime s stringhe ne' sulle ultime d e coincide con D sulle stringhe centrali.

Le ultime due definizioni non sono altro che l'ovvia estensione ai q-tangles della già discussa relazione $Z(a) = \Phi_{KZ}$ (a è il q-tangle disegnato in 11.2.3).

Teorema 11.4.2. *Sia $D \in \mathfrak{T}$.*

1. *L'applicazione $D \mapsto Z_f(D)$ è ben definita, nel senso che non dipende dalla decomposizione di D in diagrammi elementari.*

2. *Sia $\phi = Z_f(U)$, ed s_i la metà del numero di punti critici sulla i-esima componente di T; poniamo $\hat{Z}_f(D) = (\phi^{-s_1} \otimes \ldots \otimes \phi^{-s_k}).Z_f(D)$, ove il secondo membro è ottenuto facendo la somma connessa lungo la i-esima componente di ϕ^{-s_i} e $Z_f(D)$ per $i = 1, \ldots, k$. Allora $\hat{Z}_f(D)$ è un invariante di framed tangle (i.e., $T(D_1) = T(D_2) \implies \hat{Z}_f(D_1) = \hat{Z}_f(D_2)$); di più , $\hat{Z}_f(D)$ è un invariante universale .*

Per la dimostrazione del teorema rimandiamo ad [AC]: sostanzialmente basta provare che $\hat{Z}_f(D)$ non cambia per opportune mosse locali che generano le "relazioni" in $\hat{\mathfrak{T}}$. Inoltre si prova, come in 8.4.3 che se T' è un diagramma contenente una gobba, e T è il diagramma in cui tale gobba è stata rimossa, allora $\hat{Z}_f(D') = \phi.Z_f(D)$. La dimostrazione dell'universalità è standard.
Si noti che $\hat{Z}_f(\curvearrowright) = \hat{Z}_f(\curvearrowleft) = \ldots = \phi^{-\frac{1}{2}}$, in accordo con [BN2].

La relazione tra $\hat{Z}_f$ e l'integrale di Kontsevich è espressa dal seguente

Teorema 11.4.3. *[LM] Se $p : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^c$ è la proiezione canonica e $\tilde{Z}$ è l'integrale di Kontsevich, per un nodo con framing K vale la relazione*

$$p(\hat{Z}_f(K)) = \tilde{Z}(K).$$

Vogliamo adesso dedurre la razionalità dell'integrale di Kontsevich. Seguendo [LM], introduciamo la seguente

Definizione 11.4.4. *Un elemento $F \in \mathbf{P}_2(\mathbb{C})$ si dice un twist simmetrico se*

(1) $s_1^2(F) = s_2^2(F) = 1$.
(2) $F = F^{21}$.

I twist simmetrici i sono automaticamente invertibili; pertanto, dato un associatore formale Φ, poniamo, in analogia a quanto fatto nel paragrafo precedente,

$$(*) \qquad \Phi^F = (1 \otimes F)\left((id \otimes \Delta)F\right)\left((\Delta \otimes id)F^{-1}\right)(F^{-1} \otimes 1);$$

una verica diretta mostra che Φ^F è ancora un associatore. I twists simmetrici agiscono dunque sugli associatori; Le e Murakami provano, imitando la dimostrazione di Drinfeld nel caso delle quasi-Hopf algebre, che

Teorema 11.4.5. *([LM] Thm. 8) L'azione dei twists sugli associatori data dalla $(*)$ è transitiva.*

Sia ora F un twist simmetrico; definiamo induttivamente $\mathcal{F} \in \mathbf{P}_{\ell(w)}$ come segue:

$$\mathcal{F}_\emptyset = 1 \qquad \mathcal{F}_+ = \mathbf{1} \quad \mathcal{F}_{++} = F;$$

ove $\mathbf{1} = \uparrow \in \mathbf{P}_1$; se $w = w_1 w_2$

$$\mathcal{F}_w = \left(\mathcal{F}_{w_1} \otimes \mathbf{1}^{\otimes \ell(w_2)}\right)\left(\mathbf{1}^{\otimes \ell(w_1)} \otimes \mathcal{F}_{w_2}\right)\left((\Delta^{\ell(w_1)-1} \otimes \Delta^{\ell(w_2)-1})F\right)$$

Possiamo riformulare la $(*)$ come

$$\Phi^F = \mathcal{F}_{(+(++))}\Phi\left(\mathcal{F}_{(+(++))}\right)^{-1}.$$

Per $i = 1, \ldots, r$ sia $S_i : \mathbf{P}_r \to \mathbf{P}_r$ l'operatore che inverte l'orientazione della i-esima stringa. Poniamo

$$Z_f^F(\sigma^{\pm}_{w,v}) = Z_f(\sigma^{\pm}_{w,v})$$

$$Z_f^F(T^+_{w_1 w_2 w_3, w}) = 1^{\otimes s} \otimes \left[\left(\Delta^{\ell(w_1)-1} \otimes \Delta^{\ell(w_2)-1} \otimes \Delta^{\ell(w_3)-1}\right)\Phi^F\right] \otimes 1^{\otimes d}$$

