§30 Omotopia e spazi funzionali

NOTA Discutiamo alcune proprietà fondamentali della omotopia. Lo studio delle classi di omotopia di applicazioni fra due spazi Y, X, nel caso in cui tali spazi siano CW-complessi può essere effettuato attraverso lo studio del caso particolare in cui Y è una sfera.

Come nel caso del gruppo fondamentale è possibile introdurre una struttura di gruppo restringendosi a considerare le applicazioni di spazi puntati.

30.1 Sia X uno spazio puntato e x_0 il punto fissato, consideriamo per ogni n la sfera $S^n := \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \sum x_i^2 = 1\}$ e puntiamola con il punto $p_0 = (0, 0, \ldots, 0, -1)$.

Definizione. Indichiamo con $\pi_n(X, x_0)$ l'insieme delle applicazioni continue fra S^n ed X che mandano p_0 in x_0 a meno di omotopie F che fissano p_0, ovvero $F(p_0, t) = x_0$.

Una descrizione del tutto equivalente, ma utile, di $\pi_n(X, x_0)$, è come insieme delle classi delle applicazioni continue $f : D^n \to X$ con $f(S^{n-1}) = x_0$ a meno di omotopie $F(x, t)$ con $F(x, t) = x_0,\ \forall t, \forall x \in S^{n-1}$.

La corrispondenza biunivoca si deduce facilmente dal fatto che:

Lemma. $D^n / S^{n-1} = S^n$.

Dim. Si prenda l'applicazione da $D^n := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, |\underline{x}| \leq 1\}$ ad $S^n := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, |\underline{x}| = 1\}$ è

$$\underline{x} \to \begin{cases} (2\underline{x}, \sqrt{1 - 4|\underline{x}|^2}) & \text{se } |\underline{x}| \leq 1/2 \\ (4(1 - |\underline{x}|)\underline{x}, -\sqrt{1 - (4(1 - |\underline{x}|)|\underline{x}|)^2}) & \text{se } |\underline{x}| \geq 1/2 \end{cases}$$

che manda la parte di $|\underline{x}| \leq 1/2$ nella calotta superiore e il resto nella calotta inferiore contraendo i punti del bordo nel punto $(0, -1)$.

Osservazione Data una applicazione $f : S^i \to X$ questa è omotopa alla costante se e solo se si estende ad una applicazione continua $g : D^{i+1} \to X$.

Se $\pi_0(X, x_0)$ è formato dalle classi di omotopia di applicazioni da $S^0 := \{-1, 1\}$ ad X che mandano -1 in x_0. Quindi 1 può essere mandato in un punto P qualunque e due

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

mappe che mandano 1 in P, Q sono omotope se e solo se P, Q sono nella stessa componente connessa per archi, pertanto:

Proposizione. *$\pi_0(X, x_0)$ si identifica all'insieme delle componenti connesse per archi di X.*

Proveremo ora che;

Teorema. *Per ogni $n > 0$, l'insieme $\pi_n(X, x_0)$ ha una struttura di gruppo che è abeliano per $n > 1$ e che per $n = 1$ coincide con quella studiata nel §3.*
$\pi_n(X, x_0)$ è un funtore dalla categoria omotopica (delle mappe ed omotopie fra spazi puntati) alla categoria dei gruppi.

Dim. 1) La definizione di prodotto di due applicazioni si ottiene osservando che, presa la sfera S^n e collassando ad un punto la sfera S^{n-1} con coordinata $x_n = 0$ abbiamo un bouquet $S^n \vee S^n$ di 2 $n-$sfere attaccate per il punto base, immagini rispettivamente (secondo quanto visto nel llemma precedente) delle due calotte $C^n_\pm := \{\underline{x} \in S^n | \pm x_n \geq 0\}$.

$$S^n \xrightarrow{p} S^n/S^{n-1} = C^n_+/S^{n-1} \vee C^n_-/S^{n-1} = S^n \vee S^n$$

Date due applicazioni continue $f, g : S^n \to X$ la composizione

$$S^n \xrightarrow{p} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X$$

definisce la composizione $f \circ g$ che si deve mostrare ben definita a meno di omotopia.

Per verificare che questa applicazione è ben definita si consideri il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{p} & S^n \vee S^n \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p \vee 1}\downarrow \\ S^n \vee S^n & \xrightarrow{1 \vee p} & S^n \vee S^n \vee S^n \end{array}$$

che si verifica facilmente è commutativo a meno di omotopia.

2) Data una applicazione $f : X \to Y$ di spazi puntati ed una applicazione $g : S^n \to X$ la composizione $f \circ g$ definisce l'applicazione funtoriale richiesta $\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y, y_0)$. Prima di provare la commutatività per $n > 1$ facciamo alcune ulteriori considerazioni. □

La costruzione discussa in 1) è più formale e riguarda qualunque sospensione di uno spazio dato, ricordiamo che la sospensione di X si definisce a partire dal cilindro $X \times I$ e collassando separatamente la base superiore e quella inferiore ad un punto.

Per una costruzione che preservi i punti base è necessario anche collassare l'intero segmento $x_0 \times I$ ad un punto che è il punto base della sospensione che si dice *sospensione ridotta di X* e che indicheremo con $\Sigma(X)$.

Esercizio (cf, i paragrafi successivi) $\Sigma(X)$ ed $\Omega(X)$ sono funtori aggiunti (dalla categoria degli spazi puntati ed anche dalla categoria omotopica degli spazi puntati, per ogni Y si ha un isomorfismo naturale:

$\mathcal{C}(\Sigma(X), Y) = \mathcal{C}(X, \Omega(Y))$. Per le classi di omotopia da $\Sigma(X)$ ad uno spazio Y possiamo introdurre una struttura di gruppo.

Se nella sospensione ridotta collassiamo *l'equatore* $X \times 1/2$ ad un punto abbiamo una proiezione sul bouquet $\Sigma(X) \xrightarrow{p} \Sigma(X) \vee \Sigma(X)$ il medesimo diagramma di prima

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(X) & \xrightarrow{p} & \Sigma(X) \vee \Sigma(X) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p \vee 1} \\ \Sigma(X) \vee \Sigma(X) & \xrightarrow{1 \vee p} & \Sigma(X) \vee \Sigma(X) \vee \Sigma(X) \end{array}$$

è commutativo a meno di omotopia.

La composizione è solo una parte della proposta struttura di gruppo, bisogna introdurre l'elemento neutro, che evidentemente è la classe della applicazione costante e l'inverso, per questo ragioniamo ancora con la sospensione e definiamo $i : \Sigma(X) \to \Sigma(X)$ con la formula $i(x,t) := (x, 1-t)$ chiaramente compatibile con le identificazioni fatte, lasciamo al lettore di verificare

Lemma. *Le due applicazioni*

$$\Sigma(X) \xrightarrow{p} \Sigma(X) \vee \Sigma(X) \xrightarrow{i \vee 1} \Sigma(X) \vee \Sigma(X), \ \Sigma(X) \xrightarrow{p} \Sigma(X) \vee \Sigma(X) \xrightarrow{1 \vee i} \Sigma(X) \vee \Sigma(X)$$

sono omotope alla costante.

Si definisce pertanto l'inversa di una applicazione $f : \Sigma(X) \to Y$ come $f \circ i$.

Ne segue

Teorema. *Le classi di omotopia di applicazioni puntate fra $\Sigma(X)$ ed Y formano naturalemte un gruppo.*

Per capire meglio le implicazioni di questa costruzione vanno fatti due passi, uno sugli spazi di applicazioni e l'altro sulla nozione di gruppo in una categoria.

30.2 Partiamo dalla semplice osservazione sulla legge esponenziale $C^{A \times B} = (C^B)^A$ che in teoria degli insiemi esprime il fatto che una funzione $f(a,b) : A \times B \to C$ può equivalentemente essere pensata come una funzione nella variabile $a \in A$ a valori le funzioni da B a C.

È possibile formulare un enunciato simile per le funzioni continue, per questo dati spazi topologici B, C si deve definire una struttura topologica sullo spazio $\mathcal{C}(B,C)$ delle funzioni continue da B a C in modo da identificare

$$\mathcal{C}(A, \mathcal{C}(B,C)) = \mathcal{C}(A \times B, C)$$

Per definire una topologia in $\mathcal{C}(B,C)$ definiamo prima di tutto alcuni insiemi particolari di funzioni

$$\mathcal{N}(K,U) := \{f : B \to C | \, f(K) \subset U\}$$

La topologia che si usa mettere sullo spazio $\mathcal{C}(B,C)$ è la *topologia compatta aperta* in cui una base di intorni è data dagli insiemi $\mathcal{N}(K,U) := \{f : B \to C | \, f(K) \subset U\}$ con K compatto in B e U aperto in C.

Se B è compatto e C è uno spazio metrico si defisce una distanza in $\mathcal{C}(B,C)$ ponendo

$$d(f,g) := \max_{b \in B} d(f(b)g(b))$$

e si verifica che la topologia compatta aperta è quella indotta da questa metrica.

Se B è solo localmente compatto si può definire una famiglia di semimetriche $d_K(f,g) := \max_{b \in K} d(f(b)g(b)$ al variare di K compatto che inducono ancora le data topologia.

La topologia compatta aperta è costruita in modo tale che

Proposizione. *1) Se B è localmente compatto la applicazione valutazione*

$$v : B \times \mathcal{C}(B,C) \to C$$

data da $(b,f) \to f(b)$ è continua.

2) Il funtore $\mathcal{C}(-,C)$ è un funtore a valori negli spazi topologici.

3) Il funtore $\mathcal{C}(A,-)$ è un funtore a valori negli spazi topologici.

4) Dati 3 spazi topologici A,B,C, se B è localmente compatto la composizione

$$F : \mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \to \mathcal{C}(A,C)$$

è continua.

Dim. 1) Dato U aperto in C e $f(b) \in U$, sia W un intorno compatto di b tale che $f(W) \subset U$, si ha allora che $W \times \mathcal{N}(W,U) \subset v^{-1}(U)$.

2) Se $f : X \to Y$ è una funxione continua la mappa indotta $\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}(Y,B) \to \mathcal{C}(X,B)$, $\mathcal{C}(f)(g) := g \circ f$ è tale che, per K compatto in X ed U aperto in B si ha $g \in \mathcal{C}(f(K),B)$ se e solo se $g \circ f \in \mathcal{C}(K,B)$ ovvero

$$\mathcal{C}(f)^{-1}(\mathcal{C}(K,U)) = \mathcal{C}(f(K),U).$$

3) Se $f : X \to Y$ è una funxione continua la mappa indotta $\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}(A,X) \to \mathcal{C}(A,Y)$, $\mathcal{C}(f)(g) := f \circ g$ è tale che, per K compatto in X ed U aperto in B si ha

$$\mathcal{C}(f)^{-1}(\mathcal{C}(K,U)) = \mathcal{C}(K, f^{-1}(U)).$$

4) Sia K compatto in A, U aperto in C e $f : A \to B$, $g : B \to C$ con $g \circ f \in \mathcal{C}(K,U)$.

Poichè B è localmente compatto esiste un intorno M di $f(K)$ a chiusura $\overline{M}$ compatta per cui $f(\overline{M}) \subset U$ quindi $\mathcal{C}(K,M) \times \mathcal{C}(\overline{M},U)$ è un intorno di (f,g) contenuto in $F^{-1}(\mathcal{C}(K,U))$. $\square$

Osservazione Prendendo come A lo spazio ridotto ad un punto p si identifichi $\mathcal{C}(\{p\},X) = X$ e si osservi che 1 è un caso speciale di 4).

Per quello che segue è utile la seguente riduzione

Lemma. *1) Dato un ricoprimento aperto finito V_i di un compatto K esiste un ricoprimento di K formato da compatti $K_i \subset V_i$.*

2) Data una base U_i di aperti di C gli aperti $\mathcal{N}(K, U_i)$ con K compatto sono una sottobase della topologia compatta aperta di $\mathcal{C}(B, C)$.

Dim. 1) Lo lasciamo per esercizio al lettore basta sfruttare la normalità.

2) Prendiamo un aperto U in C, un compatto K in Bed un elemento $f \in (K, U)$ ovvero, $f : K \to U$.

Esprimiamo $U = \cup_{i \in I} U_i$ tramite aperti della base data.

