CAPITOLO 8 FIBRATI ED APPLICAZIONI GEOMETRICHE

§30 Fibrati

Nota Vogliamo introdurre la nozione di fibrato e discutere l'importante Teorema di Leray-Hirsch che permette in molti casi di calcolare la coomologia di spazi interessanti, la classe di Thom e il morfismo di Gysin.

30.1 La nozione di fibrato si può sviluppare in vari livelli di generalità. L'idea sottostante è quella che, data una applicazione continua $p : E \to B$ si vorrebbe in qualche modo ricostruire la geometria di E a partire da quella di B *base della fibrazione* e quella delle *fibre* $p^{-1}(b),\ b \in B$.

Questo programma si può portare avanti con tanto più successo quanto più le fibre variano in modo controllabile. Il caso più semplice è (si confronti la definizione 3.4).

Definizione. Una applicazione $p : E \to B$ si dice un fibrato banale con fibra uno spazio F se esiste un omeomorfismo $E \cong B \times F$ per cui p diviene la proiezione sul primo fattore. Un tale omeomorfismo si dice una *trivializzazione* del fibrato dato.

Una applicazione $p : E \to B$ si dice un fibrato localmente banale con fibra uno spazio F se esiste un ricoprimento aperto U_i di B tale che, per ogni i si abbia che $p|_{U_i} : p^{-1}(U_i) \to U_i$ è omeomorfo un fibrato banale con fibra F.

Un rivestimento su uno spazio connesso per archi è un fibrato localmente banale con fibra uno spazio discreto.

Dati due aperti $U_i,\ U_j$ del ricoprimento abbiamo per ipotesi due omeomorfismi ϕ_i : $p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ compatibili con la proiezione p per cui su $U_i \cap U_j$ si induce un omeomorfismo $\phi_i\phi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F$.

Per ogni $x \in U_i \cap U_j$ si ha dunque un omeomorfismo $F = x \times F(\phi_i\phi_j^{-1})_x \to x \times F = F$.

I casi più interessanti si hanno quando questi omeomorfismi della fibra F si possono prendere in un opportuno gruppo G di omeomorfismi di F preassegnato, nelle applicazioni G è un gruppo topologico o di Lie che opera su F in modo continuo, in questi casi si suppone che, per ogni i, j abbiamo una funzione continua $\psi_{i,j} : U_i \cap U_j \to G$ detta *mappa di incollamento* tale che

$$\phi_i(x) = (1_B \times \psi_{i,j}(x))(\phi_j(x)). \tag{30.1.1}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Diremo allora che G *è gruppo strutturale del fibrato.*

Come fibra in questo caso si può prendere G stesso che opera su se stesso per moltiplicazione a sinistra, parleremo allora di *fibrato principale su G.* Un esempio importante è dato dalla discussione della varietà Grassmanniana che vedremo nel §32.
Esempi Alcuni di questi esempi richiedono un minimo di conoscenza di geometria differenziale per essere verificati.

Se B è una varietà differenziabile di dimensione n il fibrato tangente $T(B)$ è un fibrato localmente banale con fibra $\mathbb{R}^n$ e gruppo strutturale il gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$. In questo caso abbiamo una struttura ulteriore su cui torneremo quella di *fibrato vettoriale.*

Un fibrato molto importante, sempre nel caso in cui B è una varietà differenziabile di dimensione n è il *fibrato dei riferimenti o frame bundle in inglese* del fibrato tangente.

Si prende nel prodotto fibrato (su B) di n copie del fibrato tangente l'insieme delle coppie $(x, (v_1, \dots, v_n))$ dove $x \in B$ e $(v_1, \dots, v_n))$ è una base dello spazio tangente $T_x(B)$ di B in x. In questo caso la fibra è isomorfa al gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ e ancora abbiamo come gruppo strutturale il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ che opera su se stesso per moltiplicazione a destra.

In modo analogo si definiscono fibrati vettoriali qualunque con i loro *frame bundles.*

Nel piano complesso prendiamo k punti distinti $w_h,\ h = 1, \dots, k$.

Sia T_k^n lo spazio delle $n-$uple di numeri complessi $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ tali che.
1) $z_i \neq z_j, \forall i \neq j$ e $z_i \neq w_h, \forall h$
provare che T_k^n a meno di omeomorfismo non dipende dalla particolare scelta dei punti w_h e che, la proiezione $p : T_k^n \to \mathbb{C} - \{w_1, \dots, w_k\}$ definita da $p(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1$ è un fibrato localmente banale con fibra T_{k+1}^n.

Questo esempio è importante nella teoria dei nodi e del grupppo delle trecce.

Sia G un gruppo di Lie, $H \subset K \subset G$ sottogruppi chiusi allora la proiezione $G/H \to G/K$ fra gli spazi di classi laterali è un fibrato di fibra K/H e gruppo strutturale H, se H è normale in K è un fibrato pricipale sul gruppo K/H.

Se G è un gruppo di Lie compatto che opera su una varietà differenziabile M e gli stabilizzatori G_m dei punti $m \in M$ sono tutti coniugati in G allora lo spazio delle orbite M/G è una varietà differenziabile e la proiezione $M \to M/G$ è un fibrato di fibra G/G_m.

30.2 Supponiamo di dare un fibrato localmente banale $p : E \to B$ con fibra uno spazio F, un ricoprimento aperto finito U_i di B con trivializzazioni $\phi_i : p^{-1}(U_i) \to B \times F$.

Il teorema che ora discuteremo fornisce un modo per calcolare la coomologia di E sotto opportune ipotesi. Si noti che in ogni caso la proiezione p induce un omomorfismo di anelli $H^*(B) \to H^*(E)$ e penseremo ad $H^*(E)$ come modulo sinistro su $H^*(B)$.

