CAPITOLO 10 ELEMENTI DI TOPOLOGIA PL

NOTA In questo Capitolo discutiamo la nozione di poliedro e di applicazione PL ossia lineare a tratti, si tratta della formalizzazione in senso intrinseco della teoria simpliciale.

§30 Celle

NOTA Iniziamo ricordando alcune definizioni fondamentali e presentando in vari modi la nozione di cella (poliedro convesso). Come spesso accade in geometria un oggetto può essere descritto implicitamente, tramite vincoli, o esplicitamente tramite parametri. Per le celle la definizione implicita è tramite un sistema di equazioni e disequazioni lineari (cf. 30.3), mentre quella parametrica è come inviluppo convesso di un numero finito di punti (cf. 30.6). L'equivalenza delle due definizioni non è completamente banale.

30.1 Joins (Richiami) Siano X, Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}^m$. Il loro **join** XY o $X \star Y$ é l'insieme dei punti

(30.1.1) $$\{(1-t)x + ty : x \in X, y \in Y\}$$

XY non è un invariante topologico della coppia X, Y, come ci si convince subito con facili esempi. Ma vi è un caso particolare importante in cui questo inconveniente non si presenta.

X, Y si dicono *congiungibili* se

(a) $X \cap Y = \emptyset$

(b) se $x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y$ e $x_1 \neq x_2$ oppure $y_1 \neq y_2$ allora $(x_1, y_1) \cap (x_2, y_2) = \emptyset$

Se un punto v è congiungibile con X in R^n, il join vX si chiama *cono di base* X *e vertice* v. Il join di spazi congiungibili gode di buone proprietà in quanto è una costruzione funtoriale. Infatti, se $f\colon X_1 \to X_2$ e $g\colon Y_1 \to Y_2$ sono continue, il *join* $f \star g : X_1Y_1 \to X_2Y_2$ è l'applicazione

(30.1.2) $$(f \star g)((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

$x \in X_1, y \in Y_1; t \in [0, 1]$.

Nella definizione gli spazi X_1, Y_1 e X_2, Y_2 vengono tacitamente supposti congiungibili. È chiaro allora che il join è un funtore dalla categoria delle coppie di sottospazi congiungibili di R^m e coppie di funzioni continue alla categoria dei sottospazi di R^m e funzioni continue. In particolare XY è un invariante topologico della coppia (X, Y) se X, Y sono congiungibili. Questo suggerisce di definire un *join astratto* di sottospazi $X \subset R^m, Y \subset R^m$, ponendo

$$X \star Y := X'Y' \tag{30.1.3}$$

dove X', Y' sono copie di X, Y risp. con X', Y' congiungibili. Tali sostituti certamente esistono e non sono unici. Tuttavia se X'', Y'' è una seconda scelta, si ha, per la funtorialità del join, $X'Y' \approx X''Y''$, pertanto il tipo di omeomorfismo di $X \star Y$ è ben definito e dipende solo dal tipo di omeomorfismo della coppia (X, Y).

Esercizio Definire il join di due spazi topologici qualunque.

PROPOSIZIONE. *L'operazione di join, tra spazi congiungibili o non, è associativa, commutativa e*

$$X_0 X_1 \dots X_n \equiv \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i | x_i \in X_i, \lambda_i \geq 0 \sum \lambda_i = 1\} \ .$$

Esempio. Un simplesso è il join dei suoi vertici.

PROPOSIZIONE. *Due simplessi A e B di R^m sono congiungibili se e solo se i loro vertici sono indipendenti. In tal caso AB è un simplesso di dimensione* $\dim A + \dim B + 1$.

Siano K, L due complessi simpliciali. Se $|K|, |L|$ sono congiungibili il loro *join simpliciale* è

$$KL \equiv \{AB : A \in K, B \in L\}$$

KL è un complesso simpliciale poiché $AB \cap A'B' = (A \cap A')(B \cap B')$ e $\dim KL = \dim K + \dim L + 1$. Il join di applicazioni simpliciali è un'applicazione simpliciale. Se A è un simplesso di K, definiamo il *link simpliciale di A in K* come

$$L(A, K) = \{B \in K : AB \in K\}$$

Ovviamente si intende A congiungibile con B. Allora A e $L(A, K)$ sono indipendenti e

$$S(A, K) := AL(A, K)$$

si dice *stella simpliciale di A in K*. È chiaro che link e stella sono sottocomplessi di K.

Da un punto di vista combinatorio se pensiamo agli scheletri il link di A è l'insieme dei simplessi B disgiunti da A e tali che $A \cup B$ è un simplesso.

30.2 Alcune formule combinatorie

1. Se $B \in L(A, K)$
$$L(B, L(A, K)) = L(AB, K) \tag{C1}$$

2. Se $A \in K, B \in L$ e KL esiste:
$$L(AB, KL) = L(A, K) \star L(B, L) \tag{C2}$$

3. Sia $B \prec A \in K$ con $\dim A = \dim B + 1$. Allora:
$$L(A, K) = L(B, \dot{A} \star L(A, K)) \tag{C3}$$

dove $\dot{A}$ è il sottocomplesso delle facce proprie di A.

30.3 Convessità La nozione di insieme convesso si può dare in vari livelli di generalità ed a noi servirà la più elementare. Ricordiamo dunque che:

Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se, dati comunque due punti $P, Q \in X$ l'intero segmento $[P, Q]$ è contenuto in X.

È immediato verificare che:

(1) Qualunque intersezione di insiemi convessi è ancora convesso e quindi, dato comunque un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$, esiste un minimo insieme convesso $\tilde{C}$ che lo contiene e che viene detto *inviluppo convesso* di C.
(2) La chiusura di un insieme convesso è convesso.
(3) Poiché ogni sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ è convesso l'inviluppo convesso di C è contenuto nel sottospazio affine $< C >$ generato da C.
(4) È anche evidente che la nozione di convessità è invariante per trasformazioni affini.

Si osservi che, se $P_0, \ldots, P_n$ sono punti di $\mathbb{R}^m$, il loro join
$$J(P_0, \ldots, P_n) := P_0 \star \cdots \star P_n$$
coincide con l' inviluppo convesso di $P_0, \ldots, P_n$.

Sia H un iperpiano di $\mathbb{R}^n$. H divide lo spazio in due semispazi aperti disgiunti con frontiera H, componenti connesse di $\mathbb{R}^n - H$.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi A, B diremo che H separa A da B se A è contenuto in una delle due componenti connesse di $\mathbb{R}^n - H$ e B è contenuto nell'altra.

Diremo che un insieme A si trova da una sola parte rispetto ad H se l'intersezione di A con una delle due componenti connesse di $\mathbb{R}^n - H$ è vuota.

Il Lemma fondamentale sulla convessità è il seguente:

LEMMA. *Sia X un chiuso convesso e $p \notin X$ allora esiste un unico punto $p_0 \in X$ con distanza minima da p.*

Sia $q \in (p, p_0)$ un punto interno al segmento aperto di estremi p, p_0 e H_q l'iperpiano per q ortogonale alla retta pp_0, H separa p da X.

DIM. Dalla geometria piana elementare, se p_0, p_1 sono punti distinti che hanno la stessa distanza da p ogni punto interno al segmento di estremi p_0, p_1 ha distanza minore da p.

Se p, p_1 si trovano nel medesimo semipiano determinato dalla retta ortogonale a pp_0 in p_0 allora nel segmento p_0p_1 vi sono punti a distanza da p minore della distanza con p_0. □

30.4 Dualità Dato un convesso X vogliamo studiare l'insieme degli iperpiani che hanno X da una parte e provare che la chiusura di X è *l'inviluppo* di tali iperpiani.

Sia $\langle X \rangle$ il sottospazio affine generato da X, sia n la sua dimensione, necessariamente X deve contenere un simplesso n dimensionale di $\langle X \rangle$.

Ci restringiamo a studiare l'insieme degli iperpiani che non contengono X e quindi tagliano $\langle X \rangle$ in un sottospazio $n-1$ dimensionale, un iperpiano di $\langle X \rangle$ che ammette X da una sola parte.

Per studiare questo insieme di iperpiani conviene prendere come modello di $\mathbb{R}^n$ il sottospazio

$$\mathbb{A}^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum x_i = 1.\}$$

Le coordinate x_i sono dette coordinate baricentriche su $\mathbb{R}^n$. I sottospazi affini di $\mathbb{A}^n$ sono l'intersezione di $\mathbb{A}^n$ con sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{n+1}$. Un iperpiano di $\mathbb{A}^n$ è pertanto dato da una equazione lineare $\sum_{i=0}^n a_i x_i = 0$. I coefficienti a_i sono definiti a meno di un fattore moltiplicativo e quindi si può assumere che $\sum_i a_i = 1$ a meno che $\sum a_i = 0$ ovvero che l'iperpiano non contenga il punto $b := \{\frac{1}{n+1}(1, \dots, 1)\}$.

Possiamo definire ora il *convesso duale*:

$$\hat{X} := \{(a_0, \dots, a_n) | \sum_i a_i = 1, \sum_{i=0}^n a_i x_i \geq 0, \forall x \in X\}$$

Osservazione $\hat{X}$ è un insieme chiuso e convesso.[1]

Evidentemente se $X \subset Y$ si ha $\hat{Y} \subset \hat{X}$.

Si noti che, se $X = \mathbb{R}^n$ è tutto lo spazio il suo duale è un solo punto, il baricentro del simplesso standard $b := \{\frac{1}{n+1}(1, \dots, 1)\}$. Viceversa il duale di b è tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$.

Pertanto per una buona dualità conviene lavorare sulla classe dei convessi che contengono tale punto b. In tale classe si ha

[1] In effetti il punto b da luogo allo spazio vettoriale $\sum x_i = 0$ parallelo ad A_n in 0, per convenzione queso corrisponde all'*iperiano all'infinito* di A_n ed è contenuto in $\hat{X}$ per ogni X.

Teorema. *Se X è un convesso contenente b e $\overline{X}$ è la sua chiusura si ha:*

$$\hat{\hat{X}} = \overline{X}.$$

Dim. Chiaramente $\hat{\hat{X}} \supset \overline{X}$, viceversa sia $p \notin \overline{X}$ e sia $p_0 \in \overline{X}$ il punto di minima distanza da p. Per ogni punto $q \in (p, p_0)$, nel segmento aperto (p, p_0), l'iperpiano H_q passante per q ed ortogonale alla retta pp_0 separa p da X. Poichè $b \in X$ tale iperpiano ha una equazione $(a, x) = 0$, $a \in \mathbb{A}^n$ e $a \in \hat{X}$, $(a, p) < 0$, quindi $p \notin \hat{\hat{X}}$. $\square$

Esrecizio Il simplesso standard è autoduale.

Se X è un convesso e consideriamo un massimo numero di punti $p_0, \dots, p_k$ in X indipendenti dal punto di vista affine si ha che X è contenuto nello spazio affine da essi generato. Quindi possiamo ridurci a studiare quei convessi che generano lo spazio $\mathbb{A}^n$, inoltre pur di cambiare coordinate affini possiamo supporre che i $p_i = e_i$ siano i vertici del simplesso standard.

Ne segue (dall'esercizio precedente) che $\hat{X}$ è un convesso compatto contenuto nel simplesso standard. Se $a \in \hat{X}$ definisce un iperpiano $H \in \mathbb{A}^n$ per cui $H \cap X \neq \emptyset$ diremo che H è tangente a X e chiameremo ogni punto di $H \cap X$ un punto di tangenza.

Prendiamo ora il punto di vista duale.

Definizione. Un punto P di un convesso C che non è interno ad alcun segmento contenuto in C si dice *punto estremale.*

Teorema di Krein-Milman[2]. *Un insieme convesso chiuso e limitato $X \subset \mathbb{R}^n$ è inviluppo convesso dei suoi punti estremali.*

Dim. Lo proviamo per induzione sulla dimensione n, per $n = 1$ un tale insieme è un segmento.

Sia X_0 l'inviluppo convesso dei punti estremali in X, si ha $X_0 \subset X$. Prendiamo ora un qualunque iperpiano H tangente ad X in un punto p_0, necessariamente i punti estremali di $H \cap X$ sono anche estremali per X e quindi per induzione $p_0 \in X_0$.

Basta quindi provare che ogni punto p di frontiera per X è punto di tangenza per un iperpiano H. Per questo prendiamo un segmento (pq) esterno ad X, una successione di punti $q_i \in (p, q)$ convergente a p e per ogni q_i un elemento $a_i \in \hat{X}$ il cui iperpiano associato H_a separa X da q_i per compattezza vi è una successione di a_i che converge ad un $a \in \hat{X}$. Si vede subito che H_a separa X dal segmento (pq) e quindi $p \in H_a$. $\square$

30.5 Celle Noi siamo interessati nelle celle che sono insiemi compatti convessi che si possono ottenere o come inviluppo convesso di un numero finito di punti ovvero come intersezione di un numero finito di semispazi.

[2] vale in generalità assai superiore

Teorema. *Se X è un chiuso convesso (in un sottospazio affine) intersezione di un numero finito di semispazi allora X ammette solo un numero finito di punti estremali.*

Dim. Siano $f_i(x), i = 1, \dots, N$ equazioni lineari $H_i^+ := \{x | f_i(x) \geq 0\}$ i corrispondenti semispazi e $H_i = \{x | f_i(x) = 0\}$. Sia $X = \cap_{i=1}^N H_i^+$.