$$Z_f^F(T^+_{w_1 w_2 w_3, w}) = 1^{\otimes s} \otimes \left[\left(\Delta^{\ell(w_1)-1} \otimes \Delta^{\ell(w_2)-1} \otimes \Delta^{\ell(w_3)-1}\right)(\Phi^F)^{-1}\right] \otimes 1^{\otimes d}$$

$$Z_f^F(\varepsilon_{w,v}) = (\mathbf{1}^m \otimes S_2(F) \otimes \mathbf{1}^n) \otimes Z_f(\varepsilon_{w,v})$$

$$Z_f^F(\eta_{w,v}) = Z_f(\eta_{w,v}) \otimes (\mathbf{1}^m \otimes S_1(F^{-1}) \otimes \mathbf{1}^n)$$

Teorema 11.4.6. *Z_f^F è ben definito e per ogni diagramma di tangle non associativo $T : w_1 \to w_2$ si ha:*

$$Z_f^F(T) = \mathcal{F}_{w_1} Z_f(T) \left(\mathcal{F}_{w_2}\right)^{-1}.$$

In particolare se L è un diagramma di link, risultando $w_1 = w_2 = \emptyset$, si ha $Z_f^F(L) = Z_f(L)$, dunque l'invariante $\hat{Z}_f$ non dipende dall'associatore.

Poichè abbiamo provato l'esistenza di un associatore a coefficienti razionali, la transitività dell'azione dei twists simmetrici sugli associatori, 11.3.4 e il teorema precedente implicano il risultato che avevamo anticipato in 10.3.6.

Corollario. *Se K è un nodo, $\tilde{Z}(K) \in \hat{\mathcal{A}}_{\mathbb{Q}}$.*

11.4.7 Per concludere, vogliamo riassumere in un quadro sinottico le costruzioni dell'integrale di Kontseich e degli associati invarianti descritte nella seconda parte di queste note.

Costruzione analitica (Kontsevich)

Dato un nodo orientato K, si pone (cfr. 8.1.4 per la notazione)

$$Z(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{H \in \mathcal{H}_m} [D_H] \int_H \omega_H \in \hat{\mathcal{A}}^c$$

Allora, se c è il numero di punti critici di K

$$\tilde{Z}(K) = Z(K) Z(\infty)^{-\frac{c}{2}} \in \hat{\mathcal{A}}^c$$

è un invariante di K.

Costruzione combinatoria (De Concini-Procesi, Piunikhin)

Sia M_n il monomio associativo in $2n$ variabili definito induttivamente da $M_1 = (x_1 y_1)$, $M_n = M_{n-1|x_{n-1}\to(x_{n-1}(x_n y_n))}$ e sia ρ il fattore di monodromia della rappresentazione di monodromia associata a M_n; allora se un nodo orientato K è chiusura di una treccia $b \in B_n$, si ha

$$\mathcal{T}_\sigma(\sigma^{-1}\rho(\tilde{b})) = Z(K) \in \hat{\mathcal{A}}^c.$$

($\tilde{b}$ è l'estensione di b a una treccia su $2n$ fili - banale sugli ultimi n -, σ è l'n-ciclo immagine di b nella proiezione canonica $B_n \to S_n$, $\mathcal{T}_\sigma$ è l'applicazione descritta in 9.5.2).

Costruzione categoriale (Cartier)

Si dà una costruzione generale del tipo seguente:

$\boxed{\mathcal{C} \quad \text{categoria simmetrica con intrecciamento infinitesimale (+ dualità)}}$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\tilde{\mathcal{C}_h} \quad \text{categoria tensoriale intrecciata (+ twist)}}$

Applicando tale costruzione al caso $\mathcal{C} = \mathcal{D} =$ categoria dei diagrammi di tangle modulo relazioni a quattro termini si ottiene, per l'universalità della categoria dei frames tangles $\mathcal{R}$ fra le categorie tensoriali intecciate con twist, un funtore

$$F_+ : \mathcal{R} \to \tilde{\mathcal{D}}_h.$$

Tenendo conto che $End_{\mathcal{R}}(\emptyset)$ è l'insieme delle classi di isotopia di framed links, si ottiene un invariante la cui restrizione ai nodi con framing ha valori in $\hat{\mathcal{A}}$; nel caso dei tangles (con framing 0) $\mathcal{T}$ il funtore discende a un funtore $F'_+ : \mathcal{T} \to \tilde{\mathcal{D}'}_h$, $\mathcal{D}'$ essendo la categoria dei tangles modulo relazioni a quattro termini e corda isolata; ristretto ai nodi, F'_+ è l'invariante di Kontsevich (a valori in $\hat{\mathcal{A}}^c$) (quest'ultima asserzione segue da [LM]).