Dalla parte precedente, esiste un numero finito di compatti $K_i \subset K$ tali che $K = \cup_{i \in J} K_i$ e $f(K_i) \subset U_i$ da cui

$$f \in \cap_{i \in J} \mathcal{N}(K_i, U_i) \subset \mathcal{N}(K, U).$$

Data la arbitrarietà di f questo prova il Lemma. □

Il teorema fondamentale è

Teorema. *Se A, B, C sono di Hausdorf e B è localmente compatto abbiamo un omeomorfismo di spazi topologici $\mathcal{C}(A, \mathcal{C}(B, C)) = \mathcal{C}(A \times B, C)$.*

Dim. Bisogna provare molte cose cominciamo con la prima.

1) Data una funzione $f \in \mathcal{C}(A, \mathcal{C}(B, C))$ definiamo la funzione di due variabili $F(a, b) := f(a)(b)$ dobbiamo dimostrare che $F : A \times B \to C$ è una funzione continua.

Bisogna provare che, dato un aperto $U \in C$ e dati $a_0 \in A, b_0 \in B$ esiste un intorno V di a_0 ed uno W di b_0 con $F(a, b) \in U$ per $a \in V,\ b \in W$.

In altre parole dobbiamo avere che, se $a \in V$ si ha $f(a) \in \mathcal{N}(W, U)$.

Dalla continuità di $f(a_0) : B \to C$ esiste un intorno W di b_0, che per l'ipotesi fatta su B, possiamo scegliere a chiusura compatta K, con $f(a_0)(K) \subset U$.

Poiché $\mathcal{N}(K, U)$ è un aperto di $\mathcal{C}(B, C)$, dalla continuità di f segue l'esistenza di un intorno V con le proprietà richieste.

Abbiamo quindi provato l'esistenza della applicazione

$$\mathcal{C}(A, \mathcal{C}(B, C)) \xrightarrow{i} \mathcal{C}(A \times B, C)$$

bisogna ora provare che questa applicazione è continua.

Osserviamo prima di tutto che, se K_1, K_2 sono due compatti in A, B rispettivamente, ed U è un aperto di C si ha (per le definizioni date):

$$i^{-1}(\mathcal{N}(K_1 \times K_2, U)) = \mathcal{N}(K_1, \mathcal{N}(K_2, U)).$$

Consideriamo più in generale una funzione $f \in \mathcal{C}(A, \mathcal{C}(B, C))$ ed un aperto $\mathcal{N}(K, U)$ di $\mathcal{C}(A \times B, C)$ con $K \subset A \times B$ compatto ed $U \subset C$ aperto per cui

$$F := i(f) \in \mathcal{N}(K, U) \quad \text{ovvero} \quad F(K) \subset U.$$

Dobbiamo trovare un intorno di f tutto contenuto in $i^{-1}(\mathcal{N}(K,U))$.

Siano M, N le due proiezioni di K in A, B rispettivamente, si ha che M, N sono compatti e $K \subset M \times N$. Dalla continuità di F segue che, per ogni punto $p \in K$ possiamo trovare due intorni compatti M_p, N_p in M, N rispettivamente per cui $F(M_p \times N_p) \subset U$.

Poiché K è compatto esiste un numero finito m di punti p_i per cui

$$K \subset \cup_{i=1}^{m} M_{p_i} \times N_{p_i}.$$

Ne segue dunque che

$$f \in \cap_{i=1}^{m} \mathcal{N}(M_{p_i}, \mathcal{N}(N_{p_i}, U)) = i^{-1}(\cap_{i=1}^{m} \mathcal{N}(M_{p_i} \times N_{p_i}, U)) \subset i^{-1}(\mathcal{N}(K,U)).$$

Abbiamo provato che i è continua.

2) Ora dobbiamo andare nel senso inverso.

Definiamo $j : \mathcal{C}(A \times B, C) \to \mathcal{C}(A, \mathcal{C}(B,C))$ ponendo $j(F)(a)(b) := F(a,b)$.

Dobbiamo prima di tutto provare che j è ben definita.

Fissato $a \in A$ proviamo che la funzione $f(a) = j(F)(a) : B \to C$ è continua, ovvero dato $b \in B$ ed U aperto in C con $F(a,b) \in U$ esiste V intorno aperto di b con $F(a,V) \subset U$, questo è chiaro dalla definizione di topologia prodotto.

Ora bisogna provare che $a \to f(a)$ è una funzione continua da A a $\mathcal{C}(B,C)$.

Dato un aperto $\mathcal{N}(K,U)$ ed $a_0 \in A$ con $F(a_0, K) \subset U$ bisogna trovare un aperto V di a_0 con $F(V,K) \subset U$. Dalla definizione di topologia prodotto preso comunque un punto $p \in K$ esistono intorni aperti V_p di a_0 ed U_p di p per cui $f(V_p \times U_p) \subset U$. Poichè K è compatto un numero finito di U_p coprono K e basta prendere come V l'intersezione dei corrispondenti V_p.

Finalmente basta provare che j è essa stessa una funzione continua poiché, insiemisticamente, j è inversa alla i.

Possiamo applicare il Lemma e provare che $j^{-1}(\mathcal{N}(H, \mathcal{N}(K,U))$ con H compatto in A, K compatto in B ed U aperto in C è aperto.

Per definizione

$$j^{-1}[\mathcal{N}(H, \mathcal{N}(K,U))] = \mathcal{N}(H \times K, U)$$

da cui il Teorema. $\square$

30.3 Uno degli esempi più interessanti di spazi di funzioni è lo spazio $\mathcal{C}(I,X)$ con $I = [0,1]$ l'intervallo.

Da questo spazio si deduce un importante sottospazio per X puntato in x_0:

$$E_X := \{f \in \mathcal{C}(I,X) | \, f(0) = x_0\} \tag{30.3.1}$$

Proposizione. *E_X è contraibile.*

Dim. L'applicazione $F(f,s) : E_X \times I \to E_X$ definita da $F(f,s)(t) := f(st)$ è la contrazione richiesta.

Proviamo che è continua. Prendiamo un aperto $\mathcal{C}(K,U)$ ed (f,s) tale che $f(sK) \subset U$.

Esiste un intorno chiuso V di sK ed un intorno W di s con $f(V) \subset U$, $WK \subset V$ per cui $\mathcal{C}(V,U) \times W$ è un intorno di (f,s) contenuto in $F^{-1}(\mathcal{C}(K,U))$. □

In E_X abbiamo inoltre il sottospazio

$$\Omega(X) := \{f | f(0) = f(1) = x_0\} \quad \text{loop space.} \tag{30.3.1}$$

Dal Teorema precedente otteniamo le identità fondamentali (formule di aggiunzione fra funtori cf. Cap. 2.4) per ogni spazio puntato X che legano sospensione e loop space, cono e spazio dei cammini puntati:

$$\mathcal{C}(\Sigma(X),Y) = \mathcal{C}(X,\Omega(Y)), \quad \mathcal{C}(C(X),Y) = \mathcal{C}(X,E_Y). \tag{30.3.2}$$

Le operazioni di sospensione e di loop si possono ripetere e costruire gli spazi $\Sigma^k(X)$, $\Omega^h(Y)$.

§31 Gruppi e cogruppi in una categoria

31.1 Ora veniamo all'aspetto categorico, dobbiamo dare la nozione di *gruppo* per un oggetto di una categoria $\mathcal{A}$.

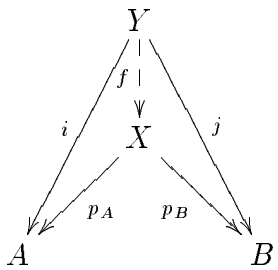
Per questo è necessario premettere la nozione di prodotto di due oggetti A, B.

Consideriamo il funtore a valori insiemi $X \to \mathcal{A}(X,A) \times \mathcal{A}(X,B)$ se questo funtore è rappresentabile, dal Lemma di Yoneda un oggetto che lo rappresenta è unico a meno di un unico isomorfismo.

Lo denoteremo con $A \times B$ e lo chiameremo *prodotto* dei due oggetti A, B.

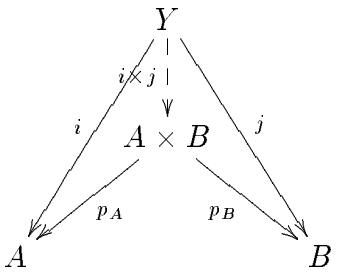
$A \times B$ è equipaggiato di due *morfismi di proiezione* $p_A : A \times B \to A$, $p_B : A \times B \to B$ che inducono (sempre per il Lemma di Yoneda) funtorialmente le due proiezioni sui fattori di $\mathcal{A}(X,A) \times \mathcal{A}(X,B)$.

È comodo riformulare la costruzione funtoriale nel linguaggio dei problemi universali, il prodotto fra due oggetti A, B è un oggetto X munito di due morfismi $p_A : X \to A$, $p_B : X \to B$ tali che per ogni $i : Y \to A$, $j : Y \to B$ esiste un unico $f : Y \to X$ che rende commutativo:

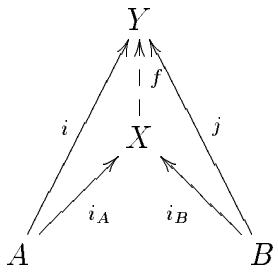


Nella categoria degli spazi topologici con le funzioni continue, ma anche nella categoria omotopica, il prodotto di due spazi è il prodotto categorico.

Di solito il prodotto di A, B si indica con $A \times B$ le due proiezioni con $p_A,\ p_B$ e, l'unico morfismo $f : X \to A \times B$ per cui $p_A \circ f = i,\ p_B \circ f = j$ si denoterà con $i \times j$ cosı che il precedente diagramma commutativo si legge:

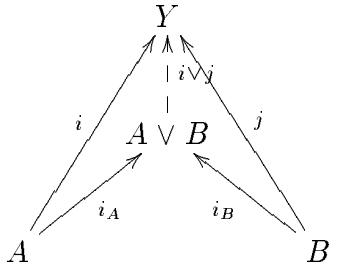


La dualià permette immediatamente di definire il *coprodotto* che è prodotto per la categoria opposta e quindi soddisfa le proprietà universali duali:



Esercizio. Nella categoria degli spazi topologici puntati con le funzioni continue, ma anche nella categoria omotopica, il coprodotto di due spazi A, B è il bouquet $A \vee B$.

Conviene dunque in genere rappresentare il coprodotto di due oggetti A, B con il simbolo $A \vee B$ e con $i \vee j$ il morfismo del diagramma:



Nella categoria dei funtori (covarianti o controvarianti) da una categria $\mathcal{A}$ agli insiemi il prodotto di due funtori F, G è il funtore che ad un oggetto A associa $F(A) \times G(A)$ e ad un morfismo f il morfismo $F(f) \times G(f)$.

Esercizio Dato un insieme parzialmente ordinato pensato come categoria provare che il prodotto di due elementi a, b, se esiste è $\inf(a, b)$, il massimo fra gli elementi $x \leq a,\ x \leq b$. Similmente per il coprodotto.

Provare che, nella categoria dei gruppi il coprodotto è il prodotto libero.

Provare che, nella categoria dei gruppi abeliani il coprodotto è la somma diretta (e coincide con il prodotto!).

Provare che, nella categoria degli anelli il prodotto è la somma diretta.

Provare che, nella categoria degli anelli commutativi con unità il coprodotto è il prodotto tensoriale (ed in quelli non commutativi?).[1]

Ora possiamo definire la nozione di struttura di gruppo per un ogetto A di $\mathcal{A}$.

Definizione. Una struttura di gruppo per A consiste nel dare, per ogni oggetto X, una struttura di gruppo all'insieme $\mathcal{A}(X, A)$, funtoriale in x. Ovvero per ogni morfismo $f : X \to Y$ deve essere $\mathcal{A}(Y, A) \xrightarrow{f^*} \mathcal{A}(X, A)$ un morfismo di gruppi.

Una struttura di gruppo è definita dando sia la moltiplicazione

$$m_X : \mathcal{A}(X, A) \times \mathcal{A}(X, A) \to \mathcal{A}(X, A)$$

che un elemento identità

$$1_X : 1 \to \mathcal{A}(X, A)$$

dove 1 indica il funtore costante con valore un insieme con un elemento ed infine l'inverso

$$i_X : \mathcal{A}(X, A) \to \mathcal{A}(X, A)$$

Poi devono valere gli assiomi di gruppo ovvero la associatività, il fatto che 1 è elemento neutro e che i_X fornisce l'inverso di ogni elemento.