Ci servirà il seguente

Lemma. *Sia M un modulo graduato libero finito con base $c^i,\ i = 1, \dots, n$ (omogenea) su un anello graduato $A = \oplus_{i=0}^{\infty} A_i$ sia X una matrice quadrata $n \times n$ con coefficienti in*

$A^+ := \oplus_{i=1}^{\infty} A_i$ *e siano gli elementi* u^i *omogenei e definiti vettorialmente da*

$$\begin{vmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{vmatrix} = (1+X) \begin{vmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{vmatrix}$$

allora gli elementi u^i *sono una base di* M *su* A.

Dim. Proviamo prima di tutto che gli elementi c^i si esprimono tramite gli u^i infatti invertiamo formalmente $(1+X)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j X^j$ da cui

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j X^j \begin{vmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{vmatrix}$$

ma data la omogeneità degli u_i ed il fatto che X ha elementi in A^+ segue comparando i due lati che gli c_i sono combinazioni lineari degli u^i a coefficienti in A.

Per provare la proprietà della base se vi fosse una relazione lineare $\sum_i a_i u^i = 0$ poichè gli elementi u^i sono omogenei possiamo supporre che anche che gli a_i non nulli sono omogenei di grado $k - h_i$ per qualche k. Sempre utilizzando la formula che definisce gli u^i avremmo che il vettore riga $(a_1, \ldots, a_n)(1+X) = 0$ ovvero che $(a_1, \ldots, a_n) = -(a_1, \ldots, a_n)X$, ma questo è assurdo poichè un elemento a_i di grado minimo che appare in questa lista non può essere annullato da nessun elemento di $-(a_1, \ldots, a_n)X$. $\square$

Teorema di Leray Hirsch. *Sia* $p : E \to B$ *un fibrato localmente banale di fibra* F.

Se esistono classi omogenee $u^1, \ldots, u^n \in H^*(E)$ *tali che, per ogni* $x \in B$ *la restrizione delle* c^i *ad* $F = p^{-1}(x)$ *siano una base di* $H^*(F)$ *(sull'anello scelto di coefficienti), allora* $H^*(E)$ *è un modulo libero su* $H^*(B)$ *con base le classi* $u^1, \ldots, u^n$.

Dim. La dimostrazione si può fare applicando la successione di Mayer Vietoris induttivamente.

L'induzione la facciamo sul numero di elementi U_j.

Primo caso Un solo aperto, $E = B \times F$ per cui essendo la omologia di F un modulo libero (rif coeff univ. inserire) dalla formula di Künneth segue che $H * (X) = H * (B) \otimes H^*(F)$.

Prima di tutto ci possiamo ridurre al caso in cui B sia connesso per archi altrimenti la coomologia è prodotto diretto delle coomologie calcolate sulle componenti per archi di B.

Se un anello è il prodotto $\prod_{i \in I} R_i$ e se esistono $n-$elementi $u^j := (u_i^j)_{i \in I}$ che diano una bse per ogni i su un sottoanelo A_i d R_i si vde facilmente che $\prod_{i \in I} R_i$ è un modulo libero di base gli u^j su $\prod_{i \in I} A_i$.

Se B è connesso per archi $H^0(B) = R$ l'anello dei coefficienti e la inclusione di $F = p^{-1}(x_0) \subset B \times F$ ristretta alle classi $a \times 1$ coincide con la proiezione di $H^*(B) \to H^*(p) = R$ un punto p che ha come nucleo $\oplus_{h>0} H^h(B)$.

Siano u^i omogenee di grado h_i esprimiamo $u^i = \sum_j a_{ij} \times c^j = \sum_j p^*(a_{ij}) \cup c^j$ ed osserviamo che per proiezione su F le $a_{ij}, \supset\neq i$ si proiettano in 0 mentre $a_{ii} = 1 + \overline{a}_{ii}$ dove $\overline{a}_{ii} \in \oplus_{h>0} H^h(B)$.

In effetti si ha che la matrice a_{ij} è della forma $1 + X$ come nel Lemma precedente che si applica ad $M = H^*(X)$ come $H^*(B)$ modulo.

Passo generale Sia N il modulo libero su n generatori y^i, per un sottoinsieme U di B sia $\phi_U : H^*(U) \otimes N \to H^*(p^{-1}(U))$ definita da $\phi_U(a \otimes y_i) := p^*(a) \cup u^i$, vogliamo provare che ϕ_B è un isomorfismo ma rimpiazzando B con U possiamo in realtà provare che ϕ_U è un isomorfismo per ogni U.

Supponiamo che il Teorema sia stato provato per meno di n aperti e definiamo $U := \cup_{i=1}^{n-1} U_i$, $V = U_n$ per induzione ed il primo caso abbiamo che le restrizioni ad U delle classi u^i sono una base di $H^*(p^{-1}(U))$ su $H^*(U)$ e similmente le restrizioni a V delle classi u^i sono una base di $H^*(p^{-1}(V))$ su $H^*(V)$ vogliamo provare l'enunciato per $B = U \cup V$ usando Mayer Vietoris. Osserviamo che in $U \cap V$ anche le classi u^i sono una base di $H^*(p^{-1}(U \cap V)) = H^*(p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V))$ su $H^*(U \cap V)$ poiché su $U \cap V$ il fibrato è banale.

Prendiamo la successione esatta di Mayer Vietoris della coppia U, V. La successione esatta di Mayer Vietoris tensorizzata per N è ancora esatta ed abbiamo un diagramma commutativo (per la funtorialità del prodotto $\cup$ e della costruzione).

$$\begin{array}{ccccc}
H^{n+1}(U) \otimes N \oplus H^{n+1}(V) \otimes N & \longrightarrow & H^{n+1}(U \cap V) \otimes N & \longrightarrow & H^n(U \cup V) \otimes N \\
\Big\downarrow \phi_U \oplus \phi_V & & \Big\downarrow \phi_{U \cap V} & & \Big\downarrow \phi_{U \cup V} \\
H^{n+1}(p^{-1}(U)) \oplus H^{n+1}(p^{-1}(V)) & \longrightarrow & H^{n+1}(p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V)) & \longrightarrow & H^n(p^{-1}(U) \cup p^{-1}(V
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow & H^n(U) \otimes N \oplus H^n(V) \otimes N & \longrightarrow & H^n(U \cap V) \otimes N \dots \\
& \Big\downarrow \phi_U \oplus \phi_V & & \Big\downarrow \phi_{U \cap V} \\
\longrightarrow & H^n(p^{-1}(U)) \otimes N \oplus H^n(p^{-1}(V)) & \longrightarrow & H^n(p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V)) \dots
\end{array}$$

Ora per induzione tutti i morfismi verticali eccetto eventualmente $\phi_{U \cup V}$ sono isomorfismi ed il teorema segue dal Lemma dei cinque. $\square$

Formuliamo il risultato in omologia. Fissiamo un punto $x_0 \in B$ ed una identificazione $F = p^{-1}(x_0)$ associata ad una trivializzazione locale indichiamo con c^i le classi u^i ristrette ad F.