Costruzione combinatoria (Le-Murakami, Bar-Natan)

Sia $\mathfrak{T}$ la categoria dei diagrammi di q-tangles (11.4.1); sia poi $\mathbf{P}_n = \mathcal{A}(n \uparrow)$ l'algebra dei diagrammi di corde su n frecce verticali modulo relazioni a quattro termini. Scelto un associatore, assegnando il valore sui generatori di $\mathfrak{T}$ si costruisce, dato un diagramma D di un framed q-tangle T

$$Z_f(D) \in \hat{\mathbf{P}}_n.$$

$Z_f(D)$ è ben definito (cioè indipendente dal diagramma D che presenta T), e

$$\hat{Z}_f(D) = (\phi^{-\frac{s_1}{2}} \otimes \ldots \otimes \phi^{-\frac{s_k}{2}}).Z_f(D) \in \hat{\mathbf{P}}_n$$

(s_i è il numero di punti critici sulla i-esima componente di T) è un invariante di framed tangles; dalla costruzione è chiaro che $\hat{Z}_f$ è razionale se l'associatore di

partenza è razionale; inoltre, se $p : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^c$ denota la proiezione canonica, per un nodo con framing K vale la relazione

$$p(\hat{Z}_f(K)) = \tilde{Z}(K).$$

Dato un twist F (11.4.4), si costruisce un corrispondente Z_f^F, ben definito sui framed q-tangles e coincidente con Z_f sulla classe dei framed links; in particolare $\tilde{Z}_f$ e quindi, nel caso dei nodi, $\tilde{Z} = p \circ \hat{Z}_f$ non dipendono dalla scelta dell'associatore; dalla transitività dell'azione dei twists sugli associatori [LM] e dall'esistenza di un associatore razionale si deduce la razionalità dell'invariante di Kontsevich.

APPENDICE : RAPPRESENTAZIONI NOTEVOLI DEL GRUPPO DELLE TRECCE

Vogliamo costruire una classe notevole di rappresentazioni lineari del gruppo delle trecce B_n, tra cui le rappresentazioni di Burau e di Gassner, usando i teoremi di struttura descritti nel paragrafo §3 ed il calcolo differenziale di Fox.

Stabiliamo anzitutto un lemma tecnico (la cui elementare dimostrazione è lasciata al lettore) che esplicita la regola di derivazione di funzioni composte rispetto alla derivata di Fox.

Lemma A.1. *Siano $w, v_1, \dots, v_n$ parole nel gruppo libero $F_n \equiv F(x_1, \dots, x_n)$. Allora*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} w(v_1(x_1, \dots, x_n), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n)) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial w(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} \right)_{|_{x_k = v_k(x_1, \dots, x_n)}} \cdot \frac{\partial v_k(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right].$$

Introduciamo una relazione di equivalenza $\sim$ in S_n dicendo che $\alpha \sim \beta$ se la loro decomposizione in cicli disgiunti (in cui convenzionalmente consideriamo anche gli 1-cicli) induce la stessa partizione di $\{1, \dots, n\}$ (e.g. $(1234)(567)$, $(3142)(657)$). Diciamo invece che α ricopre β se la partizione indotta dalla decomposizione in cicli disgiunti di β è un raffinamento della partizione associata ad α; ad esempio $(123)(45)$ ricopre $(1)(23)(4)(5)$. La relazione appena introdotta è evidentemente un ordinamento parziale in $S_n/\sim$, rispetto al quale la classe degli n-cicli è un massimo e quella dell'identità il minimo.

Dato $\alpha \in S_n$, sia $(i_1 \dots i_{m_1})(i_{m_1+1} \dots i_{m_2}) \dots (i_{m_{l-1}+1} \dots i_{m_l})$ la sua decomposizione in cicli disgiunti (assumiamo che ogni i_{m_j+1} sia il minimo numero del suo ciclo e che inoltre $i_{m_{j-1}+1} < i_{m_j+1} \, \forall j$; per definizione $i_{m_0+1} \equiv i_1$). Definiamo un'applicazione $\pi_\alpha : \mathbb{Z}[F_n] \to \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_l^{\pm 1}]$ ponendo

$$\pi_\alpha(x_j) = t_k \text{ se } j \in (i_{m_{k-1}} \dots i_{m_k}).$$

Ricordiamo ora che il gruppo delle trecce si immerge nel gruppo degli automorfismi del gruppo libero (cfr. §3.3; scriviamo l'azione di B_n a destra).

Definizione A.2. *Sia $b \in B_n$ tale che $b \mapsto \beta$ nella proiezione canonica $B_n \to S_n$. Sia $\alpha \in S_n$ tale che α ricopre β; definiamo $\mathfrak{b}_\alpha : B_n \to GL(n, \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_l^{\pm 1}])$ ponendo*

$$\mathfrak{b}_\alpha(b) = \left(\pi_\alpha\left(\frac{\partial x_j . b}{\partial x_i} \right) \right)_{i,j=1}^{n}.$$

Proposizione A.3. *Siano $b_1, b_2 \in B_n$ e $\beta_1, \beta_2 \in S_n$ le corrispondenti permutazioni. Supponiamo che $\alpha \in S_n$ ricopra $\beta_1, \beta_2, \beta_1\beta_2$; allora:*

$$\mathfrak{b}_\alpha(b_1 b_2) = \mathfrak{b}_\alpha(b_1)\mathfrak{b}_\alpha(b_2).$$