Se esiste il prodotto $A \times A$ e se il funtore controvariante costante a valore un solo elemento è rappresentabile da un oggetto che chiameremo ancora 1 e diremo *oggetto finale* il Lemma di Yoneda implica che una struttura di gruppo su A è equivalente a dare morfismi

$$A \times A \xrightarrow{m} A,\ 1 \xrightarrow{1} A,\ A \xrightarrow{i} A$$

che soddisfino gli assiomi

$$\begin{array}{ccc} A \times A \times A & \xrightarrow{1_A \times m} & A \times A \\ {\scriptstyle m \times 1_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ A \times A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

[1] In geometria algebrica la categoria opposta a quella degli anelli commutativi finitamente generati su un campo algebricamente chiuso e senza nilpotenti è la categoria delle varietà affini, il coprodotto di anelli corrisponde geometricamente al prodotto di varietà.

$$\begin{array}{ccc} 1 \times A & \xrightarrow{1 \times 1_A} & A \times A \\ {\scriptstyle j_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ A & \xrightarrow{1_A} & A \\ A \times A & \xrightarrow{i_A \times 1_A} & A \times A \\ {\scriptstyle \delta_A}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ A & \xrightarrow{1_A} & A \end{array}$$

dove j_A è indotto dal Lemma di Yoneda $\mathcal{A}(X,1) \times \mathcal{A}(X,A) = \mathcal{A}(X,A)$ e δ_A è anche indotto dal Lemma di Yoneda e dalla immersione diagonale di funtori

$$\mathcal{A}(X,A) \stackrel{\delta}{\to} \mathcal{A}(X,A) \times \mathcal{A}(X,A)$$

Definizione. Un co-gruppo in una categoria $\mathcal{A}$ è un gruppo nella categoria opposta.

Esercizio. Nella categoria dei funtori (covarianti o controvarianti) da una categria $\mathcal{A}$ agli insiemi un gruppo è un funtore a valori nella categoria dei gruppi.

L'unico cogruppo nella categoria degli insiemi è l'insieme vuoto!

Un oggetto finale per la categoria opposta di una categoria $\mathcal{C}$ si chiama *oggetto iniziale* di $\mathcal{C}$.

Esempio- Esercizio Consideriamo la categoria degli anelli commutativi con unità in cui il coprodotto è il prodotto tensoriale. Un oggetto iniziale è l'anello $\mathbb{Z}$ degli interi, munito di un unico omomorfismo canonico in ogni anello unitario che manda 1 in 1.

L'anello $\mathbb{Z}[x]$ ha una struttura di cogruppo con comoltiplicazione Δ, inverso S e counità ϵ dati da:

$$\Delta(x) := x \otimes 1 + 1 \otimes x,\ S(x) = -x,\ \epsilon(x) = 0. \tag{19.0.1}$$

Un cogruppo nella categoria degli anelli commutativi è detto *Algebra di Hopf commutativa*, nel linguaggio delle varietà affini corrisponde ad un gruppo algebrico affine (nel caso in oggetto il *gruppo addittivo*) in quanto gli omomorfismi da un algebra generata da un numero finito di variabili x_i modulo un numero finito di polinomi $f_j(x)$ ad un'altra albera B sono semplicemente le soluzioni in B di tale sistema di equazioni.

Simile analisi per i polinomi di Laurent $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ ha una struttura di cogruppo con comoltiplicazione Δ, inverso S e counità ϵ dati da:

$$\Delta(x) := x \otimes x,\ S(x) = x^{-1},\ \epsilon(x) = 1. \tag{19.0.2}$$

(*gruppo moltiplicativo*).

Esercizio Provare che il funtore che ad ogni anello commutativo A associa il gruppo delle matrici $n \times n$ a determinante 1 è rappresentabile, definire quindi il gruppo speciale lineare.

Ora il punto fondamentale

Teorema. *Nella categoria omotopica degli spazi puntati $\Sigma(X)$ è un cogruppo e $\Omega(X)$ un gruppo.*

Un gruppo della categoria omotopica è anche detto un h-spazio.

Supponiamo ora che, come avviene per gli spazi puntati, un oggetto, indicato con 1, sia un oggetto iniziale e finale in una categoria $\mathcal{A}$.

Lemma. *Dati 4 oggetti A, B, C, D, per cui esiste $A \vee B$, $C \times D$, dare un morfismo $f : A \vee B \to C \times D$ equivale a dare (arbitrariamente) le 4 composizioni*

$$a := p_C \circ f \circ i_A,\ b := p_C \circ f \circ i_B,\ c := p_D \circ f \circ i_A,\ d := p_D \circ f \circ i_B$$

In particolare vale la seguente legge di compatibilità

$$(a \vee b) \times (c \vee d) = (a \times c) \vee (b \times d) : A \vee B \to C \times D \tag{31.1.1}$$

Dim. Le due proprietà universali del prodotto e coprodotto implicano la prima parte mentre la seconda non è altro che una forma della proprietà associativa della composizione $(p_C \circ f) \circ i_A = p_C \circ (f \circ i_A)$ ecc..

Siano ora A, B rispettivamente un gruppo ed un cogruppo in $\mathcal{A}$, da queste strutture otteniamo due moltiplicazioni (operazioni di gruppo) sull'insieme $\mathcal{A}(A, B)$ con il medesimo elemento neutro dato dalla composizione $A \to 1 \to B$.

Denotiamo con $c : A \to A \vee A$ la comoltiplicazione e con $m : B \times B \to B$ la moltiplicazione. Denotiamo le due operazioni indotte con $a \circ b,\ a * b$ rispettivamente, affermo che vale l'identità $(a \circ b) * (d \circ f) = (a * d) \circ (b * f)$ infatti le due operazioni si ottengono da

$$A \xrightarrow{c} A \vee A \xrightarrow{a \vee b \times d \vee f} B \times B \xrightarrow{m} B$$

$$A \xrightarrow{c} A \vee A \xrightarrow{a \times d \vee b \times f} B \times B \xrightarrow{m} B$$

Teorema. *Dato un insieme U con due operazioni $a \circ b,\ a * b$ per cui vale l'identità $(a \circ b) * (d \circ f) = (a * d) \circ (b * f)$ e con il medesimo elemento neutro allora $a \circ b = a * b$ e l'operazione è commutativa.*

Dim. $a * f = (a \circ 1) * (1 \circ f) = (a * 1) \circ (1 * f) = a \circ f$ e $a * f = (1 \circ a) * (f \circ 1) = (1 * f) \circ (a * 1) = f \circ a$. □

§32 Gruppi di omotopia

32.1 Applichiamo la teoria del paragrafo precedente alla categoria omotopica. In questo caso la compatibilità si verifica insiemisticamente e ne segue che per ogni coppia di spazi

X, Y l'insieme delle classi di omotopia di applicazioni da $\Sigma(X)$ ad $\Omega(Y)$ è un gruppo abeliano, in particolare

Teorema. *$\pi_n(X)$ è un gruppo abeliano per $n > 1$.*

Dim. Infatti $\pi_n(X) = \mathcal{H}(S^h, \Omega^{n-h}X)$ (indichiamo con $\mathcal{H}$ le classi di omotopia di applicazioni), se $n \geq 2$ possiamo ad esempio prendere $h = 1$ e avere le mappe fra S^1 che è un cogruppo nella categoria omotopica e $\Omega^{n-1}X$ che invece è un gruppo.

Un ulteriore corollario del Teorema 31.1 è

Corollario. *Se X è un gruppo topologico puntato nell'identità (o anche solo un $h-$spazio), $\pi_1(X, 1)$ è abeliano e la composizione di due lacci f, g è omotopa al laccio prodotto $t \to f(t)g(t)$ (prodotto dei valori nel gruppo X.).*

Dim. Di nuovo $\pi_1(X) = \mathcal{H}(S^1, X)$, mappe fra S^1 che è un cogruppo e X che è un gruppo per ipotesi nella categoria omotopica. La equivalenza fra le due definizioni di prodotto è proprio il Lemma del paragrafo precedente.

Oltre ai gruppi di omotopia assoluti si possono introdurre quelli relativi.

Se $X \supset A$ è una coppia di spazi, puntata in $x_0 \in A$ definiamo $\pi_n(X, A, x_0)$ come l'insieme delle classi di omotopia delle applicazioni della tripla D^n, S^{n-1}, p_0 nella tripla X, A, x_0.

Con questo vogliamo assumere che consideriamo funzioni continue $f : D^n \to X$ con $f(S^{n-1}) \subset A,\ f(p_0) = x_0$.

Fra di esse le omotopie considerate $F(x, t)$ mandano per ogni t la sfera S^{n-1} in A ed il punto p_0 in x_0.

Per $n \geq 2$ possiamo dotare questo insieme di una struttura di gruppo e, per $n \geq 3$ tale gruppo è abeliano. Rimandiamo questa discussione alla teoria delle fibrazioni con cui si può riprendere in modo più semplice.

32.2 Vogliamo ora calcolare qualche gruppo di omotopia, dobbiamo premettere che il calcolo dei gruppi di omotopia è estremamente più difficile di quello dei gruppi di omologia e, persino per le sfere, tutti i gruppi di omotopia non sono noti.

Nei nostri calcoli saranno utili alcune semplici osservazioni sulle sfere, cominciamo con una osservazione sull'intervallo $[0, 1]$ la funzione

$$F(s, t) := \begin{cases} 1 \text{ se } s \geq 1/2(1 + t) \\ \frac{2s}{1+t} \text{ altrimenti} \end{cases}$$

è una omotopia che fissa gli estremi $0, 1$ fra l'identità e la funzione che $f(s) := F(s, 0)$ per cui $f(s) = \min(2s, 1)$.

Considerando $S^n = I \times S^{n-1}/\{0 \times S^{n-1},\ 1 \times S^{n-1}\}$ come sospensione di S^{n-1} possiamo definire una analoga omotopia $G((s, x), t) := (F(s, t), x)$.

In particolare usando semplici omeomorfismi si consideri la sfera S^n come bordo $\dot{\Delta}_{n+1}$ del simplesso standard $n+1-$dimensionale e si decomponga tale bordo nelle due *calotte* la prima formata da un simplesso $n-$dimensionale T_0 scelto e l'altra sia la unione di tutti i rimanenti simplessi che indicheremo con J.

L'analisi precedente implica che abbiamo una funzione

$$\phi : S^n = \dot{\Delta}_{n+1} \to \dot{\Delta}_{n+1}/J = S^n \tag{32.2.1}$$

che è omotopa all'identità.

Simultaneamente otteniamo anche la classe di omotopia

$$\psi : (T_0, \dot{T}_0) \to (\dot{\Delta}_{n+1}/J, J) = (S^n, p_0) \tag{32.2.2}$$

Una seconda osservazione è la seguente, se identifichiamo (per proiezione centrale) un simplesso Δ_n con un disco D^n la trasformazione simpliciale indotta da una permutazione σ dei vertici si identifica ad una trasformazione ortogonale a determinante 1 se σ è pari e -1 se è dispari che in ogni caso preserva il bordo S^{n-1} di D^n.

Si verifica facilmente che il gruppo delle trasformazioni ortogonali a determinante 1 è connesso per archi e quindi esiste una omotopia della coppia D^n, S^{n-1} fra l'identità ed una trasformazione σ per σ pari.

Questa osservazione implica che dato un simplesso orientato Δ_n con bordo $\dot{\Delta}_n$ ed una applicazione continua $f : (\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \to (X, x_0)$ la classe di omotopia ottenuta identificando Δ_n con D^n dipende solo dall'orientamento e non dall'ordinamento dei vertici.

Detto questo prendiamo due simplessi orientati Δ_n^1, Δ_n^2, $n > 1$ attaccati lungo una faccia $n-1$ dimensionale formando uno spazio $T = \Delta_n^1 \cup \Delta_n^2$ con bordo $\dot{T}$ (naturalmente la coppia $(T, \dot{T})$ è omeomorfa a D^n, S^{n-1}) e due applicazioni $f_i : (\Delta_n^i, \dot{\Delta}_n^i) \to (X, x_0)$, $i = 1, 2$ si provi che

Lemma. *La applicazione $f_1 \cup f_2 : (T, \dot{T}) \to (X, x_0)$ indotta è omotopa a $0 \cup (f_1 + f_2)$ e a $(f_1 + f_2) \cup 0$ dove 0 è l'applicazione costante e $f_1 + f_2$ è la somma in omotopia.*

Sugg. Si provi prima di tutto che esistre un omeomorfismo (in fatti PL) fra Δ_n e il cubo I^n per cui una faccia data sia identificata alla base $I^{n-1} \times 0$ quindi si riduca il Lemma al caso di π_1.