Prima di tutto osserviamo che, se $p \in X$ è un punto estremale, p deve essere su uno dei sottospazi H_i, altrimenti si avrebbe $f_i(x) > 0, \forall i$ e quindi p sarebbe interno ad una palla tutta contenuta in X.

Ora $X \cap H_i$ è un insieme del medesimo tipo di dimensione piú bassa e quindi si applica l'induzione.

Sia ora X l'inviluppo di N punti $p_1, \dots, p_N$ in $\mathbb{R}^n$, vogliamo provare che X è definito da un numero finito di equazioni e disequazioni lineari. Possiamo supporre che il sottospazio generato dai p_i sia tutto $\mathbb{R}^n$.

A meno di cambiare coordinate baricentriche, possiamo assumere che i vertici e_i del simplesso standard sono in X. Scriviamo le disuguaglianze soddisfatte da X nella forma $f(x) := \sum_{i=0}^n a_i x_i \geq 0, \forall x \in X$ ed osserviamo che, in una tale disuguaglianza si deve avere necessariamente $a_i = f(e_i) \geq 0$ per ogni i. Pertanto possiamo normalizzare i coefficienti ed assumere che $\sum a_i = 1$.

Si osservi che il duale di un simplesso di dimensione n è ancora un simplesso di dimensione n.

Una diseguaglianza $(\underline{a}, \underline{x}) := \sum_i a_i x_i \geq 0$ vale su X se e solo se $(\underline{a}, p_i) \geq 0, i = 1, \dots, N$ pertanto lo spazio delle disequazioni si può pensare come un convesso definito da un numero finito di diseguaglianze. Vi sono dunque un numero finito di punti estremali nel complesso duale, poiché tale complesso è contenuto nel compatto $a_i \geq 0, \ \sum_i a_i = 1$ esso è generato da tali elementi. Pertanto X è definito da un numero finito di diseguaglianze. $\square$

Elenchiamo le varie caratterizzazioni delle celle che abbiamo provato e che utilizzeremo.

Teorema. *Per un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ convesso e compatto le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(1) *C è definito da un numero finito di diseguaglianze.*
(2) *C è una unione finita di simplessi.*
(3) *C è l'inviluppo convesso di un numero finito di punti.*
(4) *C è immagine tramite una applicazione lineare di un simplesso.*

Un insieme che soddisfi le precedenti proprietà è detto una cella.

Corollario. *Per un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ convesso e compatto le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(1) *C è una cella*
(2) *C è una unione finita di simplessi.*
(3) *C è immagine tramite una applicazione lineare di un simplesso.*
(4) *Se $C \subset A_n$ è una cella $n-$dimensionale contenente b anche il duale $\hat{C}$ è una cella.*

Dim. Certamente è una riformulazione dire che C è inviluppo di un numero finito di punti o che C è immagine tramite una applicazione lineare di un simplesso.

Se C è una unione finita di simplessi ed è convesso allora C è inviluppo convesso dei vertici dei simplessi dati. Viceversa sia C inviluppo di un numero finito di punti p_i e sia $p = \sum t_i p_i,\ t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1$. Se i punti p_i formano un simplesso non vi è nulla da provare, altrimenti si ha $\sum u_i p_i = 0$ per valori u_i non tutti nulli, per cui $\sum u_i = 0$.

Fra i numeri $u_i > 0$ scegliamo un indice per cui $s := t_i/u_i$ sia minimo, per esempio sia 1 tale indice. Si ha allora $p = \sum_i (t_i - su_i)p_i$ e certamente $t_i - su_i \geq 0,\ \forall i$ e $t_1 - su_1 = 0$ pertanto p è nell'inviluppo convesso di $p_2, \ldots, p_k$ e possiamo terminare per induzione. $\square$

Prendiamo una cella che, abbiamo visto, è un sottoinsieme limitato C di $\mathbb{R}^m$ definito da un insieme finito di equazioni lineari

$$f_i(x_1, \ldots, x_m) = 0 \qquad i = 1, \ldots, s \qquad (1)$$

e disequazioni lineari

$$g_j(x_1, \ldots, x_m) \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, l \qquad (2)$$

di cui C.

Osserviamo che, se per una delle disequazioni $g_j(x_1, \ldots, x_m) \geq 0$ non esiste alcun punto $p \in C$ in cui $g_j(p) > 0$, allora la g_j è identicamente nulla in C e quindi conviene includerla nella lista delle equazioni. Pertanto si può assumere che, per ogni $j = 1, \ldots, l$ vi sia un punto $p_j \in C$ con $g_j(p_j) > 0$, da questo segue che esistono punti $p \in C$ per cui $g_j(p) > 0$ per ogni j (ad esempio $\sum_{j=1}^{l} t_j p_j,\ t_j > 0,\ \sum_j t_j = 1$).

Con la precedente condizione le (1) e le (2) si dicono una *presentazione* di C.

Indichiamo con P_i l'iperpiano di equazione $f_i(x) = 0$, con H_j il semispazio $g_j(x) \geq 0$, con H_j° il semispazio aperto $g_j(x) > 0$ (interno di H_j) ed infine con ∂H_j l'iperpiano $g_j(x) = 0$ (frontiera di H_j).

Posto $P = \cap_1^l P_i$, si ha

$$C = P \bigcap H_1 \bigcap \ldots \bigcap H_l$$

Dunque C è un compatto convesso.

Proposizione. *1) Il sottospazio P è il minimo sottospazio affine contenente la cella C.*

$C^\circ = P \bigcap H_1^\circ \bigcap \ldots \bigcap H_l^\circ$ è l'interno di C in P.

La frontiera $\partial C = C - C^\circ$ di C in $< C >$ è $\partial C = C \cap (\partial H_1 \cup \ldots \cup \partial H_p)$.

2) La nozione di cella è invariante per trasformazioni lineari affini.

Dim. 1) Chiaramente C° è aperto in P e C è unione disgiunta di $P \bigcap H_1^\circ \bigcap \ldots \bigcap H_l^\circ$ e di $C \cap (\partial H_1 \cup \ldots \cup \partial H_p)$, quindi basta mostrare che C è la chiusura $\overline{C^\circ}$ di C°.

Per questo basta osservare che, preso comunque un punto $p_0 \in C^\circ$ ed un punto $p \in C$ tutti i punti $tp_0 + (1-t)p,\ t > 0$ sono in C° e quindi $p \in \overline{C^\circ}$.

2) Questo dipende dal fatto che, tramite una trasformazione lineare affine una funzione lineare si trasforma in un'altra funzione lineare.

Osservazione. P è indipendente dalla presentazione di C e viene indicato anche con $\langle C \rangle$, mentre i semispazi utilizzati possono variare come ci si convince facilmente. La *dimensione* di C è la dimensione dello spazio affine $\langle C \rangle$. Questa è chiaramente la dimensione topologica di C secondo il Cap. 1.

Esempi di celle $n-$dimensionali (o $n-$celle) sono un n-simplesso, ed il cubo I^n.

Esempi. (a) Il simplesso standard $\Delta^n \subset R^{n+1}$ è una n-cella, di cui una presentazione è

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1 \quad x_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$$

(b) Un n-simplesso è una n-cella. Segue da (a) e da 2) della precedente proposizione.

(c) Il prodotto di una cella C di $\mathbb{R}^m$ e di una cella D di $\mathbb{R}^n$ è una cella di $\mathbb{R}^{m+n}$. Infatti, se

$$\{f_i(x) = 0, g_j(x) \geq 0\} \quad \{f'_{i'}(y) = 0, g'_{j'} \geq 0\}$$

sono presentazioni di C e D rispettivamente,

$$\{f_i(x) = 0, f'_{i'}(y) = 0, g_j(x) \geq 0, g'_{j'}(y) \geq 0\}$$

è una presentazione di $C \times D$ in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con coordinate (x, y).

(d) In particolare, il cubo I^n è una n-cella.
(e) L'intersezione di due celle è una cella.
(f) L'intersezione di una cella con un sottospazio lineare o con un semispazio lineare dello spazio ambiente è ancora una cella.

Lemma. *Sia C una n-cella in $\mathbb{R}^m$, esiste un'unica decomposizione $\partial C = F_1 \cup \cdots \cup F_p$ tale che:*

(a) *F_j sia una $n-1$-cella*

(b) *F_j sia intersezione di ∂C con un iperpiano di $\langle C \rangle$.*

Dim. Sia $\{P, H_j\}, \;\; j = 1, \ldots, p$ una presentazione minimale per C e sia $F_j = C \cap \partial H_j$. Per definizione F_j è una cella; dimostriamo che la sua dimensione è $n - 1$. Senza perdere generalità possiamo assumere che $\mathcal{P} := \langle C \rangle = \mathbb{R}^n$, $n = m$. Per semplicità di notazioni prendiamo $j = 1$.

Sia $U = H_2^\circ \cap \cdots \cap H_p^\circ$, chiaramente U è un aperto convesso in $\mathbb{R}^n$ e $C^\circ = U \cap H_1^\circ \neq \emptyset$.

Sia $H_1^- := \{p | g_1(p) < 0\}$ il semispazio aperto opposto ad H_1 in $\mathbb{R}^m$, affermo che $U \cap H_1^- \neq \emptyset$. Infatti essendo U aperto se $U \cap H_1^- = \emptyset$ necessariamente $U \subset H_1^\circ$ e dunque $U = C^\circ$ da cui segue immediatamente che la disuguaglianza $g_1 \geq 0$ è ridondante e viene contraddetta la minimalità della presentazione. Concludiamo che $U \cap H_1^\circ \neq \emptyset$ e $U \cap H_1^- \neq \emptyset$. Per la convessità di U deve essere allora $U \cap \partial H_1 \neq \emptyset$.

Poiché U è aperto in $\mathbb{R}^n$, $U \cap \partial H_1$ è aperto in ∂H_1 e, per costruzione, $U \cap \partial H_1 \subset C \cap \partial H_1 = F_1$.

Pertanto la cella F_1, contenuta in ∂H_1 per definizione, contiene un aperto di ∂H_1; quindi $\langle F_1 \rangle = \partial H_1$ ed F_1 è $n-1$ dimensionale.

Gli iperpiani $S_j = \partial H_j$, $(j = 1, \dots, p)$ intersecano dunque la $n-$cella C in celle $F_j = S_j \cap C$ di dimensione $n-1$ ed inoltre:

$$\partial C = F_1 \cup \cdots \cup F_p \ . \tag{30.5.1}$$

Rimane da far vedere che la decomposizione 30.5.1 è unica.

Supponiamo che esista un'altra decomposizione di ∂C e sia F una $n-1$-cella di tale decomposizione, differente da $F_1, \dots, F_p$. Allora esiste un iperpiano S tale che $F = S \cap C$ e $F^\circ \subset S$ è aperto in S.

D'altronde $F^\circ \subset \partial C \subset H_1 \cup \cdots \cup H_p$, pertanto

$$F^\circ \subset S \cap (H_1 \cup \cdots \cup H_p) = (S \cap H_1) \cup \cdots \cup (S \cap H_p) \tag{2}$$

Per la scelta di F, deve essere $S \neq H_j$, $(j = 1, \dots, p)$ e quindi $\dim S \cap H_j < n-1$, mentre F° è un aperto $n-1$-dimensionale in S. Ne segue che l'inclusione (2) è impossibile.

♣

In particolare le $n-1$-celle $F_1, \dots, F_p$ dipendono solo da C e non dalla presentazione scelta, $F_1, \cdots, F_p$ si dicono $n-1$-facce di C. Una $n-2$-faccia è, per definizione, una $n-2$-faccia di qualche F_j e cosí via, induttivamente.

Si vede facilmente che gli interni F_j° sono disgiunti.

Le facce zero-dimensionali si dicono *vertici* di C. L'insieme vuoto e C si considerano anch'esse come facce di dimensione -1 ed n rispettivamente. Esse sono le *facce improprie*, le altre si chiamano *facce proprie*. La notazione $D \preceq C$ indica che D è una faccia di C, propria o impropria, di qualsiasi dimensione, mentre $D \prec C$ indica che D è una faccia propria di C oppure $D = \emptyset$.

30.6 Facce Ora che abbiamo dato una nozione di faccia indipendente dalla presentazione, vediamo invece come, usando presentazioni, si possano individuare facilmente le facce.

Premettiamo un semplice lemma:

LEMMA. *Sia X un convesso di uno spazio affine P contenuto nella unione $\cup_{i=1}^n S_i$ di un numero finito di iperpiani, allora X è contenuto in uno degli iperpiani S_i.*

DIM. Altrimenti per ogni i esiste un punto $p_i \in X$, $p_i \notin H_i$.

Consideriamo l'applicazione $\psi : \mathbb{R}^n \to P$ data da $\psi(t_1, \dots, t_n) := \sum_{i=1}^n t_i p_i$. L'immagine tramite ψ del simplesso standard $0 \leq t_i$, $\sum_i t_i = 1$ è contenuta in X per l'ipotesi di convessità.

Per costruzione l'immagine di ψ non è contenuta in alcun S_i e quindi $\psi^{-1}S_i$ è un iperpiano di $P' := \mathbb{R}^{n-1} := \sum_i t_i = 1$.

Per ipotesi il simplesso standard è contenuto nella unione degli spazi $\psi^{-1}S_i$ ma questa è una contraddizione perché tale simplesso contiene un aperto non vuoto di P'.