Dim. Si ha, calcolando direttamente

$$\mathfrak{b}_\alpha(b_1b_2) = \left(\pi_\alpha(\frac{\partial x_j.(b_1b_2)}{\partial x_i})\right) = \left(\pi_\alpha(\frac{\partial x_j.b_1.b_2}{\partial x_i})\right).$$

Pertanto se $x_j.b_1 = w_j(x_1,\dots,x_n)$, $x_j.b_2 = v_j(x_1,\dots,x_n)$ usando il lemma A.1 otteniamo:

$$\mathfrak{b}_\alpha(b_1b_2) = \left(\pi_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}w_j(v_1(x_1,\dots,x_n),\dots,v_n(x_1,\dots,x_n))\right)\right) =$$
$$\left(\sum_{k=1}^n \pi_\alpha\left(\left(\frac{\partial x_j.b_1}{\partial x_k}\right)_{|_{x_k=x_k.b_2}}\cdot\frac{\partial x_k.b_2}{\partial x_i}\right)\right) =$$
$$\left(\sum_{k=1}^n \pi_\alpha\left(\frac{\partial x_j.b_1}{\partial x_k}\right)\pi_\alpha\left(\frac{\partial x_k.b_2}{\partial x_i}\right)\right) = \mathfrak{b}_\alpha(b_1)\mathfrak{b}_\alpha(b_2). \quad \square$$

Esempi

(1) *La rappresentazione di Burau.*
Supponiamo che α sia un n-ciclo; allora π_α è l'abelianizzazione π e otteniamo una rappresentazione $\mathfrak{b} : B_n \to GL(n, \mathbb{Z}[t,t^{-1}])$. In particolare, per $1 \le i \le n-1$:

$$\mathfrak{b}(\sigma_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 1-t & t & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(il minore $\begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è quello estratto dalle righe e colonne $i, i+1$).

(2) *La rappresentazione di Gassner.*
Supponiamo che α sia l'identità ; allora otteniamo una rappresentazione del gruppo delle trecce pure $\tilde{\mathfrak{b}} : P_n \to GL(n, \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1},\dots,t_n^{\pm 1}])$.

Complementi

1 *Rappresentazione di Magnus di F_n.*

Vogliamo collegare la teoria precedentemente esposta con la teoria delle rappresentazioni dei gruppi liberi sviluppata da Magnus negli anni '40, la quale è stata una delle motivazioni alla base dello sviluppo del calcolo di Fox. Per i dettagli e la bibliografia relativa a quanto segue si consulti il cap. 3 di [Bir1].

Sia F_n il gruppo libero nei generatori $x_1,\dots,x_n$ e Σ_n il semigruppo abeliano libero nei generatori $z_1,\dots,z_n$. L'osservazione fondamentale di Magnus, enunciata nel linguaggio del calcolo di Fox ed evidente dalle definizioni, è la seguente.

Proposizione A.4. *L'applicazione* $\rho : F_n \to M_2(\mathbb{Z}[F_n][\Sigma_n])$,

$$\rho(w) = \begin{pmatrix} w & \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial w}{\partial x_j} z_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$w \in F_n$ *è un omomorfismo.*

Dato un omomorfismo ϕ agente su F_n la rappresentazione

$$\rho^{\phi}(w) = \begin{pmatrix} \phi(w) & \sum_{j=1}^{n} \phi(\dfrac{\partial w}{\partial x_j}) z_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è detta *ϕ-rappresentazione di Magnus di F_n.*

Teorema A.5. *[Bir, Thm. 3.7]*

(1) $Ker\, \rho^{\phi} = (Ker\, \phi)'$.

(2) *Consideriamo*

$$A = \begin{pmatrix} a & \sum_{j=1}^{n} a_j z_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \phi(F_n),\ a_j \in \mathbb{Z}[\phi(F_n)].$$

Allora

$$A \in Im\, \rho^{\phi} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j(\phi(x_j) - 1) = a - 1.$$

Sia ora

$$A_{\phi} := \{\alpha \in Aut(F_n) \mid \phi(x) = \phi(x.\alpha)\ \forall\, x \in F_n\}.$$

Per $\alpha \in A_{\phi}$ definiamo la matrice $n \times n$:

$$\|\alpha\|^{\phi} := \left(\phi(\frac{\partial x_i.\alpha}{\partial x_j})\right)_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathbb{Z}[\phi(F_n)]).$$

Procedendo come nella dimostrazione di A.3 si prova che $\tau_{\phi} : \alpha \mapsto \|\alpha\|^{\phi}$ è una rappresentazione di A_{ϕ}; τ_{ϕ} è strettamente collegata alla rappresentazione di Magnus definita nella seconda parte del teorema precedente. Precisamente, $\left(\|\alpha\|^{\phi}\right)_{ij}$ è il coefficiente di z_j nell'elemento di posto 1,2 della matrice $\rho^{\phi}(x_i.\alpha)$.