In particolare se $f_2 = -f_1$ in omotopia la applicazione $f_1 \cup f_2$ è omotopa ad una costante.

Useremo liberamente questo lemma per trasformare, a meno di omotopia, applicazioni definite su uno spazio triangolato $n-$dimensionale che siano costanti sullo scheletro $n-1$-dimensionale.

Prima di tutto discutiamo l'omomorfismo di Hurewitz che generalizza quello fra $\pi_1(X)$ ed $H_1(X)$ discusso nel §12.

Vogliamo dunque definire un omomorfismo $h_X : \pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$ lo definiamo considerando il generatore canonico ω di $H_n(S^n)$ e ponendo, se $f : (S^n, p_0) \to (X, x_0)$ è una applicazione continua e $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ la sua classe di omotopia

$$h_X([f]) := f_*(\omega) \tag{32.2.3}$$

La applicazione h_X è ben definita dall'assioma di omotopia.

Proposizione. *h_X è un omomorfismo.*

Dim. La teoria del grado e la Teoria svolta nel §15 implica che $H_n(S^n \vee S^n) = H^n(S^n) \oplus H^n(S^n)$, $\forall n > 0$ e la proiezione $p : S^n \to S^n \vee S^n$ utilizzata in 30.1 ha la proprietà $p_*(\omega) = \omega \oplus \omega$. Infine $(f \vee g)_*(\omega \oplus \omega) = f_*(\omega) + g_*(\omega)$ da cui l'asserto. □

Ora possiamo fare un primo calcolo di omotopia.

Teorema. *$\pi_k(S^n) = 0$, $\forall k < n$ e $\pi_n(S^n) = H_n(S^n)$ tramite l'omomorfismo di Hurewitz.*

Dim. Cominciamo con considerare $\pi_k(S^n)$, $k < n$.

Una applicazione $f : S^k \to S^n$ è omotopa, per il Teorema di approssimazione simpliciale, ad una applicazione simpliciale, inoltre se f preserva i punti base, presi come vertici delle rispettive triangolazioni, si vede immediatamente che nella costruzione della approssimazione simpliciale possiamo assumere che l'omotopia preservi i punti base.

Se dunque ora assumiamo che f è simpliciale la sua immegine è contenuto nello scheletro $k-$ dimensionale di S^n ed in particolare esiste un punto $x \neq p_0$ con $x \notin f(S^k)$.

Poiché $S^n - x$ si contrae a p_0 la prima parte è provata.

Sia ora $k = n$, chiaramente l'immagine della applicazione identità $1_{S_n} : S^n \to S^n$ tramite l'omomorfismo di Hurewitz è la classe ω e quindi h_{S^n} è suriettivo, supponiamo quindi che $f : S^n \to S^n$ sia una applicazione per cui $f_*(\omega) = 0$ dobbiamo provare che f è omotopa alla applicazione costante.

Come prima possiamo assumere che f è simpliciale da una triangolazione opportuna di S^n alla triangolazione standard di $S^n = \dot{\Delta}_{n+1}$, componendo f con ϕ definita da 32.2.1 otteniamo una applicazione omotopa g che manda lo scheletro $n-1$ dimensionale di S^n nel punto base di S^n e che su ogni simplesso $n-$dimensionale è omotopa o a ψ ovvero a $-\psi$ (32.2.2).

Ora il fatto che f_* induce 0 in omologia implica che il numero k di simplessi $n-$dimensionali di S^n su cui g è omotopa a ψ coincide con il numero su cui è omotopa a $-\psi$.

Proviamo, per induzione su k che g è omotopa ad una costante, se $k = 0$ la g è costante, altrimenti sfruttiamo il Lemma 31.5 presi due simplessi T, Z su cui g è omotopa a ψ e $-\psi$ possiamo trovare una successione di simplessi $T = T_0, T_1, \ldots, T_s = Z$ per cui T_i, T_{i+1} si incontrano in una faccia di dimensone $n-1$, sostituendo se necessario T, Z con simplessi della catena possiamo supporre che g è costante su T_i, $1 \leq i < s$ da cui per il Lemma

possiamo modificare a meno di omotopia la g per renderla costante su $T_i, i < s-1$ ed uguale aψ su T_{s-1} a $-\psi$ su T_s, dal medesimo lemma la rendiamo costante su tutti questi simplessi riducendo quindi il numero k e facendo scattare la induzione. □

In modo simile si mostri il seguente:

Teorema di addizione. *Data una applicazione da $f : (S^n, p_0) \to (X, x_0)$, $n > 1$ con S_n triangolata supponiamo che f sia costante sullo scheletro $n-1$ dimensionale cosí che ogni f ristretta ad ogni simplesso $n-$dimensionale T_i equiorientato con S^n della triangolazione di S^n induce un elemento $f_i \in \pi_n(X, x_0)$, allora per la classe $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ di f si ha*

$$[f] = \sum_i f_i$$

A questo punto preferiamo interrompere questa trattazione sintetica ed arrivare rapidamente ad uno dei metodi potenti della teoria della omotopia che è la successione spettrale di Serre.

§33 Fibrazioni di Serre e sistemi locali

NOTA Una generalizzazione di nozione di fibrato permette di includere fra i fibrati la applicazione $E_X \to X$ con fibra $\Omega(X)$, per ogni fibrazione abbiamo una successione spetrale che lega l'omologia della base della fibra e dello spazio totale ed in alcuni casi permette di calcolarle.

33.1 In questa sezione desideriamo generalizzare la nozione di fibrato.

Definizione. Una fibrazione (di Serre) è una applicazione continua $p : E \to B$ che verifichi la seguente proprietà di sollevamento delle omotopie:

Data una applicazione continua $f : X \to E$ di un poliedro finito X ed una omotopia $F : X \times I \to B$ della sua proiezione $pf : X \to B$ esiste una omotopia $\tilde{F} : X \times I \to E$ di f che solleva F (ovvero $F = p\tilde{F}$.).

In forma diagrammatica i dati sono

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

dove $i(x) = (x, 0)$.

È un fatto del tutto banale ma da osservare che un fibrato banale $p_B : E = B \times F \to B$ è una fibrazione.

Infatti una funzione a valori in E è semplicemente una coppia di funzioni a valori B, F rispettivamente e quindi la condizione di estensione del sollevamento delle omotopie si esprime dicendo che, data una funzione $g : T \times 0 \to F$ vogliamo estenderla ad una di $G : F \times I \to F$ e questo evidentemente si fa definendo ad esempio $G(x,t) = g(x,0)$.

La nozione di fibrazione di Serre è assai flessibile, d'ora in poi la chiameremo semplicemente una fibrazione, per procedere con il suo studio invitiamo il lettore a verificare il seguente semplice fatto geometrico.

Esercizio. Sia T un simplesso e $\dot{T}$ il suo bordo consideriamo la coppia

$$T \times I, (\dot{T}) \times I \cup T \times 0$$

provare che tale coppia è omeomorfa alla coppia $T \times I, T \times 0$.

Ora proviamo alcune equivalenze alla nozione di fibrazione ed il fatto che questa è una nozione *locale*.

Lemma. *Data una applicazione $p : E \to B$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *$p : E \to B$ è una fibrazione.*
(2) *Sia X un poliedro Y un sottopoliedro, $f : X \to E$ ed $F_Y : Y \times I \to E$ un sollevamento di F ritretta ad $Y \times I$ che coincide con f su $Y \times 0$, allora esiste un sollevamento $\tilde{F} : X \times I \to E$ che estende F_Y e coincide con f su $X \times 0$.*
(3) *La condizione di sollevamento delle omotopie vale per X un simplesso.*
(4) *La condizione di sollevamento delle omotopie vale per X un cubo.*

Inoltre si ha

(5) *Data una applicazione continua $p : E \to B$, se esiste un ricoprimento aperto U_i per cui $p^{-1}(U_i) \to U_i$ è una fibrazione per ogni i allora p è una fibrazione. In particolare un fibrato localmente banale è una fibrazione.*

Dim. Dimostreremo i vari enunciati per induzione sulla dimensione di X e sul numero dei simplessi. 3) e 4) sono equivalenti poiché un cubo o un simplesso sono omeomorfi.

Assumiamo dunque di avere $X = X_1 \cup T$ con T un simplesso (massimale) e X_1 un poliedro con un simplesso massimale in meno. Per costruzione, l'intersezione fra T ed X_1 è il bordo $\dot{T}$ di T.

3) $\implies$ 2) Assumiamo che $Y \subset X_1$ e per induzione ci riduciamo immediatamente al caso in cui $Y = X_1$ ed inoltre in cui tutte le facce $\dot{T}$ siano in Y.

Pertanto dobbiamo sollevare la funzione $F : T \times I \to B$ avendola già sollevata su $(\dot{T}) \times I \cup T \times 0$ questo si può fare dalla ipotesi 3) e dall'esercizio precedente.

2) $\implies$ 1) $\implies$ 3) È evidente.

(5) Prendiamo una applicazione $f : T \to E$ da un simplesso ad E ed una omotopia $F : T \times I \to B$ di pf.

Dal Teorema sul numero di Lebesgue possiamo trovare una suddivisione $Sd^k(T)$ tale che, per ogni simplesso σ della suddivisione si abbia $F(\sigma) \subset U_i$ per qualche i.

Ora procediamo per induzione sul numero di simplessi a costruire il sollevamento, ragionando come nel passo 3) $\implies$ 2) ci troviamo a dover estendere un sollevamente nel caso di un simplesso in cui F prende valori in un fibrato banale per cui l'asserto è vero. □

Ora l'esempio geometrico rilevante per l'omotopia:

Proposizione. *$p : E_B \to B$ (con E_B lo spazio dei cammini puntati in x_0) è una fibrazione.*

Dim. Una applicazione $f : (X, x_0) \to (E_B, b_0)$, da uno spazio X ad E_B, di spazi puntati è equivalente ad una apllicazione $C(X) \to B$ dove $C(X)$ è il cono su X (30.3.2).

Ovvero ad una applicazione $F(x,t) : X \times I \to B$, $F(x,t) := f(x)(t)$ con $F(x,0) = b_0$ ed $F(x_0,t) = b_0$. Pertanto bisogna provare che dato un cubo T $n-$ dimensionale, una funzione $F : T \times I \to B$ ed una estensione di F definito su $C(T \times 0)$ possiamo completarla ad una estensione su $C(T \times I)$.

Per questo basta osservare che $T \times I$ è un cubo e la coppia $C(T \times I), T \times I \cup C(T \times 0)$ è omeomorfa alla coppia formata da un cubo $n+2-$dimensionale e dalla unione di due sue facce $n+1$ dimensionali, infine si vede facilmente che l'unione di due facce $n+1$ dimensionali di un cubo $n+2-$dimensionale è un retratto (di deformazione) di tale cubo per cui la proprietà di estensione è ovvia. □

La successione esatta lunga di omotopia per le fibrazioni

Sia $p : E \to B$ una fibrazione di fibra F su un punto $y_0 \in B$. Sia $x_0 \in F$ un punto base.

Dai morfismi

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

abbiamo morfismi di gruppi di omotopia

$$\pi_i(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_i(E, x_0) \xrightarrow{p} \pi_i(B, y_0)$$

Teorema. *Per ogni $i \geq 1$ esiste un morfismo $\pi_i(B, x_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{i-1}(F, x_0)$ per cui la successione lunga associata è esatta:*

$$\ldots \pi_i(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_i(E, x_0) \xrightarrow{p} \pi_i(B, y_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{i-1}(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_{i-1}(E, x_0) \xrightarrow{p} \pi_{i-1}(B, y_0)$$

Dim. Prima di tutto una osservazione sul significato di esattezza. Per $i = 0$ si ha che $\pi_0(X)$ è soltanto un insieme.Rappresentiamo un elemento $a \in \pi_i(B, x_0)$ con una applicazione $f : D^i \to B$ costante di valore y_0 sul bordo S^{i-1}. Per la definizione di fibrazione esiste un sollevamento di f ad una mappa $\hat{f} : D^i \to E$ con $\hat{f}(p_0) = x_0$ dove p_0 è il punto base della sfera.

Per costruzione $p \circ \hat{f} : S^{i-1} \to y_0$ pertanto abbiamo definito una applicazione continua da (S^{i-1}, p_0) a F, x_0. Si tratta di provare che questa applicazione definisce un omomorfismo da $\pi_i(B, x_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{i-1}(F, x_0)$ e quindi tutte le proprietà della successione esatta lunga.