Prendiamo la base $c_1, \dots, c_n \in H_*(F)$ duale alle classi c^i e definiamo il morfismo

$$\phi : H_*(X) \to H_*(B) \otimes H_*(F), \ \phi(a) := \sum_{i=1}^{n} (p_*(a \cap u^i) \otimes c_i$$

allora ϕ è un isomorfismo.

Lo lasciamo al lettore.

Il Teorema precedente si può formulare anche in modo relativo e la dimostrazione è la stessa.

Teorema di Leray Hirsch relativo. *Sia $p : E \to B$ un fibrato localmente banale di fibra F. Sia $\dot{E} \subset E$ un sottofibrato di fibra $\dot{F} \subset F$.*

Se esistono classi omogenee $u^1, \ldots, u^n \in H^*(E, \dot{E})$ tali che, per ogni $x \in B$ la restrizione delle c^i ad $F, \dot{F}$ siano una base di $H^*(F, \dot{F})$ (sull'anello scelto di coefficienti), allora $H^*(E, \dot{E})$ è un modulo libero su $H^*(B)$ con base le classi $u^1, \ldots, u^n$.

30.3 Un caso di speciale interesse si ha quando la fibra F è una sfera S^n in questo caso diremo che il fibrato è un fibrato in sfere e diremo che è *orientabile* se esiste una classe $\omega \in H^n(E)$ che ristretta ad ogni fibra sia un generatore di $H^n(S^n) = R$.

In questo caso le due classi $1, \omega$ soddisfano alle condizioni del Teorema di Leray Hirsch ed abbiamo che $H*(E) = H^*(B) \oplus H^*(B) \cup \omega$.

È evidentemente interessante avere una caratterizzazione geometrica della orientabilità

Proposizione. *Un fibrato in sfere è orientabile se e solo se esiste una famiglia di trivializzazioni locali $p^{-1}(U_i) = U_i \times S^n$ tali che gli omeomorfismi di transizione $\psi_{ij}(x)$ hanno grado 1 per ogni x e per ogni i, j.*

Ogni cammino chiuso in B di punto iniziale x_0 induce un omeomorfismo della sfera fibra in x_0, il cui grado è un invariante di omotopia, il fibrato in sfere è orientabile se e solo se il grado è sempre 1, in particolare questo avviene se B è semplicemente connesso.

Dim. La dimostrazione di questo Teorema si fa in modo efficiente con la teoria delle successioni spettrali e quindi la rimandiamo a quel momento. $\square$

Il caso relativo appare spesso nel modo seguente.

Sia E un fibrato vettoriale $n-$dimensionale su B e sia $\dot{E}$ l'insieme dei vettori non nulli in E ossia il complementare della *sezione nulla.*

Le fibre di questo fibrato sono le coppie $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0$ la cui omologia si concentra in dimensione n ed è isomorfa all'anello R (scegliendo una orientazione). Nelle ipotesi che il fibrato sia orientabile abbiamo dunque una classe $\omega \in H^n(E, \dot{E})$ per cui l'omomorfismo $\cup\omega : H^*(B) \to H^*((E, \dot{E})$ è un isomorfismo detto *isomorfismo di Thom.*

L'orientabilità di questa coppia è equivalente alla orientabilità del fibrato vettoriale che si può esprimere in vari modi, uno è quello di dire che esistono trivializzazioni locali per cui le mappe di incollamento hanno determinante positivo ed un altro consiste nel dire che il fibrato $\wedge^n E$ che ha come fibre le potenze esterne massime di E è banale.

In ogni caso l'esempio più interessante di questa costruzione si ha quando B è una sottovarietà orientabile di una varietà orientabile X ed E è il fibrato normale, in queso caso si vede per escissione che la coppia $E, \dot{E}$ è equivalente alla coppia $X, X - B$ da cui l'esistenza di una classe di Thom in $H^n(X, X - B)$.

Ora un esempio importante ed una definizione.

Prendiamo un disco unitario $D^n = D$, sia $\overset{\circ}{D}$ il suo interno e consideriamo $E := \overset{\circ}{D} \times D$ ed in E l'insieme delle coppie $\dot{E} := \{(x, y)\} | x \in \overset{\circ}{D}, y \in D$ e $x \neq y$, sia $p : E :=\to \overset{\circ}{D}$ la proiezione sul primo fattore. Per la coppia $E, \dot{E}$ la fibra in y è $D, D - \{y\}$.

Lemma. *$p : (E, \dot{E}) \to \overset{\circ}{D}$ è un fibrato banale di fibra $D, D - 0$.*

Dim. Dobbiamo identificare E a $\overset{\circ}{D} \times D$ in modo tale che $\dot{E}$ si identifichi a $\overset{\circ}{D} \times (D - 0)$ lo facciamo considerando per ogni $(y, x) \in \overset{\circ}{D} \times D - 0$ l'omeomorfismo $\phi(y, x) := (y, (1 - |x|)y + x)$ da $\overset{\circ}{D} \times (D - 0)$ ad E. La formula per l'inverso è complicata anche se elementare bisogna ricavare $|x|$ dalla equazione $x = z - (1 - |x|)y$ che induce una equazione di secondo grado con una sola radice positiva.