Osserviamo che se $\pi : F_n \to < t > \cong \mathbb{Z}$ è definita da $\pi(x_i) = t,\ i = 1, \ldots, m$, allora $B_n \subset A_{\pi}$ e τ_{π} si restringe alla rappresentazione di Burau $\mathfrak{b}$ di B_n.

2 *La rappresentazione di Burau ridotta.*

Vogliamo ora provare che è possibile "ridurre" $\mathfrak{b}$ a una rappresentazione in $GL(n-1)$; a tale scopo è necessario il seguente lemma tecnico, che segue subito dalla "formula fondamentale" 5.1.4 (5) del calcolo di Fox e dalla relazione $\prod_{i=1}^{n} x_i.b = \prod_{i=1}^{n} x_i$ (cfr. teorema 3.3.2).

Lemma A.6.

(1) $\sum_{j=1}^{n} \pi(\frac{\partial x_i.b}{\partial x_j}) = 1.$

(2) $\sum_{i=1}^{n} t^{i-1}\pi(\frac{\partial x_i.b}{\partial x_j}) = t^{j-1}.$

Dal lemma segue subito che se $\mathfrak{b}(b) = B(t) \in GL(n, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ e se poniamo $S = \sum_{i \leq j} E_{ij}$ (E_{ij} essendo la matrice elementare che ha 1 al posto (i, j) e 0 altrove) risulta:

$$S^{-1}B(t)S = \begin{pmatrix} C(t) & \underline{0} \\ * * * * * & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora $\gamma : B_n \to GL(n-1, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, $\gamma(b) = C(t)$ è una rappresentazione di B_n che si dice *rappresentazione di Burau ridotta*. Notiamo infine che risulta:

$$\gamma(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -t & 0 & \\ 1 & 1 & \\ & & Id_{n-3} \end{pmatrix}$$

$$\gamma(\sigma_i) = \begin{pmatrix} Id_{i-2} & & & & \\ & 1 & t & 0 & \\ & 0 & -t & 0 & \\ & 0 & 1 & 1 & \\ & & & & Id_{n-i-2} \end{pmatrix}, \quad 1 < i < n-1$$

$$\gamma(\sigma_{n-1}) = \begin{pmatrix} Id_{n-3} & & \\ & 1 & t \\ & 0 & -t \end{pmatrix}$$

Correliamo infine le rappresentazioni di B_n descritte con la matrice di Alexander di un nodo ottenuto per chiusura di una treccia.

Teorema A.7. *Sia $b \in B_n$ e $\beta \in S_n$ la permutazione indotta. La matrice di Alexander del link ottenuto K da b per chiusura è $\mathfrak{b}_\beta(b) - I_n$.*

Dim. Per quanto visto in §3.3,

$$\pi_1(S^3 \setminus K) = (x_1, \ldots, x_n | (x_1.b)x_1^{-1}, \ldots, (x_n.b)x_n^{-1}).$$

Pertanto la matrice di Alexander di K è

$$\left(\pi p \frac{\partial (x_i.b)x_i^{-1}}{\partial x_j}\right).$$

ove $p : F(\underline{x}) \to \pi_1(S^3 \setminus K)$ è la proiezione canonica e π l'abelianizzazione.

Ora $\frac{\partial}{\partial x_j}((x_i.b)x_i^{-1}) = \frac{\partial x_i.b}{\partial x_j} - (x_i.b)x_i^{-1}\delta_{ij}$: abelianizzando si ottiene quanto si voleva. □

Note e commenti

(1) La bibliografia segnalata non ha alcuna pretesa di organicità o completezza. Inoltre abbiamo trascurato il problema dell'attribuzione dei risultati, indicando di regola le trattazioni moderne piuttosto che gli articoli originali.

In [BZ], [Kaw] si possono trovare referenze assai esaurienti relative alla teoria classica (pre-Jones per [BZ]), mentre [BNB] riporta i lavori riguardanti gli invarianti di Vassiliev e tutti gli sviluppi più recenti.

(2) In queste note lo spazio dedicato al polinomio di Jones è molto limitato; una trattazione non troppo tecnica dell'argomento può trovarsi in [J], ove sono illustrati elementarmente i vari possibili approcci all'invariante.

Le applicazioni della teoria del polinomio di Jones alla soluzione delle congetture di Tait sono descritte in [Mu], [Li], [HKW].

(3) Proponiamo di seguito una breve bibliografia ragionata relativa ai principali testi sulla teoria dei nodi.

[Ad] È un testo recente, introduttivo e molto elementare che illustra vari aspetti della teoria rinunciando quasi sempre ai dettagli dimostrativi in favore di un'esposizione colloquiale.

[BZ]. Si pone come testo di riferimento per la teoria dei nodi classica, trattando con estrema completezza - spesso anche in modo non elementare - tutti gli aspetti geometrici della teoria.

[CF]. Si discutono in modo molto dettagliato ed elementare il teorema di Wirtinger e il polinomio di Alexander, introdotto tramite il calcolo differenziale nei gruppi liberi.

[K]. Viene delineato un approccio informale sia alla parte geometrica che a quella combinatoria, quest'ultima particolarmente sviluppata.