Facciamo qualche verifica. Prima di tutto se abbiamo una omotopia $F : D^i \times [0,1] \to B$ costante di valore y_0 sul bordo $S^{i-1} \times [0,1]$ la solleviamo provando che l'applicazione è ben definita a livello di classi di omotopia.

La proprietà di omomorfismo dipende dalle definizioni, preso un disco $D^i = D^{i-1} \times [0,1]$ ed una applicazione in B costante di valore x_0 sul bordo S^{i-1} e anche sulla mediana $D^{i-1} \times 1/2$ possiamo sollevarla ottenendo una applicazione di $S^{i-1} \cup D^{i-1} \times 1/2$ in F che rappresenta in omotopia, sul bordo S^{i-1}, la somma delle due classi.

I vari passi della successione esatta lunga.

1) *esattezza in* $\pi_i(E, x_0)$.

Data una classe di omotopia a valori nella fibra F evidentemente la sua immagine in E si proietta in B all'applicazione costante. Viceversa data una classe di omotopia $f : S^i \to E$ omotopa ad una costante in B per la proprietà della fibrazione possiamo sollevare tale omotopia ed otteniamo una apllicazione $g : S^i \to E$ omotopa ad f e con immagine in F.

2) *esattezza in* $\pi_i(B, x_0)$.

Prendiamo una classe di omotopia in E rappresentata da una applicazione $f : D^i \to E$ con $f(S^{i-1}) = x_0$ vediamo immediatamente che la f ristretta ad S^{i-1} rappresenta l'immagine $\delta(p \circ f)$ della classe immagine di f in B quindi la composizione $\pi_i(E, x_0) \xrightarrow{p} \pi_i(B, y_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{i-1}(F, x_0)$ è l'identità.

Viceversa se una classe di omotopia di $f : S^i \to B$ si solleva ad una $g : D^i \to E$ che su S^{i-1} contrae al punto x_0 questa stessa funzione rappresenta una classe di omotopia di $\pi_i(E, x_0)$ che ha come immagine la f.

3) *esattezza in* $\pi_{i-1}(F, x_0)$.

Prendiamo una classe di omotopia di B e tramite δ costruiamo la classe di $\pi_{i-1}(F, x_0)$, per costruzione questa è la restrizione ad S^{i-1} di una funzione continua su D^i a valori in E, pertanto questa classe di omotopia come classe in E è banale.

Viceversa se una classe di omotopia $f : S^{i-1} \to F$ è omotopa all'identità in E una tale omotopia definisce una mappa $g : D^i \to E$ che si restringe ad f sul bordo e la cui proiezione su B è una classe che ha come immagine f tramite δ.

Esempi Un rivestimento $p : (E, x_0) \to (B, y_0)$ è una fibrazione con fibra discreta.

Se E, B sono connessi abbiamo isomorfismi $\pi_i(E, x_0) = \pi_i(B, y_0),\ \forall i > 1$.

Per $i = 1$ abbiamo la successione esatta $1 \to \pi_1(E, x_0) \to \pi_1(B, y_0) \to \pi_0(F) = F = \pi_1(E, x_0)/\pi_1(B, y_0)$ già studiata nel Cap. 3.

In particolare per S^1 con rivestimento universale contraibile abbiamo che $\pi_i(S^1) = 0,\ \forall i > 1$.

Più in generale vale il

Teorema. *Dato un complesso simpliciale connesso 1-dimensionale X il suo rivestimento universale è contraibile e X è omotopicamente equivalente ad un bouquet di sfere. $\pi_i(X) = 0$, $\forall i > 1$ mentre $\pi_1(X)$ è un gruppo libero su k generatori. Il numero k si può calcolare dalla formula $m_1 - m_0 = k + 1$ dove m_0 è il numero di vertici del complesso simpliciale e m_1 il numero di 1 simplessi.*

Un esempio fondamentale diverso dai rivestimenti è dato dalla fibrazione

$$\Omega(X) \to E_X \to X$$

dove E_X è lo spazio contraibile dei cammini di punto iniziale x_0 e $\Omega(X)$ è lo spazio dei lacci.

Identifichiamo x_0 anche al laccio costante.

La successione esatta lunga, data la contraibilità di E_X induce isomorfismi

$$\pi_i(\Omega(X), x_0) \cong \pi_{i+1}(X, x_0), \ i \geq 0.$$

Questi isomorfismi possono essere iterati pertanto $\pi_i(X, x_0) = \pi_0(\omega^i(X, x_0))$. Si noti che la struttura di gruppo sull'insieme delle componenti connesse di $\omega^i(X, x_0)$ è indotta dalla struttura di H−spazio.

Un secondo esempio viene dai fibrati principali associati ai gruppi di Lie.

Dato $G \supset H \supset K$ un gruppo di Lie G e $G \supset H \supset K$ con H, K sottogruppi chiusi abbiamo una fibrazione formata da spazi omogenei

$$H/K \to G/K \to G/H.$$

Come esempi prendiamo il gruppo ortogonale reale $SO(n, \mathbb{R})$ che oera transitivamente sulla sfera unitaria S^{n-1}. Lo stabilizzatore di $(0, \ldots, 0, 1)$ è il gruppo ortogonale $SO(n-1, \mathbb{R})$ da cui la fibrazione:

$$SO(n-1, \mathbb{R}) \to SO(n, \mathbb{R}) \to S^{n-1}.$$

Dalla successione esatta lunga di omotopia e dalle informazioni che abbiamo sulla omotopia delle sfere otteniamo:

Corollario. *L'inclusione di $SO(n-1, \mathbb{R})$ in $SO(n, \mathbb{R})$ induce isomorfismo fra $\pi_i(SO(n-1, \mathbb{R})) \to \pi_i(SO(n, \mathbb{R}))$ se $i \leq n-3$.*

I gruppi $\pi_i(SO(n, \mathbb{R}))$, $n >> 0$ sono stati calcolati e sono periodici di ordine 8 (periodicità di Bott reale) sono coefficienti di una teoria coomologica generalizzata detta K-teoria reale.

Una analisi analoga si ha per l'azione del gruppo unitario $U(n, \mathbb{C})$ sulla sfera unitaria S^{2n-1}. Si ha la fibrazione

$$U(n-1, \mathbb{C}) \to U(n, \mathbb{C}) \to S^{2n-1}.$$

Corollario. *L'inclusione di* $U(n-1,\mathbb{C})$ *in* $U(n,\mathbb{C})$ *induce isomorfismo fra* $\pi_i(U(n-1,\mathbb{C})) \to \pi_i(U(n,\mathbb{C}))$ *se* $i \leq 2n-3$.

I gruppi $\pi_i(U(n,\mathbb{C}))$, $n >> 0$ sono stati calcolati e sono periodici di ordine 2 (periodicità di Bott complessa) sono coefficienti di una teoria coomologica generalizzata detta K-teoria complessa.

Un ultimo esempio che vogliamo discutere è legato alla teoria dei nodi, ad alcuni problemi di singolarità ed allo studio delle radici dei polinomi.

Prendiamo nel piano complesso k punti distinti $a_1,\ldots,a_k$ e consideriamo l'insieme

$$C^m_{a_1,\ldots,a_k} := \{(z_1,z_2,\ldots,z_m) \in \mathbb{C}^m | z_i \neq z_j,\ \forall i,j=1,\ldots,m;\ z_i \neq a_j\ \forall i=1,\ldots,m \forall j=1,\ldots,k\}.$$

Non è difficile provare che

1) Lo spazio $C^m_{a_1,\ldots,a_k}$ a meno di omeomorfismo non dipende dai punti $a_1,\ldots,a_k$.

2) L'applicazione $\pi : C^m_{a_1,\ldots,a_k} \to \mathbb{C} - \{a_1,\ldots,a_k\}$ definita da $\pi(z_1,z_2,\ldots,z_m) := z_m$ è una fibrazione da $C^m_{a_1,\ldots,a_k}$ a $\mathbb{C} - \{a_1,\ldots,a_k\}$ il piano senza $k-$punti, con fibra su un punto a_{k+1} lo spazio $C^{m-1}_{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}}$.

Dalla teoria svolta si prova per induzione che

Proposizione. $\pi_i(C^m_{a_1,\ldots,a_k}) = 0$, $\forall i > 0$ *e si ha una successione esatta corta di gruppi:*

$$1 \to \pi_1(C^{m-1}_{a_1,\ldots,a_{k+1}} \to \pi_1(C^m_{a_1,\ldots,a_k}) \to \pi_1(\mathbb{C} - \{a_1,\ldots,a_k\}) \to 1.$$

È possibile analizzare in maggior dettaglio questa catena di gruppi e trovare una descrizione esplicita del gruppo di omotopia di $C^m := \{(z_1,z_2,\ldots,z_m) \in \mathbb{C}^m | z_i \neq z_j,\ \forall i,j = 1,\ldots,m$ che è uno spazio importante. Segue dalla analisi fatta (più alcune considerazioni generali di omotopia) che il rivestimento universale di C^m è contraibile. Il gruppo di omotopia di C^m viene detto *gruppo delle trecce puro o colorato* ed indicato P_n. Un gruppo molto interessante è il *gruppo delle trecce di Artin* che si ottiene considerando il quoziente di C^m sotto l'azione del gruppo simmetrico che permuta igli $m-$mumeri z_i. Questo spazio si pò descrivere esplicitamente associando ad un punto $(z_1,z_2,\ldots,z_m) \in C^m$ il polinomio $\prod_{i=1}^m (t-z_i)$ che ha come radici i numeri z_i. L'immagine di questa applicazione è l'insieme $\mathcal{P}^n$ dei polinomi monici di grado m in t che hanno $m-$radici distinte e che è il complementare (nello spazio dei polinomi) di una ipersuperficie dta dall'annullarsi del discriminante). Si ottieme un rivestimento Galoisiano

$$S_n \to C^m \to \mathcal{P}^n$$

il gruppo di omotopia di $\mathcal{P}^n$ si chiamo gruppo delle trecce ed è indicato con B_n, è un gruppo legato alla teoria dei nodi su cui sono state sviluppate molte teorie.

20.1 La successione esatta lunga di omotopia per la coppia

Vogliamo ora definire i gruppi di omotopia relativi per una coppia X, A e dedurre la successione esatta lunga di omotopia per la coppia. Per ipotesi X è uno spazio puntato con $x_0 \in A$.

Si potrebbe sviluppare la teoria dall'inizio, preferiamo però ridurla alla teoria delle fibrazioni.

Consideriamo la fibrazione $\pi : E_X \to X$ e definiamo

$$\Omega(X, A) := \pi^{-1}(A),\ \pi_i(X, A) := \pi_{i-1}(\Omega(X, A))$$

Abbiamo chiaramente la fibrazione

$$\Omega(X) \to \Omega(X, A) \to A$$

e la successione esatta lunga

$$\dots \pi_i(X, x_0) \to \pi_i(X, A) \to \pi_{i-1}(A, x_0) \to \pi_{i-1}(X, x_0) \dots$$

Questa costruzione si può generalizzare alle terne di spazi X, A, B.

20.2 Sistemi locali di gruppi Ritorniamo per un momento alla teoria dei rivestimenti del Cap. 3.

Dato uno spazio B ci interesseremo di rivestimenti E di B con la proprietà che:
1) Ogni fibra F_x abbia una struttura di gruppo.
2) Gli isomorfismi di fibra

$$x \to x[\gamma] := \gamma_x(1),\ F_{x_0} \to F_{x_1}$$

definiti in 3.5.1 a partire da una classe di omotopia di cammini $[\gamma] \in \pi_1(B, x_0, x_1)$, sia un omomorfismo di gruppi.

Definizione. Un rivestimento con una struttura di gruppo sulle fibre soddisfacente le 1),2) si dice un **sistema locale di gruppi**.

In modo analogo si può dare la nozione di sistema locale di anelli ecc..

Si capisce facilmente che i sistemi locali di gruppi formano una categoria ed invitiamo il lettore a svolgere

Esercizio. Un sistema locale non è altro che un gruppo nella categoria dei rivestimenti (cf. §31).

È immediato dal fondamentale Teorema 3.7 che stabilisce una equivalenza di categorie fra rivestimenti e $\pi_1(X, x_0)$ insiemi che.

Teorema. *Se X è connesso per archi e localmente semplicemente connesso vi è una equivalenza di categorie fra la categoria dei sistemi locali di gruppi su B e la categoria dei gruppi G muniti di un omomorfismo di $\pi_1(X, x_0)$ nel gruppo degli automorfismi di G.*

Osservazione. Nel caso di un gruppo abeliano G la nozione di omomorfismo di $\pi_1(X, x_0)$ nel gruppo degli automorfismi di G si esprime dicendo che G è un modulo su $\pi_1(X, x_0)$.In omotopia i sistemi locali appaiono in vari modi.