Si visualizza disegnando il disco unitario del piano generato dai vettori x, y vedendo che la semiretta da y a $(1 - |x|)y + x$ interseca la circonferenza nel punto $x' := \frac{x}{|x|}$ e che il rapporto fra le lunghezze di yz, yx' è il modulo di x. $\square$

Definizione. Una varietà topologica è uno spazio di Hausdorf localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$.

Sia X una varietà topologica connessa e consideriamo il prodotto $X \times X$ e dentro la diagonale $\Delta := \{(x, x) | x \in X\}$ proviamo che

Proposizione. *Per ogni coppia di elementi $x_1, x_2 \in X$ le coppie $X, X - \{x_1\}$ e $X, X - \{x_2\}$ sono omeomorfe e la proiezione sul primo fattore della coppia $X \times X, X \times X - \Delta$ è un fibato localmente banale con fibra $X, X - x$.*

Dim. Preso un punto x di X sia A un intorno con $\overline{A}$ omeomorfo ad un disco D^n (x corrisponde a 0). L'omeomorfismo ϕ del lemma precedente induce un omeomorfismo che indichiamo ancora ϕ di $A \times \overline{A}$ che trasforma $A \times \overline{A} - \Delta$ in $A \times (\overline{A} - x)$ ed è l'identità su $A \times \delta(A)$ ($\delta(A)$ il bordo).

Abbiamo un omeomorfismo di $p^{-1}(A)$ con $A \times X - p$ dato da $(y, x) \to (y, x)$ se $x \notin A$ e $(y, x) \to \phi(y, x)$ se $x \in \overline{A}$ e questo prova il teorema poichè X è connessa. $\square$

Ne segue che il fibrato $X \times X, X \times X - \Delta$ ha fibre che omologicamente per escissione sono coppie $D, D - 0$, a questo si applica dunque la teoria precedente e se è orientabile diremo che X è orientabile come varietà.

La classe di Thom di questo fibrato (se orientabile) è $\omega \in H^n(X \times X, X \times X - \Delta)$.

§31 La teoria dei punti fissi di Lefschetz

31.1 Vogliamo discutere la relazione che vi è fra i punti fissi di una applicazione $f : X \to X$ ed un invariante omologico dedotto dalla applicazione $f_* : H_*(X) \to H_*(X)$.

L'invariante è

$$T(f) := \sum_i (-1)^i tr(f_i), \;\; f_i : H_i(X) \to H_i(X). \tag{31.1.1}$$

Per spiegare meglio la formula mettiamoci a coefficienti in un campo F in modo tale che $H_i(X, F)$ è uno spazio vettoriale ed f_i una trasformazione lineare, allora $tr(f_i)$ è la usuale traccia almeno se l'omologia ha dimensione finita.

Quindi la formula data ha senso ad esempio se X è un complesso simpliciale o un CW-complesso finito.

Premettiamo un Lemma algebrico.

Lemma. *Sia $\mathcal{A} := \ldots A_i \to A_{i-1} \to \ldots$ un complesso finito di spazi vettoriali di dimensione finita e sia $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ un endomorfismo. Sia $H_i(f) : H_i(\mathcal{A}) \to H_i(\mathcal{A})$ l'endomorfismo indotto in omologia allora*

$$\sum_i (-1)^i tr(f_i) = \sum_i (-1)^i tr(H_i(f)). \tag{31.1.2}$$

Dim. Con le usuali notazioni Z_i, B_i per cicli e bordi spezziamo $A_i = Z_i \oplus \overline{A}_i$, $Z_i = B_i \oplus \overline{Z}_i$ e $\delta_i : \overline{A}_i \to B_{i-1}$ è un isomorfismo.

Scrivendo $f_i : B_i \oplus \overline{Z}_i \oplus \overline{A}_i \to B_i \oplus \overline{Z}_i \oplus \overline{A}_i$ a blocchi

$$f_i = \begin{vmatrix} a_i & e_i & f_i \\ 0 & b_i & d_i \\ 0 & 0 & c_i \end{vmatrix}$$

segue che $tr(f_i) = tr(a_i) + tr(b_i) + tr(c_i)$, $\overline{Z}_i$ è isomorfa a $H_i(\mathcal{A})$ e la trasformazione $H_i(f)$ nell'isomorfismo dato si identifica a b_i,

L'isomorfismo $\delta : \overline{A}_{i+1} \to B_i$ è compatibile con f e quindi si ha che tramite questo isomorfismo si può identificare $a_i = c_{i+1}$ da cui

$$\sum_i (-1)^i tr(f_i) = \sum_i (-1)^i [tr(a_i) + tr(b_i) + tr(c_i)] =$$
$$\sum_i (-1)^i [tr(c_{i+1}) + tr(b_i) + tr(c_i)] = \sum_i (-1)^i tr(b_i) = \sum_i (-1)^i tr(H_i(f)).$$

□

Vi sono vari teoremi che legano 31.1.1 con i punti fissi.

TEOREMA. *Sia X un complesso simpliciale finito, se f non ha punti fissi allora* $\sum_i(-1)^i tr(f_i) = 0$.

DIM. La dimostrazione si fa utilizzando il Lemma ed il teorema di approssimazione simpliciale. Consideriamo la funzione continua $d(f(x)x)$ dove d è la distanza. Poiché X è compatto questa ha un minimo che è > 0 in quanto f non ha punti fissi, qindi esiste $\epsilon > 0$ per cui $d(f(x)x) > 0$ per ogni x.

Suddividiamo X baricentricamente un numero sufficiente h di volte per assicurarci che il diametro della chiusura della stella di ogni vertice sia minore di $\epsilon/2$.

Pertanto se v è un vertice $f(\overline{St(v)}) \cap \overline{St(v)} = \emptyset$.

Suddividiamo ancora k volte in modo da poter applicare la approssimazione simpliciale.