[Kaw]. È un testo recentissimo, piuttosto specialistico, molto completo e dotato di un imponente apparato bibliografico e di riferimento (tavole di dati). Viene sviluppata, tra l'altro, una trattazione organica dell'invariante di Jones.

[Li] È il testo più recente tra quelli segnalati: piuttosto conciso, è indirizzato a studenti di dottorato e comprende una trattazione abbastanza approfondita sia degli aspetti geometrici della teoria classica, sia dei polinomi di Jones, HOMFLY e delle loro generalizzazioni; nei capitoli finali sono analizzati gli invarianti di 3-varietà deducibili dal polinomio di Jones.

[Mo]. È un testo elementare che evidenzia soprattutto gli aspetti combinatorio-gruppali e l'approccio via gruppo delle trecce.

[Mu] Molto recente, comprende un'introduzione abbastanza approfondita agli aspetti meno specialistici della teoria, non assumendo un background particolrmente sofisticato. Contiene anche una breve introduzione agli invarianti di Vassiliev.

[R]. È un testo ormai classico, in cui vengono trattati ampiamente tutti gli aspetti geometrici della teoria; gli ultimi capitoli costituiscono una introduzione alla topologia delle 3-varietà .

[W] È un testo recente che tratta concisamente gli aspetti puramente combinatori della teoria.

(4) Tra gli articoli di rassegna sulla teoria dei nodi "classica", oltre al fondamentale [F1], segnaliamo [Gr]; [HKW] tratta in particolare i polinomi di Jones e HOMFLY in relazione con le congetture di Tait.

Per quanto riguarda gli sviluppi più recenti citiamo [Car1], [Bir2], [A2], [BNS], [CD2].

(5) Diamo ora una schematico indice delle fonti:

PARTE I

§1-2 Si è seguita sostanzialmente la presentazione di [R] e [BZ].

§3 Si vedano [Bir1], [M], [Ch], [Mo].

§4 La dimostrazione del teorema di Wirtinger è tratta da [Kos]; il resto del materiale è standard.

§5 Il materiale di §5.1 è tratto da [CF], mentre il resto del paragrafo è stato organizzato originalmente; la dimostrazione del teorema §5.4 è tratta da [BZ].

§6 Le dimostrazioni dei risultati relativi al polonomio HOMFLY sono tratte da [HKW], mentre l'approccio seguito per la discussione del polinomio di Jones è dovuto a Kauffmann.

PARTE II

La referenza fondamentale è [BN1]. I paragrafi §7-8 riprendono e ampliano una parte di questo lavoro. In §9 si sviluppano, in modo meno generale ma assai più elementare, le idee di [DP] per un approccio combinatorio all'integrale di Kontsevich. Il materiale di §10 è tratto da [Car2] e [Kas], quello di §11 da [D3], [D4], [BN2]. La descrizione della costruzione della traccia di Markov mediante la rappresentazione di B_n indotta dalla R-matrice di $U_h(sl(2))$ (§11.2) è ispirata ad un seminario di Corrado De Concini in cui sono stati presentati alcuni lavori di Turaev (in particolare [Tur]).

APPENDICE

Si vedano [Mo], [Bir1].

Bibliografia

[A1] V.A. Arnold, *The cohomology ring of the colored braid group*, Math. Zametki **5** (1969), 227–231.

[A2] ———, *The Vassiliev thory of invariants and knots*, First European Congress of Mathematics, Birkhauser, Progress in Math. n. 119, 1995, pp. 3–29.

[Abe] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge University press, 1977.

[AC] D. Altschuler, A. Coste, *Quasi-quantum groups, knots, three-manifolds, and topological field theory*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), 83–107.

[Ad] C. Adams, *The knot book*, W.H. Freeman and Company, New York, 1994.

[AF] E. Artin, R.H. Fox, *Some wild cells and spheres in three-dimensional space*, Ann. of Math. **49** (1948), 979–990.

[Bir1] J. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1973.

[Bir2] ———, *New points of view in knot theory*, Bull. A.M.S. **28** (1993), 253–287.

[BL] ———, X-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev invariants*, Invent. Math. **110** (1993), 225–270.

[BN1] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knots invariants*, Topology **34** (1995), 423–472.

[BN2] ———, *Non associative tangles*, Georgia International Topology Conference proceedings, Amer. Math. Soc and International Press,, Providence, 1997, pp. 139–183.

[BN3] ———, *On associators and the Grothendieck-Teichmuller group I*, preprint (1996).

[BNB] ———, *Bibliography on Vassiliev invariants*, computer file[32].

[BNS] ———, A. Stoimenow, *The fundamental theorem of Vassiliev invariants*, Proc. of the Arhus Conf. *Geometry and Physics*, lecture notes in pure and applied mathematics, vol. 184, Marcel Dekker, New York, 1997, pp. 101–134.

[Br] E. Brieskorn, *Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe*, Inv. Math. **12** (1971), 57–61.

[BZ] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, de Gruyter Studies in Math. 5, 1985.

[Car1] P. Cartier, *Developpements recents sur les groups de tresses. Application a la topologie ef a l'algebre*, Seminaire Bourbaki exp. n.716 (1989), 17–67.