TEOREMA. *Sia C una cella presentata mediante un sistema di equazioni e disequazioni lineari:*

$$\begin{array}{lll} (1) & f_i(x) = 0 & i = 1, \dots, s \\ (2) & g_j(x) \geq 0 & j = i, \dots, l \end{array}$$

Imponendo il segno di eguaglianza in alcune delle g_j, comunque scelte, si ottiene una faccia di C e viceversa ogni faccia è descritta in un tale modo.

DIM. Procediamo per induzione sulla dimensione n di C. Se $n = 0$, il risultato è banale. Se $n > 0$, sia $P = \langle C \rangle$ il piano n-dimensionale definito dalle (1) e supponiamo che le (2) siano numerate in modo tale che le prime p di esse costituiscano una presentazione minimale per C.

Sostituiamo ad esempio $g_\alpha(x) \geq 0$ con $g_\alpha(x) = 0$, se $\alpha \leq p$ il lemma 30.3 ci dice che abbiamo individuato una $n-1$-faccia F_j di C. Sia, allora, $\alpha > p$ e consideriamo il sottoinsieme C_α di C per il quale $g_\alpha(x) = 0$. Per definizione C_α è una cella. Se l'iperpiano $g_\alpha(x) = 0$ contiene P, allora C_α è la faccia impropria C; se il medesimo iperpiano non interseca P, allora $C_\alpha = \emptyset$. Con l'eccezione di questi due casi, l'iperpiano $g_\alpha(x) = 0$ intersecherà P in un piano $n-1$-dimensionale, quindi in un qualsiasi intorno di un punto di C_α cadranno punti y di P per i quali $g_\alpha(x) < 0$. Ne segue che $C_\alpha \subset \partial C$.

Affermo che C_α deve essere contenuta in almeno una delle $n-1$-facce $F_1, \dots, F_p$.

Infatti dal lemma precedente C_α è contenuta in uno degli iperpiani $S_i := \langle F_i \rangle$ e quindi in $F_i = S_i \cap C$.

Supponiamo allora $C_\alpha \subset F_\beta$. La faccia F_β è data dal sistema di equazioni:

$$\begin{gathered} f_i(x) = 0 \\ g_j(x) \geq 0 \\ g_\beta(x) = 0 \end{gathered}$$

Anche in F_β la cella C_α si ottiene sostituendo $g_\alpha(x) \geq 0$ con $g_\alpha(x) = 0$ nel sistema di sopra che definisce F_β. Avendo F_β dimensione minore di n, per l'ipotesi induttiva il teorema sussiste per F_β, pertanto C_α è faccia di F_β e quindi anche di C. ♣

Sia C una cella di dimensione n in $\mathbb{A}^n$ contenente b nel suo interno e sia $\hat{C}$ la cella duale. Siano $E : \{a_1, \dots, a_N\}$ i punti estremali di $\hat{C}$. Per ogni $x \in X$ sia $x^\perp := \{a \in \hat{X} | (a, x) = 0\}$, $A(x) := \{a_i | (a_i, x) = 0\}$ ovvero x è contenuto nell'iperpiano definito da a_i.

DEFINIZIONE. Diciamo che $x, y \in C$ sono equivalenti se $A(x) = A(y)$.

Dato un punto $x \in X$ definiamo $C_x := \{y \in X | A(y) = A(x)\}$ la classe di equivalenza di x.

Le facce aperte di C sono le classi della precedente equivalenza.

PROPOSIZIONE. *$C_y \subset \overline{C}_x$ se e solo se $A(y) \supset A(x)$.*

$\overline{C}_x$ è una cella data dalle diseguaglianze $(a_i, x) \geq 0, \forall a_i \in E$, $(a_i, x) = 0, \forall a_i \in A(x)$.

Le facce proprie massimali di una cella $n-$dimensionale C sono di dimensione $n-1$ quelle minimali si riducono ai vertici.

DIM. Chiaramente se $C_y \subset \overline{C}_x$ si ha che $A(y) \supset A(x)$. Viceversa sia $A(y) \supset A(x)$.e consideriamo il segmento $[y, x]$ di estremi x, y è chiaro che, per ogni $u \in [y, x]$, $u \neq y$ si ha $A(u) = A(x)$ ed il viceversa è provato.

□

30.7 Lavorando con presentazioni è in generale molto più comodo riconoscere le facce di una cella. Ad esempio la dimostrazione della seguente proposizione costituisce ora un facile esercizio.

PROPOSIZIONE. *(a) Se A e B sono celle, le facce di $A \times B$ sono le celle $A' \times B'$, con $A' \preceq A, B' \preceq B$.*

(b) *Se A, B sono celle di $\mathbb{R}^m$, le facce di $A \cap B$ sono le celle $A' \cap B'$, con $A' \preceq A, B' \preceq B$.*

♣

Ci servirà spesso di capire la posizione di un simplesso relativamente ad un insieme convesso.

Ricordiamo che se $\Delta := \sum t_i P_i$, $0 \leq t_i$, $\sum t_i = 1$ è un simplesso di vertici P_i (punti indipendenti), il suo interno $\Delta^\circ := \sum t_i P_i$, $0 < t_i$, $\sum t_i = 1$, è anche l'interno di Δ pensato come chiuso nello spazio affine che esso genera.

In generale, sia C un convesso, per definizione il suo interno C° è l'interno di C nello spazio affine $< C >$.

LEMMA. *1) Se un simplesso Δ è contenuto in un convesso C ed un punto P di Δ è contenuto nell'interno di C, allora tutto Δ° è contenuto nell'interno di C.*

2) Se C è un convesso, $a \in C^\circ$, $R = a + tv$, $t \in [0, \infty)$ una semiretta uscente da a contenuta nello spazio affine $< C >$ generato da C allora R interseca ∂C in un unico punto.

DIM. 1) Sia Q un qualunque punto interno di Δ allora esiste un punto $Q' \in \Delta$ tale che Q è interno al segmento $[P, Q']$. In un intorno aperto di P tutto contenuto in C possiamo completare Q' ad un riferimento affine di $< C >$, per cui il simplesso generato da questi punti contiene Q nel suo interno ed è contenuto in C.

2) $R \cap C^\circ$ è un aperto convesso limitato di R, pertanto esso consiste di tutti i punti della forma $a + tv$, dove t varia in un intervallo semiaperto $[0, \tau)$ dell'asse reale. Allora $R \cap \partial C$ chiaramente contiene $x = a + \tau v$. Dalla prima parte del lemma se un punto interno al segmento $[a, x]$ è interno a C allora tutto il segmento aperto (a, x) é interno, altrimenti tutto (a, x) è nella frontiera. Questo non è possibile perché allora anche a è di frontiera contro la ipotesi.

♣

COROLLARIO. *Sia C è una cella, C° il suo interno e $\dot{C}$ la sua frontiera. Dato $a \in C^\circ$ il join $a\dot{C}$ è un cono e coincide con C.*

DIM. Per convessità $a\dot{C} \subset C$, viceversa sia $b \in C$ con $b \neq a$ e consideriamo la semiretta R_b di origine a, passante per b. Per il lemma precedente $R_b \cap \dot{C}$ è costituito da un solo punto x, cosicché $b \in [a, x] \subset a\dot{C}$, dunque $C \subset a\dot{C}$.

Rimane da far vedere che $a\dot{C}$ è un cono, cioè che a e $\dot{C}$ sono congiungibili ovvero, se x, y sono due punti di $\dot{C}$, con $x \neq y$, allora $[a, x] \cap [a, y] = a$.

Ciò è senz'altro vero, poiché altrimenti uno dei due segmenti sarebbe contenuto nell'altro ed esisterebbe pertanto una semiretta di origine a intersecante $\dot{C}$ in due punti distinti x, y.

♣

Più avanti ci servirà la seguente generalizzazione del risultato appena stabilito. Sia v un vertice di C e sia:

$$L(v, C) := \cup\{F | F \prec C, v \notin F\} \ .$$

PROPOSIZIONE. *C è il cono $vL(v, C)$.*

DIM. Per la convessità di C si ha $vL(v, C) \subset C$. Dimostriamo l'inclusione inversa, procedendo per induzione sulla dimensione di C.

Sia $a \in C^\circ$, la semiretta $v + ta$ incontra $\dot{C}$ in un ulteriore punto x e affermo che $x \in L(v, C)$.

In caso contrario esiste $F \prec C$ tale che $v \in F$, e $x \in F$. Allora $[v, x] \subset F$ e pertanto non può contenere il punto interno a. Dunque ogni punto interno si trova sul cono richiesto.

Se a sta in $\dot{C}$ e $a \neq v$, esiste $F \prec C$, tale che $a \in F$. Per l'ipotesi induttiva, a si troverà sul cono $vL(v, F)$. Ma dalla definizione è chiaro che $L(v, F) \subset L(v, C)$, pertanto $a \in vL(v, C)$. La congiungibilità si prova come nella proposizione precedente.

♣

§31 La categoria PL

NOTA Definiamo la categoria dei poliedri e delle applicazioni lineari a tratti e ne studiamo alcune proprietà fondamentali

31.1

Definizione. Un **poliedro compatto** P di $\mathbb{R}^m$ è una qualsiasi unione finita di celle 'o' equivalentemente, di simplessi di $\mathbb{R}^m$. Nel seguito ometteremo la specifica compatto.

Una funzione $f: P_1 \to P_2$ tra due poliedri in $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ rispettivamente si dice $\underline{PL}$ (= *piecewise linear*) se il suo grafico

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+n} : x \in P_1\}$$

è un poliedro.

Osservazione Una funzione PL è necessariamente continua.
Dai risultati stabiliti per le celle ricaviamo subito i seguenti esempi e proprietà:

Teorema.
(a) L'intersezione, l'unione e il prodotto di un numero finito di poliedri è un poliedro.
(b) L'immagine lineare di un poliedro è un poliedro.
(c) Un cono su un poliedro è un poliedro.
(d) L'intersezione di un poliedro con uno spazio lineare è un poliedro.
(e) Un poliedro convesso è una cella e viceversa.
(f) Il sostegno di un complesso simpliciale è un poliedro.
(g) Il join di due poliedri congiungibili è un poliedro.

Esempi.

(1) Un'applicazione simpliciale è PL.
(2) L'identità è una funzione PL.
(3) Se f è un omeomorfismo PL, anche f^{-1} è PL.
(4) *Estensioni coniche.* Siano aP, bQ due coni sui poliedri P e Q ed $f: P \to Q$ un'applicazione PL. Definiamo *cono su* f l'applicazione $F: aP \to bQ$ data da $F(\lambda a + \mu x) = \lambda b + \mu f(x)$ dove $\lambda + \mu = 1$ e $\lambda, \mu \geq 0$. Allora F è un'applicazione PL, poiché $\Gamma(F) \equiv (a, b)\Gamma(f)$. Inoltre, se f è un PL omeomorfismo anche la sua estensione conica F è tale.
(5) Più in generale, il join di due applicazioni PL è un'applicazione PL.
(6) (Località) Se $f : X \to Y$ è una funzione fra due poliedri e $X = \cup_{i=1}^n X_i$ con X_i poliedri allora f è PL se e solo se $f|_{X_i} : X_i \to Y$ è PL per ogni i.

Notazione. Se $f: |K| \to |L|$ è un'applicazione continua, simpliciale rispetto a K e L, abbrevieremo dicendo che $f: K \to L$ è un'applicazione simpliciale.

Proposizione. *1) La composizione di funzioni PL è una funzione PL.*

2) Se $f: |K| \to |L|$ è un'applicazione PL, l'immagine $f(|K|)$ è un sottopoliedro di $|L|$ e se $|S| \subset |L|$ è un sottopoliedro, $f^{-1}(|S|)$ è un sottopoliedro di $|K|$.

Dim. 1) Siano $P_1 \subset \mathbb{R}^m$, $P_2 \subset \mathbb{R}^n$, $P_3 \subset \mathbb{R}^p$ tre poliedri ed $f: P_1 \to P_2$, $g: P_2 \to P_3$ due applicazioni PL di grafici $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $\Gamma(g) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Il grafico della composizione di f e g si può ottenere nel modo seguente. Si forma il poliedro

$$\Gamma(f) \times \Gamma(g) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

e lo si interseca con il sottospazio dei punti $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, tali che $y = z$. Finalmente si proietta su $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. Tutte queste operazioni conservano il carattere di poliedro in virtù delle proprietà (a), (b), (d).

La dimostrazione di 2) è simile e la omettiamo.

♣

DEFINIZIONE. Dicesi *categoria PL* la categoria che ha come oggetti i poliedri e come morfismi le funzioni PL.

COROLLARIO. *Il join di poliedri congiungibili è un invariante PL (non solo topologico) e il join astratto di poliedri è ben definito nella categoria PL.*

DIM. Tutto deriva dal fatto che il join si restringe a un funtore dalla categoria delle coppie di poliedri congiungibili (in qualche $\mathbb{R}^m$) e coppie di funzioni PL alla categoria PL. ♣

Naturalmente, come in ogni categoria, abbiamo la nozione di isomorfismo, per i poliedri (ossia per gli oggetti della categoria PL) l'isomorfismo viene anche detto PL-omeomorfismo ed indicheremo con $X \approx_{PL} Y$ la relazione di isomorfismo PL.

Può essere conveniente pensare in modo più intrinseco.

DEFINIZIONE. Uno spazio topologico X ha una struttura di poliedro se è dato un omeomorfismo di X con un poliedro P, due strutture di poliedro sono PL equivalenti se ottenute una dall'altra tramite un isomorfismo PL di poliedri.