Una approssimazione simpliciale g ad f è definita ponendo $g(v)$ un vertice la cui stella contiene $f(\overline{St(v)})$. Per le scelte fatte si ha che, per ogni simplesso σ di $Sd^{h+k}(X)$ il simplesso $g(\sigma)$ di $Sd^k(X)$ è disgiunto da σ.

Consideriamo dunque la composizione delle applicazioni indotte sui complessi simpliciali:

$$\rho : C_*(Sd^{h+k}(X)) \xrightarrow{g_*} C_*(Sd^h(X)) \xrightarrow{Sd^k} C_*(Sd^{h+k}(X)). \tag{31.1.3}$$

Questa trasformazione di complessi induce evidentemente in omologia la trasformazione f_*.

Per costruzione dato comunque un simplesso $\sigma \in Sd^{h+k}(X)$ si ha che $\rho(\sigma) = Sd^k(g(\sigma))$ è somma di simplessi tutti disgiunti da σ.

Ne segue che nella base del complesso $C_*(Sd^{h+k}(X))$ data dai simplessi le matrici della trasformazione ρ in ogni grado hanno 0 sulla diagonale e dunque hanno traccia 0. La formula 31.1.2 del Lemma precedente conclude la dimostrazione. □

§32 Varietà Grassmanniane e di bandiere

NOTA Il calcolo della coomologia delle varietà Grassmanniane e di bandiere è alla base della teoria delle classi caratteristiche ed è un esempio semplice della teoria degli spazi classificanti, inoltre è un notevole sviluppo delle teoria classica del calcolo di Schubert che è parte della classica geometria numerativa.

32.1 È opportuno premettere a questa discussione un semplice teorema classico di algebra che è alla base della teoria di Galois.

Consideriamo l'anello dei polinomi nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ed una ulteriore variabile t sull'anello degli interi.

Le funzioni simmetriche elementari $e_i := e_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sono definite implicitamente dalla formula:

$$p(t) := \prod_{i=1}^{n}(1 + tx_i) := \sum_{i=0}^{n} e_i t^i. \tag{32.1.1}$$

Esplicitamente $e_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è la somma di $\binom{n}{i}$ termini, i prodotti, su tutti i sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, n\}$ con i elementi, delle variabili con indici nel sottoinsieme dato.

$$e_i = \sum_{1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_i \le n} x_{a_1} x_{a_2} \ldots x_{a_i}. \tag{32.1.2}$$

Se σ è una permutazione degli indici abbiamo

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + tx_i) = \prod_{i=1}^{n}(1 + tx_{\sigma i})$$

quindi gli elementi e_i sono invarianti per permutazione delle variabili.

Naturalmente il polinomio $t^n p(-\frac{1}{t})$ ha gli elementi x_i come radici.

Definizione. *Un polinomio nelle variabili $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, invariante per permutazione di queste variabili, si dice polinomio simmetrico.*

Le funzioni e_i si dicono **funzioni simmetriche elementari.**

È un fatto generale che i polinomi simmetrici si possono esprimere come polinomi nelle funzioni simmetriche elementari. Diamo una dimostrazione algoritmica.

Per rendere l'argomento transparente mettiamo in evidenza nelle formule il numero di variabili e denotiamo $e_i^{(k)}$ la i^{th} funzione simmetrica elementare nelle variabili $x_1, \ldots, x_k$. Poiché:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} e_i^{(n-1)} t^i\right)(tx_n + 1) = \sum_{i=0}^{n} e_i^{(n)} t^i$$

abbiamo:

$e_i^{(n)} = e_{i-1}^{(n-1)} x_n + e_i^{(n-1)}$ or $e_i^{(n-1)} = e_i^{(n)} - e_{i-1}^{(n-1)} x_n$.

In particolare, l'omomorfismo $\pi : \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ dato dalla valutazione di x_n in 0 manda funzioni simmetriche in funzioni simmetriche e

$$\pi(e_i^{(n)}) = e_i^{(n-1)}, \ i < n, \ \pi(e_n^{(n)}) = 0.$$

Dato un polinomio simmetrico $f(x_1, \ldots, x_n)$ calcoliamolo per $x_n = 0$, se il polinomio risultante $\overline{f}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ è 0 allora f è divisibile per x_n.

Se questo avviene, per simmetria è divisibile per tutte le variabili e quindi anche per e_n. Effettuiamo la divisione e passiamo ad una funzione simmetrica di grado più basso.

Altrimenti per induzione esiste un polinomio p in $n-1$ variabili che, valutato nelle $n-1$ funzioni simmetriche elementari di $x_1, \dots, x_{n-1}$, dà $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Quindi $f - p(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ è una funzione simmetrica che svanisce per $x_n = 0$.

Fatto questo si ritorna al passo precedente.

L'unicità è implicita nell'algoritmo che esprime un polinomio simmetrico tramite le funzioni simmetriche elementari. Avbbiamo pertanto provato:

Teorema. *Un polinomio simmetrico è un polinomio, in modo unico, nelle funzioni simmetriche elementari.*

Questo teorema va completato con l'enunciato

Proposizione. *I monomi*

$$x_1^{h_1} \dots x_k^{h_k} \qquad \text{con } h_i \leq k - i \tag{32.1.3}$$

sono una base di $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]$ *su* $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_k]$.

Dim. Per induzione su k possiamo dire che i monomi dati privi della variabile x_1 sono una base di $\mathbb{Z}x_2, \dots, x_k]$ sull'anello delle funzioni simmetriche elementari $e_i^{(k-1)}$ in una variabile in meno (senza la x_1).