[Car2] ———, *Construction combinatoire des invariants de Vassiliev-Kontsevich de noeuds*, C.R. Acad.Sci. Paris **316 Serie I** (1993), 1205–1210.

[CD] S.V. Chmutov, S.V. Duzhin, *An upper bound for the number of Vassiliev knot invariants*, Jour. of Knot Thery and its Ramifications **3** (1994), 141–151.

[CD2] ———, *The Kontsevich integral*, preprint (1997).

[CF] R.H. Crowell, R.H. Fox, *Introduction to knot theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[Ch] W.L. Chow, *On the algebraical braid group*, Ann. Math. **49** (1948), 654-658.

[CP] V. Chari, A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[D1] V. Drinfeld, *Quantum Groups*, Proceedings ICM 86, vol. 1, pp. 798–820.

[D2] ———, *On almost cocommutative Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 321–342.

[D3] ———, *Quasi Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 1419–1457.

[D4] ———, *On quasi triangular quasi-Hopf algebras and a group closely related with* $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991), 829–860.

[DP] C. De Concini, C. Procesi, *Hyperplane arrangements and holomy equations*, Selecta Mathematica **1, n. 3**, 495–535.

[E] C.H. Edwards, *Concentricity in 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **113** (1964), 406–423.

[F1] R.H. Fox, *A quick trip through knot theory*, Topology of Manifolds, Prentice-Hall, 1962, pp. 120–167.

[F2] ———, *A remarkable simple closed curve*, Ann. of Math. **50** (1949), 264–265.

[32] Reperibile all'indirizzo internet **http://www.ma.huji.ac.il/~ drorbn.**

[Fe] R. Fenn,, *Vassiliev theory for Knots*, Tr J. of Math. **18** (1994), 81–101.

[Fre] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millet, A. Ocneanu, *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 183–190.

[FY] P. Freyd, D. Yetter, *Braided compact closed categories with applications to low dimensional topology*, Adv. Math. **77** (1989), 156–182.

[GL] C. Gordon, J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, Jour. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 371–415.

[GP] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, 1974.

[Gr] A. Gramain, *Rapport sur la theorie classique des noeuds*, Seminaire Bourbaki exp. n. 485 (1977), Spinger LNM 567, 222–237.

[H] J. Hempel, *Three-manifolds*, Ann. Math. Studies 86, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1976.

[Ha] R. Hain, *On a generalization of Hilbert 21st problem*, Ann. ENS **46** (1986), 609–627.

[Hae] A. Haefliger, *Differentiable links*, Topology **1** (1962), 241-244.

[He] G. Hemion, *On the classification of homeomorphisms of 2–manifolds and the classification of 3–manifolds*, Acta Math. **142** (1979).

[He2] ———, *The classification of knots and 3–dimensional spaces*, Oxford Univ. Press, Princeton, N.J., 1992.

[HKW] P. De La Harpe, M. Kervaire, C. Weber, *On the Jones Polynomial*, L'Einsegnement Mathematiqe **32** (1986), 271–335.

[Hum] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer, New York, 1972.

[J] V. Jones, *Subfactors and Knots*, American Mathematical Society C.M.B.S. n. 80, 1991.

[Ji] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and Yang-Baxter equation*, Lett. in Math. Phys. **10** (1985), 63–69.

[K] L. Kauffman, *On Knots*, Princeton University Press, 1987.

[K2] ———, *Combinatorics and knot theory*, Contemp. Math. **20** (1983), 181–200.

[Kas] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer, Heidelberg, 1994.

[Kaw] A. Kawauchi, *A survey of knot theory*, Birkhauser, Basel, 1996.

[Kos] C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, 1988.

[Kh] T. Khono, *Linear representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations*, Braids, Contemporary Mathematics, vol. 78, 1988, pp. 339–363.

[KM] P. Kronheimer, T. Mrowka, *Gauge theories for embedded surfaces I, II*, Topology **32; 34** (1993; 1995), 773–826; 37–97.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry, 2 vols.*, Interscience, New York, 1963,1969.

[L] J. Levine, *Knot cobordism group in codimension two*, Comm. Math. Helv. **44** (1969), 229-244.

[Leh] G.I. Lehrer, *A survey of Hecke algebras and Artin braid groups*, Braids, Contemporary Mathematics, vol. 78, 1988, pp. 365–385.

[Li] W.B.R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Spinger Verlag, New York, 1997.

[LM] T.Q.T. Le, J. Murakami, *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links*, Comp. Math. **102** (1996), 41–64.

[M] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory*, New York, 1966.

[Ma] W.S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[MM] J. Milnor, J. Moore, *On the structure of the Hopf algebras*, Ann. Math. **81** (1965), 211-264.

[Mo] S. Moran, *The mathematical theory of Knots and braids. An introduction*, North-Holland Mathematics Studies 82, 1983.

[Mur1] K. Murasugi, *Knot theory and its applications*, Addison-Wesley, 1984.