In effetti noi ci siamo limitati per ora a poliedri compatti, una classe abbastanza generale di spazi su cui fare topologia PL e per cui molti teoremi si estendono semplicemente dal caso compatto è la classe di spazi omeomorfi al complementare di un poliedro K in un altro poliedro P.

31.2 Triangolazioni di Poliedri

DEFINIZIONE. 1) Un *complesso di celle* K è un insieme finito di celle di qualche $\mathbb{R}^m$, tale che

(a) se $A \in K$, ogni faccia di A è in K;

(b) se $A, B \in K$, allora $A \cap B$ è una faccia comune ad A e B (possibilmente vuota).

L'unione in $\mathbb{R}^m$ delle celle di K si dice *poliedro sostegno* di K e si indica con $|K|$.

2) Un sottoinsieme L di K è un *sottocomplesso*, e si scrive $L \subset K$, se L è esso stesso un complesso di celle.

3) Se K', K sono complessi di celle, si dice che K' è una *suddivisione* di K, scritto $K' \triangleleft K$, se
(1) $|K'| = |K|$, (2) ogni cella di K è unione di celle di K'.

La condizione di finitezza non è strettamente necessaria la si può indebolire supponendo che K è solo *localmente finito* ossia, per ogni punto $p \in \mathbb{R}^m$ vi è un intorno con intersezione non vuota con un numero finito di celle di K.

Con questa definizione abbiamo un *esempio fondamentale.*

Prendiamo in $\mathbb{R}^m$ i cubi a coordinate intere. Preso un vettore a coordinate intere $(a_1, \ldots, a_m)$ definiamo

(31.2.2)
$$\begin{aligned} C_{(a_1,\ldots,a_m)} := (a_1, \ldots, a_m) + I^m &= \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m | a_i \le x_i \le a_i + 1\} \\ &= [a_1, a_1 + 1] \times [a_2, j_a + 1] \times \cdots \times [a_m, a_m + 1] \end{aligned}$$

Questi cubi e le loro facce formano una decomposizione in celle di $\mathbb{R}^m$ detta **reticolazione cubica a coordinate intere di $\mathbb{R}^m$.**

Esempi. (1) L'insieme di tutte le facce di una cella C è un complesso di celle, denotato ancora con C.

(2) L'insieme di tutte le facce proprie di una cella C è un sotto complesso di C, denotato con ∂C o $\dot{C}$

(3) Un cono $a|K|$ su un complesso di celle è a sua volta un complesso di celle con elementi $\{a, aB, B : B \in K\}$.

(4) Lo *r-scheletro* di K è il sottocomplesso $K^r := \{C : C \in K,\ \dim C \le r\}$.

(5) Se K è un complesso di celle in $\mathbb{R}^m$ ed $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è un isomorfismo lineare, allora l'*immagine*
$$f(K) := \{f(C) : C \in K\}$$
è ancora un complesso di celle.

(6) Se K, L sono complessi di celle in $\mathbb{R}^m$, la loro *intersezione*
$$K \cap L := \{A \cap B : A \in K, B \in L\}$$
è un complesso di celle. Se $|K| = |L|$ allora $K \cap L$ è una suddivisione di entrambi K ed L.

Infatti, siano $A \cap B$ e $C \cap D$ due celle di $K \cap L$ e sia $F = (A \cap B) \cap (C \cap D) = (A \cap C) \cap (B \cap D)$. Poiché K ed L sono complessi di celle, si ha $A \cap C \preceq A$ e $B \cap D \preceq B$, pertanto $F \prec A \cap B$. Analogamente si vede che $F \prec C \cap D$.

(7) Se K ed L sono complessi di celle il *prodotto*

(31.2.3)
$$K \times L := \{A \times B : A \in K,\ B \in L\}$$
è un complesso di celle.

Infatti, siano $A \times B$ e $C \times D$ due celle di $K \times L$ ed $F = (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$. Ma $A \cap C \prec A$ e $B \cap D \prec B$, quindi $F \prec A \times B$. Analogamente $F \prec C \times D$.

(8) Un complesso simpliciale è un complesso di celle.

COROLLARIO. *Dati comunque k complessi di celle K_i localmente finiti, che decompongono lo spazio $\mathbb{R}^m$ la loro intersezione è una suddivisione in celle simultanea di tutti i complessi dati.*

31.3 Complesso derivato. Sia K un complesso di celle. Per ogni $A \in K$, scegliamo un punto $a \in Int\ A$. Definiamo una suddivisione $K' \lhd K$, induttivamente sugli scheletri di K in ordine di dimensione crescente, mediante la formula

$$A' := a \star (\dot{A})', \qquad A \in K \tag{31.3.1}$$

Si vede immediatamente, per induzione utilizzando il corollario 30.7, che K' **è un complesso simpliciale**, detto *un (primo) derivato* di K. I punti interni scelti si dicono *centri di derivazione*. Evidentemente si può ripetere la operazione di derivato ottenendo un secondo, etc. derivato.

Osservazione Vi è una possibile scelta canonica dei punti $a \in Int\ A$, basta prendere i baricentri delle celle, in questo caso la suddivisione si dice *baricentrica* altrimenti *pseudo-baricentrica,* in ogni caso i complessi simpliciali che si ottengono con queste decomposizioni sono combinatorialmente equivalenti.

PROPOSIZIONE. *Ogni complesso di celle ammette una suddivisione simpliciale e due complessi di celle aventi il medesimo sostegno ammettono una suddivisione simpliciale comune.*

DIM. Se K, L sono i due complessi di celle, si prenda un primo derivato di $K \cap L$.

♣

La costruzione del derivato si può fare anche se il complesso è soltanto localmente finito, in particolare si può applicare ad una decomposizione dello spazio $\mathbb{R}^m$ in celle ad esempio alla reticolazione cubica a coordinate intere di $\mathbb{R}^m$ e si ottiene una *triangolazione localmente finita dello spazio* $\mathbb{R}^m$.

figura con derivato

LEMMA. *Dati r simplessi $A_1, \dots, A_r$ di $\mathbb{R}^m$ esiste una triangolazione dello spazio $\mathbb{R}^m$ in cui tutti gli A_i sono sottocomplessi.*

DIM. Prendiamo una qualunque triangolazione K dello spazio (ad esempio la suddivisione del reticolato cubico intero). Per ogni i scegliamo una trasformazione affine f_i dello spazio che porta A_i in un simplesso di K. Costruiamo dunque le $r-$triangolazioni $f_i^{-1}(K)$ ciascuna delle quali contiene uno degli A_i come simplesso.

L'intersezione di queste triangolazioni è un complesso di celle, la cui suddivisione baricentrica soddisfa alle condizioni del Lemma. $\square$

Teorema. *Siano $A_1, \ldots, A_r$ simplessi di $\mathbb{R}^n$ e K un complesso simpliciale tale che $A_1 \cup \cdots \cup A_r \subset |K| \subset \mathbb{R}^n$. Allora esistono suddivisioni $K' \lhd K$, $A'_i \lhd A_i$, con $A'_i \subset K'$, per ogni $i = 1, \ldots, r$.*

Dim. Basta applicare il Lemma precedente agli A_i ed a tutti i simplessi di K.

♣

Corollario. *i) Se K, L sono complessi simpliciali con $|L| \subset |K| \subset \mathbb{R}^n$ esistono suddivisioni $K' \lhd K$ e $L' \lhd L$ con $L' \subset K'$.*

ii) Ogni poliedro è sostegno di un complesso simpliciale.

Dim. i) Si applichi il teorema precedente prendendo come $\{A_1, \ldots, A_r\}$ l'insieme dei simplessi di L. ♣

ii) Se $P = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ è un poliedro di $\mathbb{R}^n$ e gli A_i sono simplessi, si applichi il teorema prendendo come K un qualsiasi n-simplesso $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ tale che $P \subset \Delta$.

♣

31.4 Equivalenza combinatoria di complessi di celle

Due complessi di celle K, L si dicono *combinatoriamente equivalenti* se esiste una corrispondenza biunivoca $\alpha: K \to L$, tale che, se $A \prec B \in K$, allora $\alpha(A) \prec \alpha(B)$ (**figura**)

Proposizione. *Se α è un'equivalenza combinatoria tra K ed L, esiste un PL isomorfismo $f: |K| \to |L|$, tale che $f(A) = \alpha(A)$, per ogni $A \in K$.*

Dim. Numeriamo le facce A_i di K e B_i di L con $\alpha(A_i) = B_i$. Si considerino derivati K', L', con centri $\{a_i \in A_i\}$, $\{b_i \in B_i\}$ rispettivamente e sia $f: K' \to L'$ l'isomorfismo simpliciale determinato da $f(a_i) = b_i$. □

Il punto di questa proposizione è il seguente. Ad un complesso di celle si associa il poset i cui elementi sono le celle stesse e l'ordinamento è quello delle facce. L'equivalenza combinatoria è semplicemente l'isomorfismo di posets.

Ora sappiamo che ad ogni poset è associato un complesso simpliciale, il suo nervo.C on la suddivisione di un complesso di celle abbiamo definito un isomorfismo PL fra il supporto del complesso di celle e quello del nervo del poset associato.

Osservazione Non ogni poset è associato ad un complesso di celle, ad esempio l'intervallo $[0, 1, \ldots, n]$ ordinato naturalmente non è associato ad un complesso di celle per $n \geq 1$. Il suo nervo rappresenta il simplesso standard $n-$dimensionale.

31.5 Triangolazioni di funzioni PL

Passiamo ora a triangolare le funzioni PL tra poliedri. Abbiamo già visto che un derivato dà una triangolazione di un complesso di celle o, più precisamente, del suo poliedro sostegno. Abbiamo però bisogno di un altro modo importante di triangolare i complessi di celle.

PROPOSIZIONE. *Un complesso di celle K ammette una suddivisione simpliciale K' che non contiene ulteriori vertici.*

DIM. Ordiniamo (arbitrariamente) i vertici di K. Definiamo K' cella per cella in ordine crescente di dimensione, cominciando banalmente con la dimensione zero.

Se $C \in K$ e v è il primo vertice di C nel dato ordinamento, abbiamo visto che $C = v \star L(v, C)$. per induzione $L = L(v, C)$ ammette una suddivisione L' priva di ulteriori vertici. Definiamo $C' \triangleleft C$, ponendo

$$C' = v \star L'$$

La costruzione è coerente, perché, se $v \in D \prec C$, allora v è il primo vertice anche per D e quindi D' è un sottocomplesso di C' (**figura**).

♣

31.6

LEMMA. *Siano K, L complessi di celle in $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ rispettivamente e $p: |K| \to |L|$ la restrizione di un'applicazione lineare da $: \mathbb{R}^m$ ad $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$M := \{A \cap p^{-1}(B) : A \in K, B \in L\}$$

è un complesso di celle che suddivide K.

DIM. Se

$$B =< B > \cap H_1 \cap \cdots \cap H_q$$

e

$$A =< A > \cap H'_1 \cap \cdots \cap H'_p$$

allora

$$A \cap p^{-1}(B) =< A > \cap \pi^{-1} < B > \cap H'_1 \cap \cdots \cap H'_p \cap \pi^{-1} H_1 \cap \cdots \cap \pi^{-1} H_q \tag{31.6.1}$$

è una cella. Inoltre, dalla presentazione (1) si deduce che le facce di $A \cap p^{-1}(B)$ sono le celle

$$\{A' \cap p^{-1}(B') : A' \preceq A, B' \preceq B\}.$$

Per provare che M è un complesso di celle osserviamo che

$$(A \cap p^{-1}(B)) \cap (C \cap p^{-1}(D)) = (A \cap C) \cap p^{-1}(B \cap D)$$

è una faccia comune di $A \cap p^{-1}(B)$ e di $C \cap p^{-1}(D)$. Chiaramente $M \triangleleft K$.

♣

Proposizione. *Siano K, L, p, come nel lemma precedente, allora esistono suddivisioni $K' \triangleleft K$ ed $L' \triangleleft L$ tali che $p: K' \to L'$ sia simpliciale.*

Dim. Se $A \in K$, allora $p(A)$ è una cella. Pertanto esiste una suddivisione $L' \triangleleft L$, per cui $p(A)$, per ogni $A \in K$, è il sostegno di un sottocomplesso di L'. Consideriamo

$$M' = \{A \cap p^{-1}(B) : A \in K, B \in L'\}$$

Per il lemma precedente M' è un complesso di celle ed $M' \triangleleft K$.

L'immagine di una cella , $p(A \cap p^{-1}(B)) = p(A) \cap B$ è per costruzione un simplesso della decomposizione L'. In particolare se una cella $A \cap p^{-1}(B)$ di M' è un vertice v di K', $f(v)$ è un vertice di L'.

La funzione p è lineare, quindi lineare su ogni cella di M', e manda vertici in vertici e celle in simplessi. Se, infine, $K' \triangleleft M'$ è una suddivisione simpliciale senza ulteriori vertici, allora K', L' sono le suddivisioni cercate.

♣

Possiamo finalmente provare il teorema di triangolazione per le funzioni PL:

Teorema. *Sia $f: |K| \to |L|$ un'applicazione PL, dove K, L sono complessi simpliciali. Esistono suddivisioni $K' \triangleleft K$ ed $L' \triangleleft L$ tali che $f: K' \to L'$ sia simpliciale.*

Dim. Supponiamo $|K| \subset \mathbb{R}^m$, $|L| \subset \mathbb{R}^n$, cosicché il grafico $\Gamma(f)$ è un poliedro in $\mathbb{R}^{m+n}$. Sia K_Γ una suddivisione simpliciale del poliedro $\Gamma(f)$.