Sostituendo a $e_i^{(k-1)}$ la sua espressione come $e_i^{(k)} - e_{i-1}^{(k-1)} x_1$ ricorsivamente si esprime ogni polinomio in $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]$ come polinomio in $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, x_1$ infine utilizziamo l'identità

$$0 = x_1^k - e_1 x_1^{k-1} + e_2 x_1^{k-2} - \dots \pm e_k$$

per sostituire ad ogni potenza di x_1 di grado maggiore di k un polinomio in $e_1, e_2, \dots, e_k, x_1$ di grado $< k$ in x_1. Segue che i monomi dati sono generatori di $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]$ come modulo su $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_k]$. La loro indipendenza segue ad esempio dalla teoria di Galois in quanto il campo $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ è di Galois su $\mathbb{Q}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ con gruppo di Galois il gruppo simmetrico S_k delle permutazioni su k elementi che ha $k!$ elementi da cui $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ha dimensione $k!$ su $\mathbb{Q}(e_1, e_2, \dots, e_k)$. Poiché i monomi 32.1.3 sono in numero di $k!$ e generano l'estensione dobbiamo avere che sono linearmente indipendenti. □

Osservazione. Dal Teorema provato è facile verificare che, non solo per $\mathbb{Z}$ ma per ogni anello commutativo di coefficienti A l'anello delle funzioni simmetriche $A[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$ è l'anello dei polinomi $A[e_1, \dots, e_n]$ e che $A[x_1, \dots, x_n]$ ha come base su $A[e_1, \dots, e_n]$ i monomi 32.1.3.

Useremo nel prossimo paragrafo il seguente semplice Lemma che lasciamo da verificare al lettore.

Lemma. *Dati due anelli $A \subset B$ ed un B modulo M, se M è un modulo libero sia su A che su B con la medesima base allora $A = B$.*

Se $B = \oplus A u_i$ è un modulo libero su un anello A con base u_i e $m \subset A$ è un ideale $B/mB = \oplus A/m u_i$ è un modulo libero su A/m con base u_i. Se B è un anello commutativo mB è un ideale.

Se $A \subset B \subset C$ sono anelli e $u_i \in C$ è una base di C su B e $v_j \in B$ una base di B su A (come moduli sinistri ad esempio), allora $v_j u_i$ è una base di C su A.

UNa appplicazione alle funzioni parzialmente simmetriche è la seguente

Proposizione. *$x_1^{h_1} \dots x_k^{h_k} x_{k+1}^{h_{k+1}} \dots x_n^{h_n}$ con $h_i \leq k-i, \forall i \leq k$, $h_{k+j} \leq n-k-j$, $\forall j \leq n-k$ sono una base di $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sull'anello $\mathbb{Z}[u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_{n-k}]$ dove u_i, $i = 1, \dots, k$ sono le simmetriche elementari nelle prime $k-$variabili $x_1, \dots, x_k$ e v_j, $j = 1, \dots, n-k$ sono le le $n-k$ funzioni simmetriche elementari nelle ultime $(n-k)-$variabili $x_{k+1}, \dots, x_n$.*

$\mathbb{Z}[u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_{n-k}]$ è l'anello degli invarianti per l'azione del prodotto dei due gruppi simmetrici $S_k \times S_{n-k}$ che permutano separatamente le prime $k-$variabili $x_1, \dots, x_k$ e le ultime $(n-k)-$variabili $x_{k+1}, \dots, x_n$.

Dim. Sia $A = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$ e quindi $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n] = A[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n]$.

Poichè S_k agisce solo su A per gli invarianti, dalla osservazione precedente si ha $B := \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]^{S_k} = A[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n]^{S_k} = (A^{S_k})[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n]$ e i monomi $x_1^{h_1} \dots x_k^{h_k}$ con $h_i \leq k-i, \forall i \leq k$ sono una base di $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sull'anello B .

Ora applichiamo S_{n-k} che non agisce su A all'anello B ed abbiamo

$$\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]^{S_k \times S_{n-k}} = B^{S_{n-k}} = A^{S_k}[v_1, \dots, v_{n-k}] = \mathbb{Z}[u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_{n-k}]$$

ed inoltre i monomi $x_{k+1}^{h_{k+1}} \dots x_n^{h_n}$ con $h_{k+j} \leq n-k-j$, $\forall j \leq n-k$ sono una base di $B = (A^{S_k})[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n]$ sull'anello $\mathbb{Z}[u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_{n-k}]$. Quindi il risultato segue dal Lemma predetente. □

Se e_i denotano le funzioni simmetriche elementari nelle $n-$variabili gli elementi precedenti soddisfano alle relazioni algebriche implicitamente definite dalla seguente eguaglianza di polinomi

$$(1 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots + t^k u_k)(1 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots + t^{n-k} v_{n-k}) = 1 + \sum_{i=1}^{n} e_i t^i$$

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + x_i t) = 1 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots + t^k u_k, \quad \prod_{j=1}^{n-k}(1 + x_{k+j} t) = 1 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots + t^{n-k} v_{n-k}$$

da cui

$$(1 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots + t^k u_k)(1 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots + t^{n-k} v_{n-k}) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i t) = 1 + \sum_{i=1}^{n} e_i t^i$$

32.2 In questo paragrafo conviene lavorare con spazi di dimensione infinita ma CW-complessi.

$\mathbb{C}^\infty$ è lo spazio vettoriale infinito con base e_i, $i = 1, \dots, \infty$ con la topologia debole. Da questo si deduce lo spazio $\mathbb{P}^\infty := \cup_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}^i$ con la topologia debole.

PROPOSIZIONE. $H^*(\mathbb{P}^\infty) = \mathbb{Z}[x]$

Useremo $(\mathbb{P}^\infty)^k$ ($k-$uple di rette qualunque) e dalla formula di Künneth

$$H^*[(\mathbb{P}^\infty)^k] = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$$

l'anello dei polinomi in k variabili.

Il secondo spazio importante è la Grassmanniana G_k dei sottospazi $k-$dimensionali di $\mathbb{C}^\infty$ si ha anche che $G_k = \cup_{i=k}^\infty G_{k,i}$.

Il terzo spazio è la varietà $F_k := \{(r_1, r_2, \ldots, r_k)\}$ delle $k-$uple di rette ortogonali in $\mathbb{C}^\infty$ che pensiamo in modo naturale contenuta in $(\mathbb{P}^\infty)^k$ ($k-$uple di rette qualunque).