Uno di questi è la omolologia e la coomologia delle fibre di una fibrazione, un'altro interessante è il sistema locale dei gruppi di omotopia di uno spazio al variare del punto base. Per provare il primo di questi fatti dovremo introdurre una variante della omologia singolare.

20.3 Sistema locale dei gruppi di omotopia Utilizzando la discussione del paragrafo precedente possiamo ora studiare come varia $\pi_n(X, x_0)$ al variare del punto base x_0, supponiamo come è naturale, che X sia connesso per archi.

Prendiamo due punti x_0, x_1 ed un cammino $\gamma : x_0 \to x_1$. Consideriamo una classe di omotopia in $\pi_n(X, x_1)$ che esplicitiamo come applicazione $\sigma : D^n, D^{\,n}) \to (X, x_1)$ dove pensiamo a D^n come alla calotta superiore della sfera $S^n := \{(t_1, \ldots, t_{n+1}),\ \sum t_i^2 = 1,\ D^n := \{(t_1, \ldots, t_{n+1}),\ \sum t_i^2 = 1,\ t_{n+1} \geq 0$ e quindi $D^{\,n}) = S^{n-1}$, otteniamo una classe che indicheremo con $\gamma(\sigma) : (S^n, p_0) \to (X, x_0)$ data da

$$\gamma(\sigma)(x) := \begin{cases} \sigma(x) & \text{se } x \in D^n \\ \gamma(t_{n+1} & \text{nella calotta inferiore} \end{cases}$$

Lemma. *La definizione data induce una struttura di sistema locale sull'insieme dei gruppi di omotopia $\pi_n(X, x),\ x \in X$.*

Esercizio.

Definizione. Uno spazio X si dice $n-$semplice se il sistema locale dei gruppi $\pi_n(X, x),\ x \in X$ è banale.

In particolare evidentemente X è $n-$semplice, per ogni n se $\pi_1(X, x) = 1$.

Come dall'analisi fatta nella sezione precedente segue che il sistema locale $\pi_n(X, x),\ x \in X$ è determinato dall'azione di $\pi_1(X, x_0)$ su $\pi_n(X, x_0)$ per un punto dato x_0.

§34 Omologia e coomologia cubica

NOTA La omologia e coomologia singolare possono essere descritte anche da un altro complesso basato sui cubi singolari, questa presentazione è particolarmente conveniente per lo studio delle fibrazioni.

34.1 La ragione per cui si usano i simplessi per definire la omologia è dovuta al fatto che, dal punto di vista combinatorio sono gli oggetti più semplici.

Nelle applicazioni alle fibrazioni ed alla omotopia è però più conveniente introdurre l'approccio cubico.

Per ogni n abbiamo dunque il cubo $n-$dimensionale $I^n : \{(x_1, \dots, x_n) | 0 \leq x_i \leq 1\}$ con 2^n *facce* che formano dei cubi $n-1-$dimensionali.

Definizione. Un cubo singolare in uno spazio X è una applicazione continua $f : I^n \to X$.

In particolare penseremo sempre alla facce di I^n come a particolari cubi singolari

(34.1.1)
$$\epsilon_i^0 : I^{n-1} \to I^n,\ \epsilon_i^0(x_1, \dots, x_{n-1}) := (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$
$$\epsilon_i^1 : I^{n-1} \to I^n,\ \epsilon_i^0(x_1, \dots, x_{n-1}) := (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}),\ i = 1, \dots, n$$

Definiamo $C_n(X)$ come il gruppo libero generato dai cubi singolari $n-$dimensionali in X, su $C_n(X)$ abbiamo un differenziale definito da

(34.1.2)
$$\delta f := \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (f \circ \epsilon_i^0 - f \circ \epsilon_i^1)$$

si verifica facilmente che in questo modo abbiamo un complesso funtoriale in X.

Non è vero che la omologia di questo complesso coincida con la omologia singolare, infatti si vede immediatamente che il complesso $C_*(p)$ per un punto p ha omolologia $\mathbb{Z}$ in ogni dimensione! Infatti vi è un solo cubo singolare in ogni dimensione con bordo 0.

Per questo è necessaria una ulteriore riduzione.

Definizione. Un cubo singolare $f : I^n \to X$ si dice degenere se non dipende dalla variabile x_n (in pratica quindi si può pensare come un cubo $n-1-$dimensionale). È evidente che se f è un cubo degenere $f \circ \epsilon_i^0, f \circ \epsilon_i^1$ sono cubi degeneri per $i < n$ mentre $f \circ \epsilon_n^0 = f \circ \epsilon_n^1$ da cui segue che

Lemma. *I cubi degeneri formano un sottocomplesso* $\overline{C}_n(X)$ *di* $C_n(X)$.

Infatti $\overline{C}_n(X)$ è un complesso isomorfo a $C_n(X)$ a meno di uno slittamento degli indici. Ovvero ad ogni cubo singolare $n-$dimensionale $\sigma : I^n \to X$ possiamo associare il cubo $n+1-$ dimensionale $E\sigma : I^{n+1} \to X$ definito da $E\sigma(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) := \sigma(t_1, \dots, t_n)$, l'pplicazione $E : C_*(X) \to C_{*+1}(X)$ è un morfismo di complessi.

Un cubo singolare può anche essere visto come una composizione $I^n \xrightarrow{p_n} I^{n-1} \xrightarrow{f} X$. Ora definiamo

Definizione. Il complesso singolare cubico di uno spazio X è il complesso

$$SC_*(X) := C_*(X)/\overline{C}_*(X)$$

indichiamo con $HC_i(X)$ la omologia di tale complesso in grado i.

Come nel caso singolare $SC_0(X)$ ha come base i cubi singolari associati ai punti di X ed è possibile aumentare il complesso.

È necessario provare il

Lemma. *I complessi $SC_*(I^n)$ hanno omolologia*

$$HC_i(I^n) = \begin{cases} 0, & se\ i > 0 \\ \mathbb{Z}, & se\ i = 0 \end{cases} \tag{34.1.3}$$

Dim. Sia $p \in I^n$ un punto scelto e $h : I \times I^n = I^{n+1} \to I^n$ una omotopia contraente a p, ovvero $h(0, t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_n),\ h(1, t_1, \ldots, t_n) = p$.

Sia inoltre $c_k(p)$ il cubo $k-$dimensionale costante di valore p.

Dato un cubo singolare $\sigma : I^k \to I^n$ poniamo $s\sigma : I^{k+1} \to I^n$ secondo la formula

$$s\sigma(t, t_1, \ldots, t_k) := h(1 - t, \sigma(t_1, \ldots, t_k)) \tag{34.1.4}$$

Per il generatore 1 del complesso aumentato in grado -1 poniamo $s1 = c_0(p)$.

Evidentemente $sE\sigma = Es\sigma,\ \delta s\sigma = c_k(p) - \sigma - s\delta\sigma$ da cui deduciamo (essendo $c_k(p) \in \overline{C}_*(I^n)$ se $k > 0$ e $c_0(p) = s\delta\sigma$ in grado 0) che s induce una omotopia contraente del complesso $SC_+(I^k)$ aumentato che ha dunque omologia nulla. □

Abbiamo il

Teorema. *Vi è una equivalenza omotopica naturale fra il complesso singolare e quello cubico in particolare essi inducono la stessa teoria omologica.*

Dim. La dimostrazione si fà con il metodo dei modelli aciclici.

Abbiamo mostrato che i modelli I^k sono aciclici per l'omologia cubica, ed il gruppo $SC_k(X)$ è libero con base (le classi dei) cubi singolari non degeneri.

Indichiamo con I^k anche il cubo singolare dato dalla applicazione identica di I^k.

Come nel §una trasformazione naturale $\tau_k : SC_k(X) \to S_k(X)$ è data scegliendo una catena $c_k \in S_k(I^k)$ (immagine secondo τ del cubo I^k) e per ogni cubo singolare $T : I^k \to X$ ponendo $\tau_k(T) := T_*(c_k)$.

Come c_0 scegliamo il simplesso 0 dimensionale stesso. Da questo segue che τ_0 è in effetti l'identità (essendo $I^0 = \Delta_0$).

Affinché le c_k diano luogo ad un omomorfismo di complessi si deve avere

$$\tau_{k-1}(\delta I^k) = \delta c_k$$

e quindi c_k si può scegliere con questa proprietà se e solo se $\delta\tau_{k-1}(\delta I^k) = 0$, per induzione $\delta\tau_{k-1}(\delta I^k) = \tau_{k-1}(\delta\delta I^k) = 0$.

Similmente si procede per definire un morfismo η da $SC_k(X) \to S_k(X)$.

Poichè Δ_k è omeomorfo a I^k si ha che è aciclico per la omologia cubica e di nuovo basta costruire catene $b_k \in SC_k(\Delta_k)$ e porre, per ogni simplesso singolare $\sigma : \Delta_k \to X$

$$\eta(\sigma) := \sigma_k(b_k).$$

Lo stesso ragionamento di prima implica l'esistenza di catene che diano un morfismo di complessi.

Ora bisogna comporre $\eta\tau,\ \tau\eta$ e mostrare che inducono applicazioni omotope all'identità, questo è conseguenza del Lemma 18.3 per $\eta\tau$ e per $\tau\eta$ si prova esattamente come il Lemma 18.3. □

Avendo completato lo studio della equivalenza fra i due complessi, singolare e cubico in omologia possiamo per dualità considerare i due complessi equivalenti (tramite le duali di η, τ) di cocatene

$$SC^*(X;R) := \mathrm{Hom}(SC_*(X), R),\ S^*(X;R) := \mathrm{Hom}(S_*(X), R).$$

Ora è necessario descrivere il prodotto $\cup$ in coomologia cubica ponendo per un cubo singolare $T : I^{p+q} \to X$

$${}_pT(t_1, \ldots, t_p) := T(t_1, \ldots, t_p, 0, 0, \ldots, 0),\ T_q(t_1, \ldots, t_q) := T(0, 0, \ldots, 0, t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})$$

poniamo per due cocatene $f \in SC^p(X;R),\ g \in SC^q(X;R)$

$$< T|f \cup g > := <_p T|f >< T_q|g >$$

Proposizione. *L'isomorfismo naturale indotto da η^* fra la coomologia singolare e quella cubica preserva il prodotto $\cup$.*

Dim. Con lo stesso metodo dei modelli aciclici basta provare che si ha omomorfismo in grado 0 dove viene dalla definizione (inserire dettagli).
□

34.2 Ora possiamo studiare il sistema locale dei gruppi di omologia (e coomologia) per una fibrazione di Serre.

Sia $p : E \to B$ una fibrazione $\gamma : [0,1] \to B$ un cammino di estremi $\gamma(0) = x_0,\ \gamma(1) = x_1$.

Dato un $k-$cubo singolare $T : I^k \to F_{x_0}$ una applicazione $H(T) : I^{k+1} \to E$ per cui

$$pH(T)(t_0, t_1, \ldots, t_k) = \gamma(t_0),$$
$$H(0, t_1, \ldots, t_k) = T(t_1, \ldots, t_k)$$

è una **deformazione** di T lungo il cammino γ.

In altre parole $H(T)$ si può pensare come una famiglia continua di cubi singolari $T_t : I^k \to F_{\gamma(t)}$ con $T_0 = T$ il cubo $T_1(t_1, \ldots, t_k) := H(T)(1, t_1, \ldots, t_k)$ è il cubo finale della deformazione.

L'idea che vogliamo seguire è la seguente, al contrario dei rivestimenti in cui il sollevamento di una omotopia è unico per le fibrazioni tale unicità non esiste e quindi per passare da una fibra ad un altra si devono fare delle scelte con ampi gradi di arbitrarieà ciò non di meno l'arbitrarietà può essere sempre *corretta* da una omotopia e questo induce delle scelte canoniche di deformazione in omologia ossia il richiesto sistema locale.

Teorema. *Per ogni k esiste una applicazione H_k che ad ogni $k-$cubo singolare $T : I^k \to F_{x_0}$ associa una sua deformazione lungo γ, $H_k(T) : I^{k+1} \to E$ con la ulteriore seguenti proprietà:*

$$H_{k-1}(T\epsilon_i^0) = H_k(T)\epsilon_{i+1}^0, \quad H_{k-1}(T\epsilon_i^1) = H_k(T)\epsilon_{i+1}^1, \tag{34.2.1}$$
$$\delta H_k(T) = H_{k-1}(\delta T) + T_1 - T$$

Se T è degenere $H(T)$ è degenere.