Applichiamo la precedente proposizione alla proiezione $\pi_1: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, che è un isomorfismo PL fra $\Gamma(f)$ e $|K|$, ottenendo suddivisioni $\tilde{K}$, $\tilde{K}_\Gamma$ di K, K_Γ per cui π_1 è simpliciale. Poiché $\pi_1: |\tilde{K}_\Gamma| \to |\tilde{K}|$ è una biiezione, π_1 è un isomorfismo simpliciale. Ora applichiamo la medesima proposizione a $\pi_2: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ottenendo suddivisioni L', K'_Γ di L, $\tilde{K}_\Gamma$ rispettivamente per cui π_2 è simpliciale.

Poiché $\pi_1: |\tilde{K}_\Gamma| \to |\tilde{K}|$ è un isomorfismo simpliciale la suddivisione K'_Γ induce una suddivisone K' ad essa isomorfa.

Se $g: |K'| \to |K'_\Gamma|$ denota l'isomorfismo inverso (anche esso simpliciale), $f = \pi_2 \circ g: K' \to L'$ è simpliciale, il che conclude la dimostrazione.

♣

§32 Links

Nota La nozione di *link* corrisponde allo studio locale di un poliedro in un punto, dove in piccolo il poliedro appare come un cono con vertice il punto dato, su un poliedro (di dimensione minore) detto appunto link.

32.1 La nozione di **link** è una di quelle fondamentali per lo studio locale dei poliedri e ne rappresenta in sostanza la natura della singolarità in un punto.

Abbiamo già visto la nozione di link in un complesso simpliciale, nel caso combinatorio il link di un vertice v è formato da tutti i simplessi A che non contengono v e che, insieme con v formano un simplesso.

Sia ora P un poliedro immerso in $\mathbb{R}^n$ ed a un suo punto.

DEFINIZIONE. Un *link* di a in P è un sotto poliedro compatto $L \subset P$, tale che, a sia congiungibile con L e, considerato il join aL, l'insieme $aL - L$ sia un intorno aperto di a in P; aL si dice *una stella* di a in P e $aL - L$ un intorno *conico* di a in P.

Il nostro compito è ora di provare che:

1) Ogni punto $a \in P$ ammette un link.

2) Il link è una nozione intrinseca che non dipende in particolare dalla immersione in $\mathbb{R}^n$.

3) Il link di un punto a è una nozione locale, dipende solo dalla struttura del poliedro*vicino* ad a.

LEMMA. *Sia P un poliedro ed $A \subset P$ un aperto. Supponiamo che la chiusura $\overline{A}$ e $\overline{A} - A$ sono sottopoliedri, allora $P - A$ è un sottopoliedro di P.*

DIM. Esercizio, si triangoli P in modo che $\overline{A}$ e $\overline{A} - A$ sono sottocomplessi simpliciali.

PROPOSIZIONE. *Ogni punto $a \in P$ ammette un link.*

Se L è un link di a in P, allora $L = |L(a, K)|$ per qualche triangolazione K.

Se $Q \subset P$ è un sottopoliedro contenente un intorno aperto di a in P allora $L(a, Q) = L(a, P)$

DIM. 1) Sia K una triangolazione di P avente a come vertice. Consideriamo $L(a, K)$, il link simpliciale di a in K ed $S(a, K) = aL(a, K)$, la stella simpliciale di a in K. Si vede subito che $|S(a, K)|$ è un intorno conico si a in P con vertice a e base $|L(a, K)|$.

2) Si triangoli $P - (aL - L)$ in modo che L sia un sottocomplesso K_0 (cf. Lemma precedente) e si estenda tale triangolazione ad aL prendendo il cono aK_0. Se K è la triangolazione di P cosí ottenuta, a è un vertice e $|L(a, K)| = L$, $|S(a, K)| = aL$.

3) Evidente dalla definizione.

♣

Esempio-Esercizio. Sia K un complesso simpliciale ed $A \in K$. Per ogni punto a di *Int* A, si ha che $|\dot{A} \star L(A, K)|$ è un link di a in K.

SUGG. Si utilizzi una suddivisione pseudobaricentrica con a centro di suddivisione.

32.2 Invarianza topologica del link Nella nozione di link per un poliedro immerso in $\mathbb{R}^n$ abbiamo sfruttato il fatto che un poliedro P immerso ha in ogni suo punto a una struttura *conica* ovvero esiste un intorno U di P per cui avviene che, dato comunque un punto $b \in U$ il segmento $[b,a]$ di estremi a,b è interamente contenuto in P. In altre parole, consideriamo l' insieme delle semirette uscenti da a che possiamo parametrizzare con i punti di una sfera S^{n-1}, fra queste le semirette la cui intersezione con P non ammette a come punto isolato possono essere pensate come spazzanti una specie di cono tangente a P in a, topologicamente formano un chiuso di S^{n-1} omeomorfo ad un dato link¿

Formalizziamo questa discussione. Siano L_1, L_2 due link di a in P (pensato come poliedro immerso). Definiamo una funzione $h: L_1 \to L_2$ nel modo seguente: per ogni $x \in L_1$, sia $h(x)$ l'unico punto di intersezione della semiretta $a + tx$ co L_2. Tale punto di intersezione esiste perché il cono aL_2 deve contenere un intorno del vertice a in aL_1. Esso è unico perché il cono aL_2 è definito. Scambiando i ruoli di L_1 ed L_2 si vede che h è una corrispondenza biunivoca. h si dice *proiezione radiale* di L_1 su L_2 dal vertice a.

Proposizione. *La proiezione radiale è un omeomorfismo.*

Dim. Se $P \subset \mathbb{R}^m$, assumiamo, per semplicità, che a sia l'origine di $\mathbb{R}^m$. Sia D_ρ un dischetto circolare di centro a e raggio ρ, tale che

$$D_\rho \cap P \subset Int\,(aL_1 \cap aL_2)$$

Se $S_\rho = \partial D_\rho$, l'applicazione $g: \mathbb{R}^m - \{0\} \to S_\rho$, data da $g(x) = \frac{\rho x}{\|x\|}$ è continua e manda L_i biunivocamente su $S_\rho \cap aL_i$, per $i = 1,2$. Poiché L_i è compatto e $S_\rho \cap aL_i$ è di Hausdorff, $g|L_i$ è un omeomorfismo. A questo punto basta osservare che

$$h = (g|L_2)^{-1} \circ (g|L_1)$$

♣

Contrariamente alla nostra intuizione, la proiezione radiale $h: L_1 \to L_2$ non è una funzione PL anche se trasforma simplessi in simplessi! Per esempio, nel caso semplice illustrato in **figura**

il grafico di h è un arco di iperbole.

L'errore di credere che la proiezione radiale fosse PL fu fatto cosí ripetutamente, fin da Alexander, che Zeeman lo battezzò come lo *sbaglio standard* (the standard mistake). Tuttavia è semplice dare una buona approssimazione di h che sia una funzione PL. Nell'esempio di sopra basta mandare a_1 in a_2, b_1 in b_2 ed estendere linearmente ad un'applicazione $h': [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$, che è non solo PL, ma addirittura lineare.

Nella dimostrazione precedente dovremmo trattare il confronto di due links generati da due diverse immersioni e quindi provare che la struttura conica locale di un poliedro è in effetti indipendente dalla immersione, piuttosto di fare questo che lasciamo come esercizio, passiamo direttamente, sfruttando la proposizione precedente che lega la nozione di link PL con quella simpliciale a dimostrare:

TEOREMA. *(Invarianza PL del link). Se L_1, L_2 sono due link di a in P, allora L_1 è PL-omeomorfo a L_2.*

DIM. In base alla Prop. 32.1 e al fatto che due triangolazioni di P ammettono sempre una suddivisione simpliciale comune, è sufficiente dimostrare che

$$|L(a, K')| \approx_{PL} |L(a, K)|$$

per $K' \lhd K$ una suddivisione. Sia h la proiezione radiale tra i due link. Poiché h è un omeomorfismo e trasforma simplessi in simplessi

$$M = \{h(A) : A \in L(a, K')\}$$

è una suddivisione simpliciale di $L(A, K)$ e, per costruzione, h manda simplessi di $L(a, K'))$ sopra simplessi di M omeomorficamente. Quindi h determina un isomorfismo simpliciale $h' \colon L(a, K') \to M$ mediante restrizione ai vertici ed estensione lineare ai simplessi.

♣

Il precedente teorema si può riformulare come segue:

Dato un poliedro P congiungibile con 0, il cono solido infinito da esso generato è per definizione

$$C_0^\infty(P) := \{tp |\ t \geq 0,\ p \in P\}.$$

Supponiamo di dare due poliedri P_1, P_2 nello spazio $\mathbb{R}^n$ che siano entrambi congiungibili con l'origine e che generino lo stesso cono solido infinito, allora vi è una proiezione radiale $h : P_1 \to P_2$ che è un omeomorfismo, vogliamo provare che allora

COROLLARIO. *Si può costruire una nuova proiezione, detta pseudoradiale che ne stabilisce un omeomorfismo PL.*

DIM. A meno di omotetia si può assumere che il cono (finito) su P_1 contenga quello su P_2, dunque P_1, P_2 sono due link di 0 in $C(P_1)$ e l'asserto segue dal teorema.

32.3 Invarianza PL dei link Riassumendo i vari ingredienti, ricaviamo la seguente versione finale dell'invarianza PL dei link.

TEOREMA. *Siano L_1, L_2 due link di a in P (poliedro in $\mathbb{R}^n$) ed $h \colon L_1 \to L_2$ la proiezione radiale.*

Se K_i è una triangolazione di L_i, esiste $K_1' \lhd K_1$, tale che, per ogni $A \in K_1'$, $h(A)$ è un simplesso e l'insieme dei simplessi $h(A)$, $A \in K_1'$ formano una suddivisione K_2' di K_2.

Se $h' \colon L_1 \to L_2$ è l'estensione lineare della restrizione di h ai vertici, $h' \colon K_1' \to K_2'$ è un isomorfismo simpliciale e, inoltre, $h'(A) = h(A)$ per ogni $A \in K_1'$.

L'isomorfismo h' viene comunemente chiamato *una proiezione pseudoradiale* e dipende dalla triangolazione K_1'.

Osservazione Si moti che più fitta è la suddivisione K_1' e maggiormente la corrispondente proiezione pseudoradiale approssima la proiezione radiale.

In base all'invarianza PL del link, se a è un punto di un poliedro P, è lecito scrivere $L(a, P)$ per denotare un qualsiasi link di a in P, o, meglio, il suo tipo di PL isomorfismo.

Ora finalmente arriviamo a provare che il link è, dal punto di vista PL, una nozione intrinseca che non dipende dalla immersione del poliedro.

COROLLARIO. *Se $f: P \to Q$ è un PL omeomorfismo, risulta $L(a, P) \approx_{PL} L(f(a), Q)$ per ogni $a \in P$.*

DIM. Si triangolino P, Q in modo tale che f sia un isomorfismo simpliciale e a, $f(a)$ siano vertici. I link simpliciali di a ed $f(a)$ sono ora ovviamente isomorfi.

♣

Esercizio. Sia $a \in P$.
(a) $L(a \times 0, P \times [0, 1])$ è PL isomorfo ad un cono su $L(a, P)$
(b) $L(a \times 0, P \times [-1, 1])$ è PL isomorfo alla sospensione su $L(a, P)$ (**figure**)

32.4 Struttura PL delle celle

TEOREMA. *(PL omogeneità delle celle convesse) Date due n-celle A, B ed $x \in \partial A$, $y \in \partial B$, esiste un PL isomorfismo $f: \partial A \to \partial B$, con $f(x) = y$.*[3]

DIM. A meno di un isomorfismo lineare dello spazio ambiente, possiamo assumere $\langle A \rangle = \langle B \rangle = \mathbb{R}^n$ ed inoltre a meno di omotetia, che $Int\ A \subset B$. Sia $a \in Int\ A$. Allora, sia ∂A, che ∂B sono link di a in B. pertanto $\partial A \approx \partial B$. Inoltre, ruotando A, possiamo fare in modo che la proiezione radiale da a mandi x in y. A questo punto il risultato segue dal Teorema 32.3 prendendo x, y come vertici di K_1, K_2 triangolazioni di A, B rispettivamente.

♣

Prendendo $A \equiv B$ nel teorema vediamo che, dati comunque due punti x, y in ∂A, esiste un PL isomorfismo di ∂A, che porta x in y. Inoltre, prendendo il cono dell'isomorfismo $f: \partial A \to \partial B$, otteniamo un PL isomorfismo di A con B. Dunque:

PROPOSIZIONE. *Due n-celle convesse sono PL isomorfe. Inoltre dati due punti x, y interni alle due celle e due punti u, v sul bordo, esiste un PL isomorfismo che manda x in y ed u in v.*

Si osservi che un qualunque omeomorfismo fra due celle preserva i bordi (cf.).

32.5 Sfere Dalla proposizione precedente segue che possiamo dare la seguente:

[3] Generalizzare a più punti?

Definizione. Una *n-sfera PL* (o, brevemente, una *n-sfera*) è un poliedro PL isomorfo alla frontiera di una $n+1$-cella. Un *n-disco PL* (o, brevemente, un *n-disco*) è un poliedro PL isomorfo ad una n-cella convessa.