Abbiamo una proiezione canonica $p_k : F_k \to G_k$ cha associa ad una $k-$uple di rette ortogonali il sottospazio da esse generato.

Il primo lemma importante è.

LEMMA. *L'inclusione $F_k \to (\mathbb{P}^\infty)^k$ è una equivalenza omotopica e quindi induce un isomorfismo in coomologia.*

DIM. Ci accontenteremo di verificare l'isomorfismo in coomologia (il resto segue dal teorema di Whitehead in omotopia).

La prima osservazione è la seguente, sei $V \subset \mathbb{C}^\infty$ un sottospazio di dimensione finita e sia $V^\perp$ il suo ortogonale (esso stesso isomorfo a $\mathbb{C}^\infty$) allora l'inclusione $\mathbb{P}(V^\perp) \subset \mathbb{P}^\infty$ induce un isomorfismo in coomologia, infatti entrambi gli anelli di coomologia di questi spazi sono un anello di polinomi in un generatore che potremo chiamare x, y basta verificare che x va in y per questo basta restringersi ad un sottospazio di dimensione finita per cui la teoria è quella della inclusione di due spazi proiettivi (di dimensione > 0) che induce isomorfismo canonico in H^2.

Ora applichiamo il teorema di Leray Hirsch e l'induzione su k fibrando F_k su $\mathbb{P}^\infty$ ad esempio per proiezione sul primo fattore con fibra F_{k-1}.

Per induzione i monomi nelle variabili $x_i,\ i = 2, \ldots, k$ sono una base della coomologia della fibra per ogni fibra e quindi il teorema segue. $\square$

Il gruppo simmetrico S_k opera su F_k permutando le $k-$rette ed induce in coomologia la azione di permutazione sulle k variabili x_i. Per ogni permutazione σ il diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} F_k & \xrightarrow{\sigma} & F_k \\ {\scriptstyle p_k}\downarrow & & {\scriptstyle p_k}\downarrow \\ G_k & \xrightarrow{1} & G_k \end{array}$$

quindi risulta che la coomologia di G_k ha immagine nelle funzioni simmetriche delle x_i.

Torniamo all'omomorfismo $i : H^*(G_k) \to \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots, e_k]$.

Teorema. *i è un isomorfismo.*

Dim. Consideriamo i monomi $x_1^{h_1} \dots x_k^{h_k}$ con $h_i \leq k - i$ che sappiamo sono una base di $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]$ su $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_k]$ e proviamo per induzione che soddisfano alle ipotesi del Teorema di Leray Hirsch Per la fibrazione $F_k \to G_k$.

Una fibra $\mathcal{F}_k$ (varietà delle bandiere complete in $\mathbb{C}^k$), consiste nell'insieme di tutte le $k-$uple di rette ortogonali che formano come somma diretta uno spazio prefissato $V \cong \mathbb{C}^k$ che per semplicità possiamo supporre generato dai primi k elementi della base. A questo spazio applichiamo di nuovo il metodo della fibrazione proiettando una $k-$upla di rette sulla prima retta che forma un elemento variabile in $\mathbb{P}^{k-1}$, la fibra di questa fibrazione sono le $k-1-$uple di rette ortogonali con somma un dato spazio di dimensione $k-1$ ne segue che la coomologia della base di questa fibrazione ha come base le potenze x_1^h, $h \leq k-1$ mentre per la fibra per induzione abbiamo come base i monomi $x_2^{h_2} \dots x_k^{h_k}$ con $h_i \leq k - i$ da cui segue dal Teorema di Leray Hirsch che la coomologia della fibra ha come base i monomi richiesti e dunque che la coomologia di F_k è un modulo libero sulla coomologia di G_k su tali monomi.

In particolare la coomologia di G_k è un sottoanello A della coomologia $H^*(F_k) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]$ e, dalla prima parte, $A \subset \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_k]$.

Da quanto appena visto $H^*(F_k)$ è modulo libero, sia su A che su $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]$ relativamente alla medesima base di monomi. Chiaramente questo è possibile se e solo se $A = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]$ (Lemma 32.1). □

Corollario. *La coomologia della varietà delle bandiere $\mathcal{F}_k$ è isomorfa all'anello quoziente $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]/(e_1, e_2, \dots, e_k)$.*

Dim. Per definizione $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ è l'ideale generato dalle funzioni simmetriche elementari. Dalla descrizione di $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]$ come modulo libero su $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_k]$ segue che tale ideale è formato dalle combinazion lineari dei monomi $x_1^{h_1} \dots x_k^{h_k}$ con coefficienti polinomi in $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_k]$ senza termine costante, il quoziente $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]/(e_1, e_2, \dots, e_k)$ ha pertanto come base i monomi $x_1^{h_1} \dots x_k^{h_k}$ con $h_i \leq k - i$.

Restringiamo la coomologia di F_k alla fibra $\mathcal{F}_k$. La parte $Z[e_1, e_2, \dots, e_k]$ proviene dalla coomologia di G_k e la composizione della inclusione di $\mathcal{F}_k$ in F_k con la proiezone su G_k è la applicazione costante in un punto, ne segue che la applicazione indotta $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_k] \to H^*(F_k)$ manda gli elementi e_i a 0.

Ne segue un morfismo da $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]/(e_1, e_2, \dots, e_k)$ a $H^*(F_k)$ che deve essere un isomorfismo in quanto le due varietà hanno come base gli stessi monomi. □

Con questi calcoli si può affrontare il calcolo della coomologia di una grassmanniana $G_{k,n}$.

32.3 Torniamo alla varietà delle bandiere $\mathcal{F}_n$ nello spazio $\mathbb{C}^n$ e costruiamo la proiezione $\pi_k : \mathcal{F}_k \to G_{k,n}$ che associa ad una $n-$upla di rette ortogonali la somma delle prime k fra esse.

La fibra di uno spazio $U \subset \mathbb{C}^n$ è formata dalle $n-$uple di rette ortogonali per cui la somma delle prime k è U e la somma delle ultime $n-k$ è $U^\perp$ lo spazio ortogonale ad U.