Dim. Si noti che la seconda parte di 34.2.1 è conseguenza della prima e della definizione di deformazione.

Supponiamo di avere definito H con le proprietà date in dimensione $< k$, dato T se esso è degenere si può pensare come un cubo $k-1$ dimensionale ed applichiamo la induzione, altrimenti per ogni faccia di T per induzione abbiamo definito una sua deformazione, tutte queste funzioni sono compatibili sulle facce e definiscono in definitiva una applicazione di

$$0 \times I^k \cup I \times \dot{I}^k \xrightarrow{H} E$$

che solleva la applicazione $\phi : I^{k+1} \to B$, $\phi(t_0, t_1, \ldots, t_k) := \gamma(t_0)$.

Una delle peoprietà delle fibrazioni (la (2) del Lemma 33.1) implica la esistenza di H per il cubo T. $\square$

Bisogna ora provare che la costruzione non dipende, a meno di omotopia, che dalla classe di omotopia di γ.

Sia dunque data una omotopia $F : I \times I$ ad estremi fissi, di due cammini γ_1, γ_2

$$F(0,t) = \gamma_1(t), F(1,t) = \gamma_2(t), \ F(s,0) = x_0, \ F(s,1) = x_1$$

e supponiamo di aver costruito due applicazioni H^1, H^2 di deformazione dei cubi secondo il Teorema precedente. Nello stesso modo di prima si prova

Proposizione. *Esiste per ogni k una applicazione $\tilde{H}_k$ che ad ogni cubo $k-$dimensionale T in F_{x_0} associa una sua deformazione $\tilde{H}_k T : I^{k+2} \to E$ con la proprietà:*

$$\begin{aligned} p\tilde{H}_k(T)(s,t,t_1,\ldots,t_k) &= F(s,t) \\ \tilde{H}_k(T)(s,0,t_1,\ldots,t_k) &= T(t_1,\ldots,t_k) \\ \tilde{H}_k T(0,t_0,t_1,\ldots,t_k) &= H^1(T)(t_0,t_1,\ldots,t_k) \\ \tilde{H}_k(T)(1,t_0,t_1,\ldots,t_k) &= H^2(T)(t_0,t_1,\ldots,t_k) \\ \tilde{H}_{k-1}(T\epsilon_i^0) = \tilde{H}_k(T)\epsilon_{i+2}^0, &\quad \tilde{H}_{k-1}(T\epsilon_i^1) = \tilde{H}_k(T)\epsilon_{i+2}^1, \end{aligned}$$

Se T è degenere lo è anche $\tilde{H}(T)$.

Dim. La prova è simile alla precedente per induzione. Si tratta di provare che, definita $\tilde{H}$ su $I^2 \times \dot{I}^k \cup (0 \times I^{k+1}) \cup (1 \times I^{k+1}) \cup (I \times 0 \times I^k)$ questa si estende.

Ora basta osservare che $I^2 \times \dot{I}^k \cup (0 \times I^{k+1}) \cup (1 \times I^{k+1}) \cup (I \times 0 \times I^k)$ altro non è se non l'unione di tutte le facce di I^{k+2} ecetto la faccia $I \times 1 \times I^k$ e quindi l'estensione richiesta segue di nuovo dal Lemma 33.1.2 ovvero dall'esercizio che precede tale Lemma e dagli assiomi di fibrazione. □

34.3 Dal Teorema precedente deduciamo infine la struttura di sistema locale per la omologia delle fibre F_x,

Teorema. *Dato un cammino $\gamma : I \to B$ ed una deformazione H dei cubi singolari sulla fibra la applicazione $T \to T_1$ induce un omomorfismo di complessi fra $SC_*(F_{x_0})$ ed $SC_*(F_{x_1})$, due deformazioni indotte da cammini omotopi inducono morfismi di catene omotopi.*

Corollario. *I gruppi di omologia e gli anelli di coomologia delle fibre formano sistemi locali su B.*

Dim. In omologia segue immediatamente dai teoremi svolti, in coomologia per dualità ma bisogna definire il prodotto per la coomologia cubica (inserire) □

§35 Successioni spettrali

NOTA La teoria delle successioni spettrali appartiene all'algebra omologica ed è un potente strumento che si ritrova in vari problemi, per ora la nostra motivazione sarà legata alle fibrazioni ma in seguito vedremo altre applicazioni.

35.1 La teoria delle successioni spettrali è un metodo per studiare omologia e coomolologia di complessi e spazi che siano collegati in un modo particolare che spiegheremo a complessi o spazi più semplici. Prima di tutto discutiamo la parte algebrica.

Prendiamo un complesso di catene $\mathcal{A} : \ldots \to A_i \overset{\delta_i}{\longrightarrow} A_{i-1} \overset{\delta_{i-1}}{\longrightarrow} A_{i-2} \to \ldots$ (me la trattazione per cocatene è simile).

Defininizione. Una **filtrazione decrescente** di $\mathcal{A}$ è una successione di sottocomplessi $F^p(\mathcal{A})$ di $\mathcal{A}$ tali che, per ogni p ssi abbia $F^{p+1}(\mathcal{A}) \subset F^p(\mathcal{A})$.

Una **filtrazione crescente** di $\mathcal{A}$ è una successione di sottocomplessi $F_p(\mathcal{A})$ di $\mathcal{A}$ tali che, per ogni p si abbia $F_{p+1}(\mathcal{A}) \supset F_p(\mathcal{A})$.

L'idea algebrica dietro al concetto di filtrazione è che i complessi $F_p(\mathcal{A})/F_{p+1}(\mathcal{A})$ dedotti dalla filtrazione sono delle semplificazioni di $\mathcal{A}$ e una possibile strategia per studiare la omologia di $\mathcal{A}$ è quella di ricostruirla da queti *pezzi*. Vedremo che usualmente le filtrazioni crescenti appaiono per i complessi di catene e quelle decrescenti per le cocatene.

Un caso importante in cui appaiono filtrazioni naturali è quello dei **bicomplessi**, questa nozione è una generalizzazione del formalismo che abbiamo incontrato nella teoria dei prodotti tensoriali di complessi.

Defininizione. Un bicomplesso (di catene) è una famiglia di gruppi abeliani $A_{p,q},\ p,q \in \mathbb{Z}$ e per ogni copppia di indici p,q due morfismi

$$\delta' : A_{p,q} \to A_{p-1,q},\ \delta" : A_{p,q} \to A_{p,q+1}$$

che soddisfano le seguenti relazioni

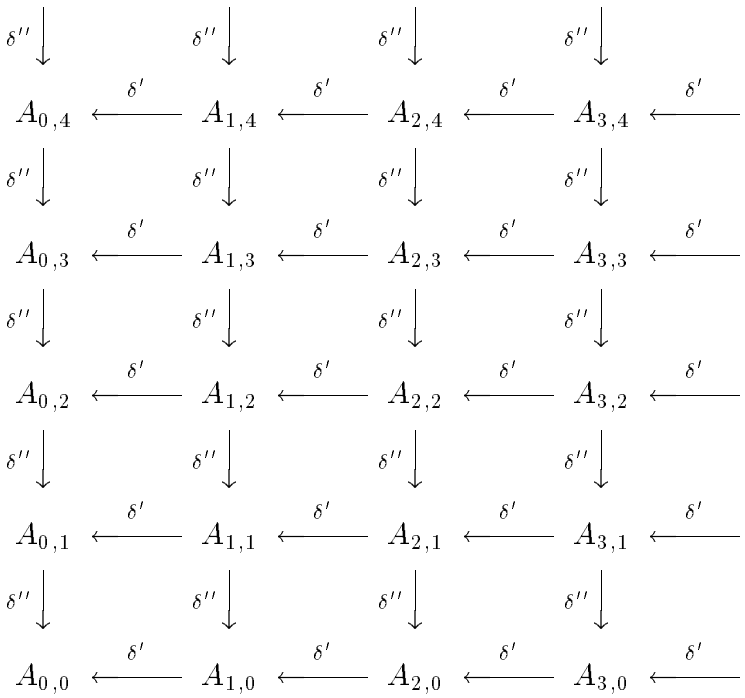
$$\delta'\delta' = 0,\ \delta''\delta'' = 0,\ \delta'\delta'' + \delta''\delta' = 0. \tag{35.1.1}$$

Il significato di queste relazioni è legato alla costruzione di complesso totale associato ad un bicomplesso.

Definiamo $T_n := \oplus_{p+q=n} A_{p,q}$ e $\delta : T_n \to T_{n-1}$ sia definito su ogni $A_{p,q}$ come $\delta := \delta' + \delta'' : A_{p,q} \to A_{p-1,q} + A_{p,q-1}$, è chiaro che le condizioni poste 35.1.1 sono esattamente quelle necessarie per assicurare che $\ldots \overset{\delta}{\to} T_n \overset{\delta}{\to} T_{n-1} \ldots$ è un complesso.

I bicomplessi più comuni sono quelli concentrati nel primo quadrante ovvero con $A_{p,q} = 0$

se p o q è negativo, li visualizziamo con una figura



il complesso totale si ottiene sommando sulle righe diagonali tratteggiate.

Esempio. Il prodotto tensoriale di due complessi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ si può pensare come lo spazio totale del bicomplesso di gruppi $A_p \otimes B_q$ rispetto ai due morfismi

$$\delta' := \delta \otimes 1 : A_p \otimes B_q \to A_{p-1} \otimes B_q,\ \delta'' := (-1)^p 1 \otimes \delta : A_p \otimes B_q \to A_p \otimes B_{q-1}.$$

Dalla definizione o dalla figura è chiaro che possiamo definire due filtrazioni naturali crescenti del complesso totale di un bicomplesso

$$F_p(T_n) := \oplus_{i+j=n,\ i\leq p} A_{i,j},\ G_p(T_n) := \oplus_{i+j=n,\ j\leq p} A_{i,j}$$

Si noti che $F_p(T)/F_{p-1}(T)$ è il complesso che in grado n ha $A_{p,n-p}$ e con differenziale δ'', coincide dunque con la colonna $p-$esima della figura 35.1.2 con i gradi opportunamente riscalati mentre $G_p(T)/G_{p-1}$ coincide con la riga $p-$esima della figura 35.1.2.

20.4 Complessi filtrati Ora cerchiamo di studiare la omologia di un complesso filtrato $F_p(\mathcal{A})$, (per esempio il complesso totale di un bicomplesso) per approssimazioni successive.

Definiamo i *cicli approssimati ad ordine r*

$$Z_p^r := \{a \in F_p(\mathcal{A}) | \delta(a) \in F_{p-r}(\mathcal{A})\} \tag{35.2.1}$$

Osserviamo prima di tutto che

$$Z_p^r \cap F_{p-1}(\mathcal{A}) = Z_{p-1}^{r-1},\ Z_{p-1}^{r-1} \subset Z_p^r \subset Z_p^{r-1}$$

Z_p^r è un modulo bigraduato definendo

$$Z_{p,q}^r := \{a \in F_p(A_{p+q}) | \delta(a) \in F_{p-r}(A_{p+q-1})\} \tag{35.2.2}$$

Similmente definiamo

$$B_p^r := \{a \in F_p(\mathcal{A}) \cap \delta(F_{p+r}(\mathcal{A}))\} = \delta(Z_{p+r}^r) \tag{35.2.1}$$

per le stesse ragioni

$$B_p^{r-1} \subset B_p^r \subset B_{p+1}^{r-1}$$

Z_p^r è un modulo bigraduato definendo

$$B_{p,q}^r := \delta(Z_{p,q+1}^r) \tag{35.2.2}$$

Ora definiamo i termini della successione spettrale

$$E_p^r := Z_p^r/(Z_{p-1}^{r-1} + B_p^{r-1}), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{35.2.3}$$

Proviamo ora che vi è un naturale differenziale $d^r : E_p^r \to E_{p-r}^r$ indotto dal complesso $\mathcal{A}$ infatti

$$\begin{array}{ccc} Z_{p-1}^{r-1} + B_p^{r-1} & \xrightarrow{\delta} & Z_{p-r-1}^{r-1} + B_{p-r}^{r-1} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ Z_p^r & \xrightarrow{\delta} & Z_{p-r}^r \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ E_p^r & \xrightarrow{d^r} & E_{p-r}^r \end{array}$$

in quanto per definizione $B_{p-r}^{r-1} = \delta(Z_{p-1}^{r-1})$ e $\delta(B_p^{r-1}) = 0$ similmente $\delta(Z_p^r) \subset F_{p-r}(\mathcal{A})$ ma $\delta^2(Z_p^r) = 0$ da cui $\delta(Z_p^r) \subset Z_{p-r}^r$, ora abbiamo un complesso

$$\ldots E_{p+r}^r \xrightarrow{d^r} E_p^r \xrightarrow{d^r} E_{p-r}^r \ldots \tag{35.2.4}$$

Esempio. Per $r = 0, -1$ abbiamo $Z_p^0 = Z_p^{-1} := F_p(\mathcal{A})$, $B_p^{-1} := \delta(F_{p-1}(\mathcal{A}))$, , $E_p^0 = F_p(\mathcal{A})/F_{p-1}(\mathcal{A})$. Il lettore verificherà che il differenziale d^0 è il differenziale indotto nel quoziente dei due complessi.