[Mur2] ———, *On the braid index of alternating links*, Trans. A.M.S. **326** (1991), 237–260.

[Piu] S. Piunikhin, *Combinatorial expression for universal Vassiliev link invariant*, Comm. Math. Phys. **127** (1995), 1–22.

[R] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series 7, Publish or Perish Press, 1976.

[RS] C. Rourke, B. Sanderson, *Introduction to Piecewise-linear topology*, Ergebnesse der Mathematik 69, Springer-Verlag, 1972.

[S] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, MacGrow-Hill, New York, 1966.

[Sc] H. Schubert, *Uber eine numerische Knoteninvariante*, Math. Zeit. **61** (1954), 133-170.

[Tur] V.G. Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), 527–553.

[Vas] V.A. Vassiliev, *Complements of discriminants of smooth maps*, Trans. of Math. Mono., Amer. Math. Soc., Providence, 1990.

[Was] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Dover Publ., New York, 1987.

[We] D.J.A. Welsh, *Complexity: Knots, Colourings and Countings, London Math. Soc. LNS 186*, Cambridge, 1993.

[Wh] W. Whitten, *Knot complements and groups*, Topology **26** (1987), 41–44.

[Z] H.J. Zassenhaus, *The theory of groups*, Chelsea Publ. Co., 1958.

INDICE ANALITICO

Alexander
————, matrice di 57
————, polinomio di 48
algebra
———— di Hecke 71
———— di Hopf 82
———— di olonomia 106
andamento asintotico 119
antipodo 82
associatore 159
———— formale 169
bialgebra 82
———— quasitriangolare 84
bracket
———— di Kauffman 75
———— normalizzato 80
bridge number 13
categoria
———— intrecciata 144
———— lineare 146
———— lineare fibrata 166
———— monoidale 141
———— ribbon 156
———— simmetrica 145
———— tensoriale 140
coalgebra 82
————, cocommutativa 82
complementare di un nodo 31
connessione 109
———— KZ 110
———— piatta 100
Conway
————, polinomio di 68
————, potenziale di 65
coprodotto 82
corda isolata 98
counità 82
curvatura 110
derivata di Fox 55
ε-derivazione 54
diagramma
———— alterno 12
———— di corde sul cerchio 95

——— di corde sulla retta 95
——— di un nodo 12
———, equivalenza fra 14
——— ridotto 13
Drinfeld, serie di 120
dualità (in una categoria) 146
elemento di tipo gruppo 120
equazione KZ 118
equivalenza combinatoria 9
esagono 144
esagono semiclassico 173
esponenziale tempo ordinato 112
framing 33
generatori
——— (del gruppo delle trecce) 17
——— (del gruppo delle trecce pure) 22
genere di un nodo 43
Gordon-Luecke, teorema di 31
gruppo di un nodo 34
Hosokawa, polinomio di 65
——— di Jones 68
integrale di Kontsevich 95
integrale iterato 112
intorno tubolare 10
intrecciamento 144
intrecciamento infinitesimale 147
invariante
——— di ordine m 83
——— di skein 68
——— di tipo finito 83
——— universale 102
isotopia 4
——— ambientale 4
——— regolare 15
——— tra diagrammi 14
Jones, polinomio di 68
Kontsevich, integrale di 95
link 4
——— banale 4
——— spezzato 65
linking number 13
Markov, mosse di 18
meridiano 33
movimenti orizzontali 113
nastro 4
nodo 4
——— amphicheiral 6

——— banale 4
——— inverso 6
——— primo 11
——— torale 7
——— trifoglio 6
numero
——— di incroci (minimo) 12
——— di snodamento 13
——— di torsione 53
olonomia, algebra di 106
omologia
——— del complementare di un nodo 32
——— del rivestimento ciclico infinito 50
omotopia del complementare di un nodo 33
operatore di torsione 146
p-diagramma 168
p-treccia 165
parallelo 33
pentagono 141
polinomio
——— di Alexander 48
——— di Alexander per un link 64
——— di Conway 68
——— di Hosokawa 65
——— di Jones 68
——— HOMFLY 68
potenziale di Conway 65
primitivo, elemento 101
Quantum Group 88
rappresentazione di monodromia 130
Reidemeister
———, metodo di Reidemeister-Schreier 23
———, mosse di 14
relazioni
——— a quattro termini 100
——— di corda isolata 156
——— di skein 68
rivestimento
——— abeliano universale 50
——— ciclico finito 53
——— ciclico infinito 50
R-matrice 85
s-equivalenza 44
segnatura di un nodo 49
Seifert
———, algoritmo di 42
———, cicli di 42

————, forma di 45
————, superficie di 42
————, superficie in forma normale 45
serie di Drinfeld 120
sistema di Schreier 23
somma connessa 10
tangle 153
tangle non associativo 162
trasporto parallelo 110
trecce
————, gruppo delle 16
————, pure 19
twist 180
unità 81
Wirtinger, presentazione di 35
writhe 79

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "La Sapienza"
Piazzale Aldo Moro 5
00185 Rome — ITALY
e-mail: claudio@mat.uniroma1.it
papi@mat.uniroma1.it