Esempi. Un cubo o un simplesso n-dimensionali sono n-dischi, i loro bordi sono $n-1$-sfere.

Vediamo la natura dei links nelle sfere e nei dischi.

Proposizione. *Il link di un punto in una n-sfera è una $n-1$-sfera.*
Sia Δ un n-disco.
(a) Se $a \in \partial\Delta$, allora $L(a, \Delta)$ è un $n-1$-disco.
(b) Se $a \in Int\ \Delta$, allora $L(a, \Delta)$ è una $n-1$-sfera.

Dim. Basta dimostrarlo per una particolare n-sfera, per esempio per il bordo di un $n+1$-simplesso Δ di vertici $v_0, \ldots, v_{n+1}$. Sia $x \in \partial\Delta$. Per il Teorema 32.4 esiste un PL isomorfismo di $\partial\Delta$, che porta x in un vertice v_i. Basta allora controllare il link simpliciale di v_i, il quale è il bordo della faccia opposta a v_i, pertanto una $n-1$-sfera.

In modo del tutto analogo si dimostra la seconda parte.

♣

32.6 Links in Prodotti e Joins

In questa sezione spesso scriveremo semplicemente $\approx$ invece di $\approx_{PL}$ per indicare un PL-omeomorfismo fra due poliedri.

Proposizione. *Se vP, wQ sono coni:*

$$L(v \times w, vP \times wQ) \approx_{PL} P \star Q \tag{32.6.1}$$

Dim. Posto $C(P) = vP$ e $C(Q) = wQ$, assumiamo $C(P) \subset \mathbb{R}^m$ e $C(Q) \subset \mathbb{R}^n$. Quindi $C(P) \times C(Q) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, e possiamo assumere che (v, w) coincida con l'origine.

Si verifica facilmente che $C(P) \times C(Q)$ è un cono di vertice $(v, w)= 0$ e base $M = C(P) \times Q \cup P \times C(Q) \subset C(P) \times C(Q)$. Dunque M è un link di (v, w). Ora, P, Q sono senz'altro congiungibili in $\mathbb{R}^{m+n}$. Consideriamo la proiezione radiale dall'origine

$$h\colon P \star Q \to M$$

che si verifica è data da:

$$h((1-t)p + tq) = \begin{cases} (p, \frac{t}{1-t}q) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (\frac{1-t}{t}p, q) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

(**figura**)
e che è un omeomorfismo. Quindi h determina (corollario 3.2) una proiezione pseudo-radiale che dà un PL isomorfismo $P \star Q \approx M$.

♣

La proposizione è una generalizzazione dell'esercizio 32.3. Da essa segue subito:

Corollario. *Se P, Q sono poliedri ed $a \in P$, $b \in Q$, allora*

$$L((a,b), P \times Q) = L((a,b), |S(a,P)| \times |S(b,Q)|) \approx L(a,P) \star L(b,Q). \tag{32.6.2}$$

32.7

Proposizione. *In $P \star Q$:*

(1) *Se $a \in P$:*

$$L(a, P \star Q) \approx L(a,P) \star Q. \tag{32.7.1}$$

(2) *Se $x \in P \star Q - (P \cup Q)$:*

$$L(x, P \star Q) \approx S^0 \star L(a,P) \star L(b,Q) \tag{32.7.2}$$

dove $x \in [a,b]$, con $a \in P$, $b \in Q$.

Dim. Utilizziamo due triangolazioni $|K| = P$, $|J| = Q$, cosicché $P \star Q = |KJ|$ e supponiamo a, b vertici di K, J risp.

(1) Nella formula combinatoria **(C2)** del §30.1, si prenda $A = a$, $B = \emptyset$:

$$L(a, KJ) = L(a,K) \star L(\emptyset, J) = L(a,K) \star J. \tag{32.7.3}$$

(2) Nella medesima formula si prenda $A = a$, $B = b$:

$$L([a,b], KJ) = L(a,K) \star L(b,J) \tag{32.7.4}$$

Applicando l'esempio-esercizio **31.1** con $A = [a,b]$, otteniamo che:

$$|(\{a\} \cup \{b\}) \star L([a,b], KJ)| \approx L(x, |KJ|)$$

Quindi, per la 32.7.4:

$$L(x, P \star Q) \approx S^0 \star |L(a,K)| \star |L(b,K)|$$

La proposizione è dimostrata.

♣

Notiamo un importante caso speciale della precedente Proposizione. Supponiamo $Q = v$ si riduca ad un punto, così che $P \star Q = C(Q)$ è il cono su P. Preso un punto $p \in P \subset C(P)$ dalla (1) otteniamo

$$L(p,\ C(P)) = C(L(p,\ P)) \tag{32.7.5}$$

invece se $a \in C(P)$ è interno al segmento pv, $p \in P$ abbiamo

$$L(a,\ C(P)) = S^0 \star L(p,\ P) = \Sigma\, L(p,P) \tag{32.7.6}$$

Un'ulteriore conseguenza di questa analisi è la seguente osservazione.

Sia P un poliedro $a \in P$, L, L, $La - L$ un punto un suo link ed un suo intorno conico aperto.

Per costruzione La è PL isomorfo al cono su L di vertice a, in particolare un punto $x \in La - L$ distinto da a si trova in un unico segmento ab, $b \in L$.

32.8 Indichiamo con S^j una j-sfera PL e con B^j un j-disco PL.

PROPOSIZIONE.
(a) $S^p \star S^q \approx S^{p+q+1}$
(b) $B^p \star B^q \approx B^{p+q+1}$
(c) $S^p \star B^q \approx B^{p+q+1}$.

DIM.
(a) Sia $I^j \approx [-1,1]^j$. Allora

$$S^p \star S^q \approx L(0, I^{p+1}) \star L(0, I^{q+1}) \approx L(0, I^{p+q+2}) \approx \partial I^{p+q+2} \approx S^{p+q+1}.$$

(b) Per l'invarianza PL del join possiamo assumere che B^p, B^q siano simplessi, da cui il risultato segue immediatamente.
(c) Se $p = 0$ basta prendere come $B^0 = v$ il baricentro di un simplesso B^{p+1} di cui S^p è il bordo. In generale dalla associatività del join e da (b) segue che

$$S^p \star B^{q+1} \approx S^p \star (v \star B^q) \approx (S^p \star v) \star B^q \approx B^{p+1} \star B^q \approx B^{p+q+1}$$

ancora da (b).

COROLLARIO.
(a) *Se $P \star Q$ è una PL sfera, allora entrambi P e Q sono PL sfere.*
(b) *Se $P \star Q$ è un PL disco, allora ciascuno tra P e Q è una PL sfera o un PL disco.*[4]

DIM. Per provare (a) sia $a \in P$. Allora $L(a, P \star Q)$ è una sfera perché $P \star Q$ è una sfera. Ma $L(a, P \star Q) \approx L(a, P) \star Q$. Procedendo induttivamente sulla dimensione di $P \star Q$, possiamo assumere che Q sia una sfera. Per un argomento simmetrico anche P é una sfera. La parte (b) si prova nello stesso modo.

♣

32.9 Collari e isotopie

DEFINIZIONE. Se P è un sottopoliedro di Q, un *collare* di P in Q è una immersione PL (ovvero un omeomorfismo PL sull'immagine):

(32.9.1) $$\gamma\colon P \times [0,1] \to Q$$

tale che
(a) $\gamma(x, 0) = x$ per $x \in P$
(b) $\gamma(P \times [0,1))$ è un intorno aperto di P in Q.

[4] escludendo evidentemente che entrambi siano PL sfere.

Per abuso di linguaggio anche l'immagine di γ si dice un collare di P in Q e P si dice *collarizzato* in Q.

Conviene allora pensare direttamente a $P \times [0,1]$ come ad un sottopoliedro chiuso di Q, detto $R := Q - P \times [0,1)$ per costruzione anche R è un poliedro chiuso e Q si ottiene incollando $P \times [0,1]$ e R lungo la *base* $P \times 1$.

É conveniente introdurre la nozione di collare anche per le coppie (lo faremo in particolare per varietà con bordo).

Definizione. Dati dunque poliedri $P \subset Q$, $Q' \subset Q$ consideriamo il poliedro $P' := P \cap Q'$ un *collare* di P, P' in Q, Q' è un collare

$$\gamma: P \times [0,1] \to Q \tag{32.9.2}$$

di P in Q tale che $\gamma^{-1}(Q') = P' \times [0,1]$.

In altre parole: Sia $(P, P_0) \subset (Q, Q_0)$ una inclusione di coppie di poliedri. Un *collare* di (P, P_0) in (Q, Q_0) è una funzione $\gamma: (P, P_0) \times [0,1] \to (Q, Q_0)$, che si restringe a collari di P in Q e di P_0 in Q_0

Proposizione. *Se K è un complesso simpliciale e $v|K|$ è un cono, allora $|K|$ è collarizzato in $v|K|$.*

Dim. La cosa non è cosí ovvia come sembra. Sia vK la triangolazione naturale di $v|K|$, ottenuta prendendo il join di v con i simplessi di K. Dato ϵ, con $0 < \epsilon < 1$, sia $N_\epsilon \subset v|K|$ la totalità dei punti $x \in v|K|$, con $t_v(x) \in [0, \epsilon]$. Qui t_v è la coordinata baricentrica rispetto a v. (**figura**).

Chiaramente N_ϵ è un intorno cilindrico di $|K|$ in $v|K|$, tuttavia la parametrizzazione naturale mediante la coordinata t_v non è un collare PL a causa dello sbaglio standard. Per correggerla, si osservi che N_ϵ è il poliedro sostegno di un complesso di celle, il quale è combinatoriamente equivalente a $K \times [0, \epsilon]$, pertanto $N_\epsilon \approx |K| \times [0, \epsilon]$ in base alla Prop **31.4**

♣

Vi è una versione relativa della Prop. precedente, che si dimostra nello stesso modo:

Proposizione. *Se $L \subset K$ sono complessi simpliciali e $v|K|$ è un cono, la coppia $(|K|, |L|)$ è collarizzata in $(v|K|, v|L|)$.*

Corollario. *Se Δ è un n-disco, $\partial\Delta$ è collarizzato in Δ.*

Dim. Senza perdere in generalità, possiamo assumere Δ un n-simplesso. Se v è un punto di $Int\ \Delta$, allora $|\Delta| = |v\partial\Delta|$. Il corollario segue dalla proposizione precedente.

♣

Il Corollario provato si inserisce in un contesto molto piú generale.

DEFINIZIONE. P si dice *localmente collarizzato* in Q, se, per ogni $a \in P$, il link $L(a,Q)$ è un cono sul link $L(a,P)$.

(P,P_0) si dice *localmente collarizzato* in (Q,Q_0), se, per ogni $a \in P$ la coppia di link $(L(a,Q), L(a,Q_0))$ è una coppia di coni aventi il medesimo vertice e basi $(L(a,P), L(a,P_0))$.

In base all'esercizio **32.3**, se P è collarizzato in Q, allora P è localmente collarizzato. Sorprendentemente, vale anche il viceversa che enunciamo direttamente nel caso relativo:

TEOREMA. (esistenza del collare) *(P,P_0) è collarizzato in (Q,Q_0) se e solo se (P,P_0) è localmente collarizzato in (Q,Q_0).*

DIM. Triangoliamo Q in modo tale che tutti i poliedri dati siano sostegno di sottocomplessi.

Consideriamo il poliedro $R := Q \times [0,1]$. Per ogni vertice $a \in P$ consideriamo il link $L(a,Q)$ ed esibiamolo, secondo l'ipotesi isomorfo al cono $v * L(a,P)$. Se $a \in P_0$ prendiamo il vertice v in modo compatibile $v * L(a,P) \supset v * L(a,P_0)$.

In R il link di $(a,0)$ può essere identificato con $(a,1) * L(a,P) = (a,1) * v * L(a,P)$ e la stella di $(a,0)$ con $(a,0) * (a,1) * v * L(a,P)$. Si può certamente fare l'identificazione in modo tale che per i punti di $(a,0) * (a,1) * L(a,P)$ si abbia $t_0(a,0) + t_1(a,1) + t_2(b,0) = ((t_0 + t_1)a + t_2 b, t_1)$.

Il join $(a,0)*(a,1)*v$ è un triangolo e possiamo su di esso considerare un $PL-$omeomorfismo f_a che fissa i punti di $(a,1) * v$ mentre contrae linearmente $(a,0) * (a,1)$ a $(a,1/2) * (a,1)$.

Estendiamo f_a ad $f_a * 1_{L(a,P)}$ che è una trasformazione identica sul link di $(a,0)$ in R e quindi finalmente si estende ad una trasformazione $\phi_a : R \to R$ ponendola l'identità sul complementare della stella di a.

La trasformazione ϕ_a gode delle seguenti proprietà:

$$\phi_a(Q \times 0) \subset Q \times 0 \cup P \times I,\ \phi_a(Q_0 \times 0) \subset Q_0 \times 0 \cup P_0 \times I,$$
$$\phi_a(p,t) = (p, \gamma_a(p,t)),\ \forall p \in P, t \in I,$$
$$\begin{cases} \gamma_a(p,t)) > t,\ \text{se } p \in S(a,P) - L(a,P),\ t < 1 \\ \gamma_a(p,t)) = t,\ \text{se } p \notin S(a,P) - L(a,P) \\ \gamma_a(p,1)) = 1 \end{cases}$$

Sia Φ la composizione di tutte le funzioni ϕ_a al variare di a nei vertici di P in un ordine arbitrariamente fissato, abbiamo ora:

$$\Phi(p,t) = (p, \gamma(p,t)),\ \forall p \in P, t \in I, \gamma(p,t)) \geq t, \gamma(p,0)) > 0,\ \forall p,$$
$$\Phi(Q \times 0) \subset Q \times 0 \cup P \times I,\ \Phi(Q_0 \times 0) \subset Q_0 \times 0 \cup P_0 \times I,$$

Per costruzione $\gamma : P \times I \to I$ è una funzione PL.