Teorema. *La omologia di 35.2.4 è* E_p^{r+1}.

Dim. Calcoliamo prima di tutto il nucleo K_p^r di

$$d : Z_p^r \to E_{p-r}^r = Z_{p-r}^r / Z_{p-r-1}^{r-1} + B_{p-r}^{r-1}$$

che è formato dagli elementi

$$\{x | dx = u + dv,\ u \in Z_{p-r-1}^{r-1},\ v \in Z_{p-1}^{r-1}\}.$$

Per definizione $Z_{p-1}^{r-1} \subset K_p^r$, e $d(x-v) = u$ e $u \in Z_{p-r-1}^{r-1} \subset F_{p-r-1}$.

$d(x-u) \in Z_{p-r-1}^{r-1}$ se e solo se $d(x-u) \in F_{p-r-1}(\mathcal{A})$ da cui $x-u \in Z_p^{r+1}$ e ne segue che

$$K_p^r = Z_{p-1}^{r-1} + Z_p^{r+1}.$$

Per quanto riguarda l'immagine $d(E_{p+r}^r)$ questa è chiaramente per definizione l'immagine di $d(Z_{p+r}^r) = B_p^r$.

Dobbiamo in definitiva calcolare l'omologia che è

$$Z_p^{r+1} + Z_{p-1}^{r-1} + B_p^r / B_p^r + Z_{p-1}^{r-1} = Z_p^{r+1} / Z_p^{r+1} \cap (B_p^r + Z_{p-1}^{r-1})$$

Per concludere basta provare che

$$Z_p^{r+1} \cap (B_p^r + Z_{p-1}^{r-1}) = B_p^r + Z_{p-1}^r$$

Certamente $B_p^r + Z_{p-1}^r \subset Z_p^{r+1} \cap (B_p^r + Z_{p-1}^{r-1})$ viceversa sia $a+b \in Z_p^{r+1}$, $a \in B_p^r$, $b \in Z_{p-1}^{r-1}$ pochè $da = 0$, $b \in F_{p-1}(\mathcal{A})$, $a \in F_p(\mathcal{A})$ la condizione $a + b \in Z_p^{r+1}$ è equivalente a $da \in F_{p-r-1}(\mathcal{A})$ ossia $b \in Z_{p-1}^r$ come desiderato. □

Le filtrazioni che appaiono più frequentemente hanno delle notevoli restrizioni, la più comune (ad esempio valida per i bicomplessi) e per le fibrazioni è

$$F_{-1}(\mathcal{A}) = 0,\ F_p(A_p) = A_p \ \textit{canonicamente limitata}$$

per una tale filtrazione la successione spettrale è tutta contenuta nel primo quadrante ovvero $E_{p,q}^r = 0,\ \forall p < 0,\ \forall q < 0$.

Poiché $d^r : E_{p,q}^r \to E_{p-r,q+r-1}^r$ si ha che se $r > n$ i differenziali d^r sono nulli su tutti i termini $E_{p,q}^r,\ p+q = n$ e quindi ne segue che

$$E_{p,q}^r = E_{p,q}^{r+1}, \forall r > n, \quad p+q = n$$

questi gruppi si indicano anche come $E_{p,q}^\infty$.

Indicando come sempre con Z_n i cicli e B_n i bordi del complesso dato in grado n, si noti che i cicli ed i bordi si filtrano naturalmente e conviene scrivere $n = p + q$ definendo con

$$Z_{p,q} := Z_n \cap F_p(\mathcal{A}),\ B_{p,q} := B_n \cap F_p(\mathcal{A})$$

se $r > n = p + q$, si ha

$$Z_p^r = Z \cap F_p(\mathcal{A}),\ B_p^{r-1} = B \cap F_p(\mathcal{A})$$

mentre

$$Z_{p-1}^{r-1} + B_p^{r-1} = Z \cap F_{p-1}(\mathcal{A}) + B \cap F_p(\mathcal{A})$$

da cui segue che

$$E_{p,q}^{\infty} = Z_{p,q}/Z_{p-1,q+1} + B_{p,q}$$

Osserviamo che $B_{p,q} = Z_{p,q} \cap B_n$ poichè un bordo è sempre un ciclo e quindi la condizione $Z_{p,q} \cap B_n$ esprime semplicemente la restrizione di trovarsi in $F_p(\mathcal{A})$. Ne segue che $Z_{p-1,q+1} + B_{p,q} = Z_{p,q} \cap (Z_{p-1,q+1} + B_n)$.

Se denotiamo con $H_{p,q} \subset H_n(\mathcal{A})$ l'immagine di $Z_{p,q}$ in $H_n(\mathcal{A}) = Z_n/B_n$ si ha che

$$H_{p,q}/H_{p-1,q+1} = Z_{p,q} + B_n/Z_{p-1,q+1} + B_n = Z_{p,q}/Z_{p,q} \cap (Z_{p-1,q+1} + B_n) = E_{p,q}^{\infty}$$

abbiamo dunque dimostrato il

Teorema. *I gruppi $E_{p,q}^{\infty}, p + q = n$ sono i termini quozienti ottenuti dalla filtrazione di $H_n(\mathcal{A})$ indotta dalla filtrazione sui cicli.*

Questa è una informazione certamente utile, ad esempio la conoscenza delle dimensioni di $E_{p,q}^{\infty}$ quando lavoriamo con spazi vettoriali su un campo implica subito il calcolo della dimensione per $H_n(\mathcal{A})$ ma vedremo molte altre applicazioni.

§36 La successione spettrale di Serre e sue applicazioni.

NOTA Dimostriamo alcuni teoremi di calcolo di omotopia con il metodo della successione spettrale.

20.5 Filtrazione del complesso cubico Il secondo caso importante si ha per la filtrazione del complesso cubico associato ad una fibrazione $\pi : E \to B$.

Ricordiamo (34.1) che abbiamo un morfismo (di grado 1), $E : C_*(X) \to C_{*+1}(X)$ che porta il complesso singolare cubico nei cubi degeneri, iterando abbiamo i cubi k degeneri $E^k C_*(X)$. Definiamo

$$F_p(SC_n(E)) := \{ \text{ gruppo generato dagli } n \text{ cubi } T \mid \pi T \text{ è } n - p \text{ degenere } \}$$

In altre parole il cubo singolare πT è una funzione di $(t_1, \ldots, t_p, 0, 0, \ldots, 0)$ solo delle prime p variabili.

È chiaro che abbiamo definito una filtrazione crescente di complessi.

Il primo passo della analisi della sua successione spettrale stà nel calcolare il termine E^0. Vogliamo provare che E^0 è un complesso omotopicamente equivalente a $SC(B) \otimes SC(F)$ relativamente al differenziale indotto esclusivamente da $SC(F)$ in modo tale che E^1 è isomorfo a $SC(B) \otimes H_*(F)$ ed il suo differenziale è in effetti quello delle catene di B a coefficienti in $H_*(F)$ come sistema locale! Va quindi definito questo nuovo concetto e, solo se il sistema locale è banale avremo finalmente che

$$E^2_{p,q} := H_p(B, H_q(F)). \tag{36.1.1}$$

Primo passo Definiamo l'equivalenza fra $F_p(SC_n(E))/F_{p-1}(SC_n(E))$ e $SC(B) \otimes SC(F)$, associamo ad un cubo singolare $T \in F_p(SC_{p+q}(E))$ i due cubi singolari

$$\begin{aligned} B^p T(t_1, \ldots, t_p) &:= \pi T(t_1, \ldots, t_p, 0, 0, \ldots, 0) \in SC_p(B), \\ F^q(T) &:= T(0, 0, \ldots, 0, t_{p+1}, t_{p+2}, \ldots, t_{p+q}) \in SC_q(F). \end{aligned} \tag{36.1.2}$$

chiaramente se T è singolare $F^q(T)$ è singolare, mentre se $T \in F_{p-1}(SC_n(E))$, $B^p T$ è singolare, in definitiva $\rho : T \to B^p T \otimes F^q T$ è una applicazione ben definita da

$$\rho : F_p(SC_{p+q}(E))/F_{p-1}(SC_{p+q}(E)) \to SC_p(B) \otimes SC_q(F).$$

Bisogna verificare prima di tutto che è un morfismo di complessi e successivamente la equivalenza omotopica come complessi di catene.

Calcoliamo, per $T \in F_p(SC_{p+q}(E))$, $\delta T = \sum_{i=1}^{p+q} (-1)^i (T \circ \epsilon^0_i - T \circ \epsilon^1_i)$ e quindi calcoliamo $B^p(T \circ \epsilon^0_i)$, $B^p(T \circ \epsilon^1_i), F^p(T \circ \epsilon^0_i), F^p(T \circ \epsilon^1_i))$. Otteniamo per $i \leq p$ che $B^p(T \circ \epsilon^0_i)$, $B^p(T \circ \epsilon^1_i)$ sono degeneri mentre per $i = p + j$ abbiamo che $B^p(T \circ \epsilon^0_i) = B^p(T)$, $B^p(T \circ \epsilon^1_i) = B^p(T)$ mentre $F^p(T \circ \epsilon^0_{p+j}) = F^p(T) \circ \epsilon^0_j$, $F^p(T \circ \epsilon^1_{p+j})) == F^p(T) \circ \epsilon^1_j$ ne segue che

$$\rho(\delta T) = (-1)^p B^p(T) \otimes (\sum_{j=1}^{n-p} (-1)^j F^p(T) \circ \epsilon^0_j - F^p(T) \circ \epsilon^1_j) = (-1)^p B^p(T) \otimes \delta(F^p(T))$$

Per l'equivalenza bisogna definire un morfismo σ inverso a meno di omotopia di ρ.

Dati pertanto un p cubo $T_1(t_1, \ldots, t_p)$ in B ed un q cubo $T_2(t_1, \ldots, t_q)$ in F vogliamo definire, per induzione, un $p+q$ cubo $\sigma(T_1 \otimes T_2)$ con la proprietà che $\rho\sigma(T_1, T_2) = T_1 \otimes T_2$ ed inoltre che, estendendo σ linearmente sia σ un morfismo di complessi ovvero $(-1)^p \sigma(T_1 \otimes \delta T_2) = \delta\sigma(T_1 \otimes T_2)$.

L'idea della dimostrazione è che le due richieste si possano soddisfare perché consistono nel chiedere di costruire un $p + q$ cubo $T : I^{p+q} \to E$ avendo prescritto il suo valore su $I^p \delta(I^q) \cup 0 \times I^q$ ed il valore della proiezione πT tramite l'eguaglianza $\rho(\delta T) = T_1 \otimes \delta T_2$.

Basta osservare che questo è un problema di sollevamento di omotopie e che i sollevamenti fatti per induzione di $T_1 \otimes \delta T_2$ danno applicazioni compatibili sulle facce di $I^p \delta(I^q) \cup 0 \times I^q$ per l'ipotesi induttiva di compatibilità con il differenziale.

Per costruzuine $\rho \circ \sigma$ è l'identità. Finalmente bisogna provare che $\sigma \circ \rho$ è omotopa all'identità.

Questo si deve di nuovo fare esplicitamente per induzione costruendo una chain homotopy fra $\sigma \circ \rho$ e l'identità per induzione sulla dimensione dei cubi provando ad ogni passo che la costruzione è possibile per la proprietà di estensione delle omotopie.

Secondo passo Bisogna ora mostrare che sulla omologia di E^0 cioè E^1, isomorfo a $SC(B) \otimes H_*(F)$, il differenziale è quello delle catene di B a coefficienti in $H_*(F)$ come sistema locale!