Quindi la fibra è il prodotto di due varietà di bandiere $\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_{n-k}$.

Dal teorema di Leray Hirsch deduciamo che i monomi

$$(32.3.1)\quad x_1^{h_1} \dots x_k^{h_k} x_{k+1}^{h_{k+1}} \dots x_n^{h_n} \qquad \text{con} \quad h_i \leq k-i, \forall i \leq k,\ h_{k+j} \leq n-k-j,\ \forall j \leq n-k$$

sono una base della coomologia di $\mathcal{F}_k$ su quella di $G_{k,n}$.

Abbiamo due inclusioni $i_k : G_{k,n} \to G_k,\ i_{n-k} : G_{k,n} \to G_{n-k}$ ottenute immergendo $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^\infty$ ed associando ad un punto di $G_{k,n}$ che è un sottospazio U di $\mathbb{C}^n$ rispettivamente U ovvero $U^\perp$.

Il morfismo indotto in coomologia mostra che le k funzioni simmetriche elementari $u_i,\ i = 1, \dots, k$ nelle prime $k-$variabili $x_1, \dots, x_k$ ed anche le le $n-k$ funzioni simmetriche elementari nelle ultime $(n-k)-$variabili $x_{k+1}, \dots, x_n$ che indicheremo con $v_j,\ j = 1, \dots, n-k$ sono nella coomologia di $G_{k,n}$.

Teorema. *1) La coomologia di $G_{k,n}$ è generata dagli elementi $u_i,\ i = 1, \dots, k,\ v_j,\ j = 1, \dots, n-k$.*

2) La coomologia di $G_{k,n}$ è il sottoanello di $H^*(F_n) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(e_1, e_2, \dots, e_n)$ invariante per l'azione del prodotto dei due gruppi simmetrici $S_k \times S_{n-k}$ che permutano separatamente le prime $k-$variabili $x_1, \dots, x_k$ e le ultime $(n-k)-$variabili $x_{k+1}, \dots, x_n$.

3) Gli elementi precedenti soddisfano alle relazioni algebriche

$$\sum_{i=1}^{\min(k,j)} u_i v_{j-i} = 0,\ j = 1, \dots, n$$

implicitamente definite dalla seguente eguaglianza di polinomi

$$(32.3.1)\qquad (1 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots + t^k u_k)(1 + v_1 t + v_2 t^2 + \dots + t^{n-k} v_{n-k}) = 1$$

e queste relazioni generano l'ideale delle relazioni fra questi elementi.

Dim. 1) Dalla Proposizione 32.1 segue che l'anello $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ è un modulo libero sull'anello generato dagli elementi $e_i,\ i = 1, \dots, k,\ f_j,\ j = 1, \dots, n-k$ con base i monomi 32.3.1.

Ne segue dal Lemma 32.1 la prima parte.

2) Dalla teoria delle funzioni simmetriche il sottoanello di $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generato dagli elementi $u_i,\ i = 1, \dots, k,\ v_j,\ j = 1, \dots, n-k$ coincide con gli invarianti per l'azione del prodotto dei due gruppi simmetrici $S_k \times S_{n-k}$ che permutano separatamente le prime $k-$variabili $x_1, \dots, x_k$ e le ultime $(n-k)-$variabili $x_{k+1}, \dots, x_n$.

Per dedurre che la stessa proprietà vale per il quoziente possiamo ragionare come segue, prima di tutto si vede facilmente che ci si può ridurre al caso dei coefficienti razionali per cui l'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ si decompone in somma diretta di rappressentazioni irriducibili del gruppo finito $S_k \times S_{n-k}$ da cui segue facilmente che gli invarianti di un suo qualunque quoziente sono l'immagine degli invarianti come desiderato.

3) Abbiamo

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + x_i t) = 1 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots + t^k u_k, \ \prod_{j=1}^{n-k}(1 + x_{k+j} t) = 1 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots + t^{n-k} v_{n-k}$$

da cui

$$(1+u_1 t+u_2 t^2+\cdots+t^k u_k)(1+v_1 t+v_2 t^2+\cdots+t^{n-k} v_{n-k}) = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i t) = 1+e_1 t+e_2 t^2+\cdots+e_n t^n$$

e quindi le relazioni 32.3.1 seguono dal Corollario 32.2.

Per provare che queste relazioni generano l'ideale di tutte le relazioni basta osservare che nell'anello $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ le relazioni altre non sono che quelle che definiscono la coomologia della varietà delle bandiere. $\square$

Osservazione. Nell'anello definito dai generatori u_i, v_j modulo le relazioni dedotte da $(1 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots + t^k u_k)(1 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots + t^{n-k} v_{n-k}) = 1$ gli elementi v_j si possono esprimere ricorsivamente tramite gli u_i (e viceversa).

Esercizio. Provare che come rappresentazione del gruppo simmetrico la coomologia $H^*(\mathcal{F}_n, \mathbb{Q})$ è isomorfa alla rappresentazione regolare e descrivere gli invarianti di tale rappresentazione per $S_k \times S_{n-k}$,

La teoria della Grassmanniana và completatata con la interpretazione omologica delle celle di Schubert (cf. 16.2). Vogliamo esplicitare la dualità fra omologia e coomologia utilizzando come base della omologia la base naturale indotta dalle classi delle celle di Schubert $C_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ (16.2).

Indichiamo con $c_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ la classe di omologia associata a tale cella.

La formula fondamentale è la formula di Giambelli, per enunciarla ricordiamo che il prodotto $\cap$ applicato alla classe fondamentale ω induce un isomorfismo fra coomologia ed omologia vogliamo esplicitare gli elementi $\lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \in H^*(G_{n.m})$ per cui $\omega \cap \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = c_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$.

Riprendiamo dunque le classi di coomologia v_i ed affermiamo che

$$\lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \det(v_{i_h+h-j}), \ h, j = 1, \ldots, n.$$

da inserire

————

§33 Omomorfismo di Gysin