Ne segue che il poliedro $\Phi(Q,0)$ è PL omeomorfo a Q con un omeomorfismo che trasforma P in $\Phi(P,0) \subset P \times I - P \times 0$.

Basta quindi far vedere che il poliedro $C := \{(p,t)|0 \leq t \leq \gamma(p)\}$ è un collare di $\Phi(P,0)$ in $\Phi(Q,0)$ (compatibile con Q_0, P_0).

Triangoliamo la proiezione di C sulla base $P \times 0$ e vediamo quindi che C può essere descritto da un complesso di celle combinatoriamente isomorfo al complesso di $P \times I$ (associato alla triangolazione appena costruita). Questo prova il Teorema.

♣

32.10

DEFINIZIONE. Una *isotopia* H di P è un PL isomorfismo $H: P \times [0,1] \to P \times [0,1]$, tale che

(a) $H(P \times t) \subset P \times t$, $\forall t$, cioè H conserva i livelli;
(b) $H(x,0) = (x,0)$.

Sia $h_t: P \to P$ data da $h_t(x) = H(x,t)$ per $x \in P$, quindi h_t è un PL omeomorfismo che varia (in modo PL) secondo il parametro t, deformando l'identità $h_0 = Id_P$ (per la (b)).

L'omeomorfismo h_1 è l'omeomorfismo *finale* dell'isotopia e si dice che h_1 è *isotopico all'identità*.

Un'isotopia H *fissa* il sottopoliedro $P_0 \subset P$, se $H_t(x) = x$, per ogni $x \in P_0$. In tal caso si dice anche che H è *relativa* a P_0 o *modulo* P_0. Infine, in presenza di una metrica (indotta ad esempio da un immersione di un poliedro nello spazio euclideo) possiamo introdurre il concetto:

H è una ϵ *-isotopia* se $d(x, h_t(x)) < \epsilon$ per ogni t.

Sia $\gamma: P \times [0,1] \to Q$ un collare di P in Q e H un'isotopia di P.

Come già detto identifichiamo Q a $P \times [0,1] \cup R$ ($R = Q - P \times [0,1)$).

Per distinguere il parametro dell'isotopia da definire su Q dal parametro sul collare indichiamo $(x,s) \in P \times [0,1]$ un tipico punto.

Vogliamo definire *L'estensione di H mediante il collare* γ è l'isotopia H' di Q definita dalle seguenti formule:

(a) Su $P \times [0,1]$

$$h'_t(x,s) = \begin{cases} (h_{t-s}(x), s) & s \leq t \\ (x,s) & s \geq t \end{cases}$$

dove s è la coordinata del collare.

(b) Su R:

$$h'_t(z) =$$

è l'identità.

h'_t è ben definita poiché $t \leq 1$, $\forall t$ e quindi $h'_t(x,1) = (x,1)$. Che H' sia PL segue subito dalla formula di composizione

$$H' := P \times [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{1_P \times \phi} P \times [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{H \times 1_{[0,1]}} P \times [0,1]$$

con $\phi(t,s) := (\max(t-s,0),s)$.

Nota che su $P \times [0,1]$, ogni h'_t conserva i livelli, cioè la coordinata s.

§33 Coni duali

33.1 Sia K un complesso simpliciale e $K^{(1)}$ il derivato di K ottenuto prendendo (solo per fissare le idee) come centri di derivazione i baricentri dei simplessi di K. Il *cono duale* di $A \in K$ o *stella trasversa* di A in K è il sottocomplesso di $K^{(1)}$:

(33.1.1) $$D(A,K) = \{a_1 a_2 \cdots a_r | A \preceq A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_r \in K\}$$

dove i punti a_i sono i baricentri dei simplessi A_i o più in generale i centri di derivazione.

$D(A,K)$ è un cono simpliciale di vertice $a \in Int\ A$ (il baricentro o il centro di derivazione) e base:

$$\dot{D}(A,K) = \{a_1 a_2 \cdots a_r | A \prec A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_r \in K\}$$

(cioè $A \neq A_1$)

Se $L \subset K$ e $A \in L$, allora $D(A,L) = D(A,K) \cup L^{(1)} \subset D(A,K)$ è un sottocono con il medesimo vertice a. Dalla Prop 32.10 ricaviamo:

PROPOSIZIONE. *La coppia* $(|\dot{D}(A,K)|,|\dot{D}(A,L)|)$ *è collarizzata in* $(|D(A,K)|,|D(A,L)|)$.

Note.

(a) La stella trasversa si può anche descrivere nel modo seguente:

(33.1.2) $$D(A,K) = \cap_v S(v, K^{(1)})$$

dove v varia tra i vertici di A.

(b) Da un punto di vista categoriale, $K^{(1)}$ è il nervo del poset associato a K, scritto $K^{(1)} = \eta K$ e:

$$D(a,K) = \eta\{B \in K : A \preceq B\}$$

$$\dot{D}(A,K) = \eta\{B \in K : A \prec B\}$$

33.2

PROPOSIZIONE. $|\dot{D}(A,K)| \approx |L(A,K)^{(1)}|$ *(un isomorfismo simpliciale).*

DIM. Dato un simplesso B di K tale che $A \prec B$ vi è un unico $C \in K$, tale che $B = A \star C$ e viceversa, questa è una corrispondenza biunivoca preservante l'ordinamento e pertanto i nervi di questi due posets sono isomorfi.

Per quanto riguarda le rispettive realizzazioni geometriche, un tipico vertice di $\dot{D}(A,K)$ è un baricentro di qualche B con $A \prec B$, mentre dato $B = A \star C$ il baricentro di C è un tipico vertice di $L(A,K)^{(1)}$. La corrispondenza $b \to c$ tra i baricentri di B e C definisce pertanto, al variare di B, un isomorfismo simpliciale tra $\dot{D}(A,K)$ e $L(A,K)^{(1)}$ (**figura**).

♣

Notiamo che l'isomorfismo descritto sopra non è altro che una proiezione pseudoradiale dal baricentro a di A.

Sia

$$K^\star = \{D(A,K) : A \in K\}.$$

La seguente proposizione è un esercizio.

Proposizione-Esercizio. $|K^\star| = |K|$ *ed inoltre:*

(1) $|K|$ *è l'unione disgiunta degli insiemi* $Int\ |D(A,K)|$ *(al variare di* A *nei simplessi);*

(2) $|\dot{D}(A,K)| = \cup_{A\prec B}|D(B,K)|$ *è unione di elementi di* $K^\star$.

Qui $Int\ |D(A,K)|$ *sta per* $|D(A,K)| - |\dot{D}(A,K)|$.

Sugg. Dato comunque un punto di p se ne consideri il supporto in $K^{(1)}$. Poichè i simplessi di $K^{(1)}$ sono in corrispondenza biunivoca con le sequenze crescenti $A_1 \prec A_2 \cdots \prec A_k$ di simplessi in K al supporto di p è associato il minimo simplesso A nella sequenza associata, provare che $p \in Int\ |D(A,K)|$.

$K^\star$ si chiama il *complesso duale* di K.

§34 PL-VARIETÀ

Nota Ora entriamo nella parte geometricamente più interessante, introduciamo la nozione di varietà (non singolare) ed anche un inizio di analisi di possibili singolarità, sviluppiamo inoltre un poco di tecniche per studiare varietà tramite una decomposizione in opportuni blocchi.

34.1

Definizione. Un poliedro M si dice una PL *varietà* n*-dimensionale* (o semplicemente, una n*-varietà*) se il link di ogni suo punto è una $n-1$-sfera PL o un $n-1$-disco PL. Se M è una PL varietà, il *bordo di* M, scritto ∂M, è, per definizione, costituito dalla totalità di quei punti il cui link è un disco.

Il bordo è ben definito, perché un disco e una sfera non sono topologicamente equivalenti, tantomeno PL equivalenti. $M - \partial M$ si chiama *interno* di M. Se $\partial M = \emptyset$, allora M si dice una varietà *chiusa* o *senza bordo.*

Esempi.
(a) Una n-sfera PL è una n-varietà senza bordo.
(b) Un n-disco PL è una varietà con bordo una $n-1$-sfera PL. Segue dalla prop **32.5**.

Una prima proprietà (intuitivamente evidente) è data dalla:

PROPOSIZIONE. *∂M è una $n-1$-varietà chiusa, collarizzata in M.*

DIM. Questa proposizione verrà dimostrata piú avanti, nel contesto generale dei poliedri con un fissato tipo di singolarità, di cui le PL varietà sono un esempio.

♣

34.2
Consideriamo ora una PL varietà $n-$dimensionale, con bordo $(M, \partial M)$, e sia (K, K_0) una triangolazione di questa coppia.

PROPOSIZIONE. *Se $A \in K$ e $dim A = i$:*
(1) *$|L(A,K)|$ è una $(n-i-1)$-sfera, se $A \in K - K_0$*
(2) *$|L(A,K)|$ è un $(n-i-1)$-disco, se $A \in K_0$.*

DIM. (1) Sia a il baricentro di A, per ipotesi

$$S^{n-1} = L(a, M) = \dot{A} \star L(A,K) = S^{i-1} \star L(A,K)$$

Dal corollario 32.8 segue (1).

(2) È simile, in questo caso

$$B^{n-1} = L(a, M) = \dot{A} \star L(A,K) = S^{i-1} \star L(A,K)$$

il medesimo corollario implica che $|L(A,K)| = B^{(n-i-1)}$.

♣

34.3 Dalle formule, per il link in un prodotto e per i join di dischi e sfere, nonché dal Cor **32.8**, si deduce:

PROPOSIZIONE. *$P \times Q$ è una varietà se e solo se P, Q sono entrambi varietà. In tal caso $\partial(P \times Q) = \partial P \times Q \cup P \times \partial Q \subset P \times Q$.*[5]

DIM. Vale la pena osservare il caso di un punto $(x,y) \in \partial P \times \partial Q$ con link $B^{n-1} * B^{m-1} = B^{n+m-1}$.

♣

[5] si osservi la differenza con il caso differenziabile in cui i punti di $\partial P \times \partial Q$ danno luogo a spigoli non lisci.

Teorema **(Unicità dei collari)**. *Sia P un sottopoliedro di una varietà M e γ' un collare di $(\partial M, P \cap \partial M)$ in (M, P) (supposto esistente). Se γ è un qualsiasi collare di ∂M in M, esiste una isotopia h_t di M modulo ∂M, tale che*

$$h_1(\gamma'(x, s)) = \gamma(x, s)$$

per ogni $x \in \partial M$, $s \in [0, 1]$.

Per la dimostrazione si rimanda a [Zeeman]. ♣

Nota il caso $P = \emptyset$.

La prossima definizione è semplicemente una astrazione della idea di complesso di celle. Sostituiamo dischi a celle in quanto la nozione di cella è relativa ad una immersione del poliedro mentre quella di disco è intrinseca.

Definizione.

(1) Sia J un insieme finito di PL dischi in un poliedro $\mathbb{R}^n$ e sia $X = \cup\{A : A \in J\}$.

(X, J) o, spesso, semplicemente J si dice un *complesso di dischi* se

(1) X è l'unione disgiunta degli interni $Int\ A$,
(2) Se $A \in J$, allora ∂A è una unione di elementi di J.

(2) Un sottoinsieme $J_0 \subset J$ è un *sottocomplesso* se J_0 è esso stesso un complesso di dischi.
(3) Lo *scheletro r-dimensionale* $J^{(r)} \subset J$ è la totalità dei dischi di dimensione minore o uguale a r.
(4) Un complesso J' è una *suddivisione* di J, scritto $J' \lhd J$ se J e J' hanno il medesimo poliedero sostegno X e, inoltre, ogni elemento di J è unione di elementi di J'.

Notazione. Se $J_0 \subset J$ sono complessi di dischi, e $J' \rhd J$ una suddivisione, allora $J'|J_0$ starà ad indicare la suddivisione indotta da J' su J_0, ovvero il sottocomplesso dei dischi di J' contenuti in dischi di J^0.

Esempi di complessi di dischi sono i complessi simpliciali e i complessi di celle. Ma l'esempio piú importante è fornito dal complesso duale di una triangolazione di una PL varietà.

Proposizione. *Sia K una triangolazione di una PL varietà. Allora il complesso duale $K^\star$ (cf. 33.2) è un complesso di dischi e $K^{(1)} \lhd K^\star$ (ovvero la suddivisione baricentrica di K suddivide anche il complesso duale).*

Dim. Ricordiamo che $K^\star = \{D(A, K) : A \in K\}$. Per la Prop **33.2**: $|\dot{D}(A, K)| \approx |L(A, K)^{(1)}| \approx |L(a, K)|$. Quest'ultimo è una sfera PL e quindi $|D(A, K)|$ è un disco PL. Il resto della proposizione coincide con la prop. esercizio **33.2**.

♣

§35 Tipi di Singolaritá

Ora inizieremo a studiare una generalizzazione di verietà in cui si ammettono alcune singolarità predeterminate.

Sia dato per ogni $n \geq 0$ un insieme $\mathbb{L}_n$ di classi di PL isomorfismo di poliedri compatti n-dimensionali. Poniamo $\mathbb{L} := \cup_{n=0}^{\infty} \mathbb{L}_n$. Introduciamo i seguenti assiomi per $\mathbb{L}$:

(a) $S^0 \in \mathbb{L}_0$
(b) se $P \in \mathbb{L}_n$ e $x \in P$, allora $L(x, P) \in \mathbb{L}_{n-1}$
(c) $\mathbb{L}_n \star \mathbb{L}_m \subset \mathbb{L}_{m+n+1}$
(d) $C\mathbb{L}_{n-1} \cap \mathbb{L}_n = \emptyset$

Il significato dei simboli è chiaro: C è il funtore cono e la (d) dice che il cono di un elemento di $\mathbb{L}_{n-1}$ non è mai un elemento di $\mathbb{L}_n$. La (c) dice che $\mathbb{L}$ è chiuso rispetto all'operazione di join.

Per convenzione pensiamo a $\mathbb{L}_{-1} := \{\emptyset\}$. Consideriamo lo spazio formato da un singolo punto come cono sull'insieme vuoto.

Definizione. 1) $\mathbb{L}$ si chiama un *tipo di singolarità*, o una *classe di links*, se soddisfa gli assiomi precedenti.

2) Una $\mathbb{L}$-*varietà* di dimensione n è un poliedro M i cui links appartengano ad $\mathbb{L}_{n-1}$ oppure a $C\mathbb{L}_{n-2}$.

Conseguenze immediate degli assiomi

(1) Le condizioni (a) e (c) implicano che la classe che si riduce all'insieme delle PL sfre S^n è una classe di links contenuta in ogni classe di links $\mathbb{L}$ (32.7) mentre $D^n \in C\mathbb{L}_{n-1}$, pertanto una PL varietà è una $\mathbb{L}$-varietà per ogni classe $\mathbb{L}$.

Viceversa una $\mathbb{L}$ varietà per la classe di links formata dalle sole sfere è una PL varietà.

(2) Se Σ è il funtore sospensione, segue da (a) e da (c) che $\Sigma\mathbb{L}_{n-1} \subset \mathbb{L}_n$. In particolare, se M è una $\mathbb{L}$-varietà, anche $M \times I$ è una $\mathbb{L}$-varietà (cf. 32.6). Piú avanti generalizzeremo questa proprietà.

Definizione. Se M è una $\mathbb{L}$-varietà $n-$dimensionale, definiamo il *bordo* ∂M :

$$\partial M = \{x \in M : L(x, M) \in C\mathbb{L}_{n-2}\} \tag{35.0.1}$$

Per l'assioma (d) ∂M è ben definito. Se $\partial M = \emptyset$, allora M si dice *chiusa* o *senza bordo*.

Esempio S^n è una $\mathbb{L}$-varietà senza bordo e D^n è una $\mathbb{L}$-varietà con bordo S^{n-1} per ogni classe di Links.

Dimostreremo tra poco che ∂M è una $\mathbb{L}$-varietà chiusa, collarizzata in M.

Prima di tutto vediamo alcuni esempi di classi di links.

Esempi.

(1) $\mathbb{L}_n = \{S^n\}$ è una classe di links. Le $\mathbb{L}$-varietà corrispondenti sono tutte e sole le PL varietà.

(2) $\mathbb{L}_n$ è la classe di tutti i poliedri n-dimensionali che non sono coni. In questo caso una $\mathbb{L}$-varietà non è altro che un poliedro omogeneamente n-dimensionale.[6]

Sia Λ un sottoanello dei razionali.

(3) Sia $\mathbb{L}_0 = \{S^0\}$ e

$$\mathbb{L}_n = \{P|L(x,P) \in \mathbb{L}_{n-1}, H_\star(P,\Lambda) \approx H_\star(S^n,\Lambda)\}$$

Le $\mathbb{L}$-varietà sono le *varietà omologiche a coefficienti* Λ. Per controllare l'assioma del join si usi la formula

$$H_p(X \star Y) \approx H_{p-1}(X \times Y, X \vee Y)$$

(4) Sia $\mathbb{L}_0 = \{S^0\}$, $\mathbb{L}_1 = \{S^1\}$ e, per $n > 1$:

$$\mathbb{L}_n = \{P|L(x,P) \in \mathbb{L}_{n-1} : H_\star(P,\Lambda) \approx H_\star(S^n,\Lambda); \pi_1(P) = 0\}$$

Le $\mathbb{L}$-Varietà sono le Λ-*varietà omotopiche.*

(5) $\mathbb{L}_0 = \{S^0\}$; $\mathbb{L}_n = \{P : L(x,P) \in \mathbb{L}_{n-1};\ \chi(P) = 1 + (-1)^n\}$. Le $\mathbb{L}$-varietà sono note come *varietà di Eulero.*

Sia m un intero maggiore di due e P_m il tipo di isomorfismo degli spazi discreti di cardinalità m.

(6) Sia $\mathbb{L}_0 = \{P_{2l} : l = 1, 2, \dots\}$ ed $\mathbb{L}_n = \{P : L(x,P) \in \mathbb{L}_{n-1};\ \chi(P) = 0\ (mod\, 2)\}$. Una $\mathbb{L}$-varità è nota come *varietà di Eulero modulo 2.* Ogni varietà algebrica reale è una tale varietà (Sullivan).

Finalmente l'esempio che piú ci interesserà:

($\mathcal{P}$) Sia $\mathbb{L}_0 = \{S^0\}$ ed $\mathbb{L}_n = \{P : L(x,P) \in \mathbb{L}_{n-1}\}$. Una $\mathbb{L}$-varietà è nota come *pseudovarietà.* Verificheremo piú avanti che $\mathcal{P}$ è effettivamente un tipo di singolarità.

La precedente definizione ammette una generalizzazione.

($\mathcal{P}_m$) Sia $\mathbb{L}_0 = \{S^0, P_m\}$ ed $\mathbb{L}_n = \{P : L(x,P) \in \mathbb{L}_{n-1}\}$. Una $\mathbb{L}$-varietà prende il nome di $\mathbb{Z}/m$-*pseudovarietà.*

[6] ovvero in cui il link di ogni punto è $n-1$-dimensionale.

Lemma. *Sia $\mathbb{L}$ una classe di singolarità ed M una $\mathbb{L}-$varietà. Allora ∂M è chiuso in M ed è un sottopoliedro.*

Dim. Facciamo vedere che $M - \partial M$ è aperto in M. Sia $a \in M - \partial M$, $S(a, M) = aL(a, M)$ una stella di a e b un punto di $S(a, M) - L(a, M)$. Per la formula 32.7.2 del link in un join:

$$L(b, S(a, M)) \approx \Sigma L(b', L(a, M))$$

dove b' è l'unico punto di $L(a, M)$ allineato con a e b. Per ipotesi, $L(a, M) \in \mathbb{L}_{n-1}$, quindi $L(b', L(a, M)) \in \mathbb{L}_{n-2}$ e $\Sigma\mathbb{L}_{n-2} \subset \mathbb{L}_{n-1}$. Dunque:

$$L(b, S(a, M)) \approx L(b, M - \partial M) \subset \mathbb{L}_{n-1}$$

Questo dimostra che $M - \partial M$ è aperto e quindi ∂M è chiuso.

Facciamo ora vedere che ∂M è un poliedro. Sia K una triangolazione di M. Mostreremo che K si restringe ad una triangolazione K_0 di ∂M. Infatti, sia $A \in K$. Tutti i punti di $Int\ A$ hanno il medesimo link in M, vale a dire $|\dot{A} \star L(A, K)|$, per l'esempio-esercizio **32.1**. Poiché ∂M è ben definito, deve essere $Int\ A \subset M - \partial M$, oppure $Int\ A \subset \partial M$. Nella seconda eventualità, poiché ∂M è chiuso, tutto il simplesso A apparterrà a ∂M. Perciò ∂M è ricoperto da un sotto complesso K_0. Questo conclude la dimostrazione.

♣

35.1

Proposizione. *Se M è una $\mathbb{L}$-varietà di dimensione n, ∂M è una $\mathbb{L}$-varietà chiusa di dimensione $n-1$, collarizzata in M.*

Dim. Sia $a \in \partial M$ prendiamo un intorno conico di a, PL isomorfo al cono $C(L(a, M)) = a * L(a, M)$. Per definizione di bordo $L(a, M) = C(L_0) = v * L_0$ è un cono di base $L_0 \in \mathbb{L}_{n-2}, L_0 \subset \partial M,\ v \in M - \partial M$, quindi

$$C(L(a, M)) = a \star v \star L_0.$$

Vogliamo provare che i soli punti, in tale intorno conico, in ∂M sono le proiezioni di L_0 dal punto a, ovvero

$$a \star v \star L_0 - v \star L_0 \cap \partial M = a \star L_0 - L_0.$$

In $a \star v \star L_0 = [0, 1] * L_0$ i punti di $(0, 1) * L_0 - L_0$ hanno links o $S^0 * L_0 \in \mathbb{L}_{n-1}$ (per i punti di $(0, 1)$) oppure per un punto interno al join $x * y,\ x \in (0, 1),\ y \in L_0$ si ha $S^0 * S^0 * A \in \mathbb{L}_{n-1}$ dove $A = L(y, L_0) \in \mathbb{L}_{n-2}$ è il link di un punto di L_0 in L_0. In ogni caso $(0, 1) * L_0 \subset M - \partial M$.

Invece un punto di $a * y \notin L_0,\ y \in L_0$ ha link $v * L_0 \in C(\mathbb{L}_{n-1})$ se è il punto a e $v * S^0 * L(y, L_0) \in C(\mathbb{L}_{n-1})$ altrimenti.

Pendendo ora i links all'interno dell'aperto $a \star v \star L_0 - v \star L_0$ vediamo anche che per un tale punto a si ha $L(a, M) = v * L(a, \delta M)$.

Questo prova sia che ∂M è una $\mathbb{L}$ varietà chiusa sia che è localmente collarizzata in M.

♣

35.2

PROPOSIZIONE. *1) Sia $\mathbb{L}$ un tipo di singolarità.*

(a) *Se $P \star Q \in \mathbb{L}$, sia P che Q sono in $\mathbb{L}$.*

(b) *Se $P \star Q \in C\mathbb{L}$ e $P \in C\mathbb{L}$, allora $Q \in \mathbb{L}$.*

2) $M \times N$ è una $\mathbb{L}$-varietà $\Leftrightarrow$ M ed N sono $\mathbb{L}$-varietà e in tal caso

$$\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N \subset M \times N. \tag{35.2.1}$$

DIM. 1) Per induzione sulla dimensione di $P \star Q$ come nel caso delle sfere e dei dischi (Corollario **32.6**).

2) (a) $\leftarrow$. Si tratta di una semplice verifica basata sull'assioma (c), sulla formula del link in un prodotto e sul fatto che il PL join di un cono con qualsiasi cosa è ancora un cono.

(b) $\Rightarrow$ Si applichi la parte 1) . Vale la pena osservare il caso di un punto $(x, y) \in \partial M \times \partial N$ con link $v * A * w * B$, $A, B \in \mathbb{L}$. Si osserva che $v * w \approx a * S^0$ quindi il Link di (x, y) è isomorfo a $a * S^0 * A * B \in C(\mathbb{L})$.

♣

Ritorniamo ora all'esempio $\mathcal{P}$ delle pseudovarietà.

TEOREMA. *La classe $\mathbb{L}_0 = \{S^0\}$ e $\mathbb{L}_n = \{P : L(x, P) \in \mathbb{L}_{n-1}\}$ è un tipo di singolarità.*

DIM. Gli assiomi (a) e (b) sono ovvi. L'assioma (c) non presenta difficoltà usando le formule per il link in un join. Verifichiamo l'assioma (d) per induzione.

$n = 1$. $C\mathbb{L}_0$ è costituito da 1-dischi. Nessun elemento di $\mathbb{L}_1$ può essere un 1-disco perché i link devono essere degli S^0.

Supponiamo il teorema vero fino a $n-1$. In particolare $C\mathbb{L}_{n-2} \cap \mathbb{L}_{n-1} = \emptyset$. Sia $C(P)$ un elemento di $C\mathbb{L}_{n-1}$ e $x \in P$. Poiché P è collarizzato in $C(P)$, si ha

$$L(x, C(P)) \approx CL(x, P)$$

$P \in \mathbb{L}_{n-1}$ implica $L(x, P) \in \mathbb{L}_{n-2}$. Per l'ipotesi induttiva $C\mathbb{L}_{n-2} \cap \mathbb{L}_{n-1} = \emptyset$, quindi non può esistere un elemento di $\mathbb{L}_n$, che sia PL isomorfo a $C(P)$.

♣

35.3 La seguente proposizione si dimostra facilmente usando la formula combinatoria **(C3)**.

Proposizione. *M è una n-pseudovarietà chiusa se e solo se, per ogni triangolazione K di M ed ogni $(n-i)$-simplesso $A \in K$, si ha $L(A,K) = S^0$, se $i = 1$ e, per $i > 1$, è verificata una qualsiasi delle seguenti condizioni:*

(1) $|L(A,K)| \neq \emptyset$
(2) $|L(A,K)|$ *è una* $(i-1)$*-pseudovarietà*
(3) A *è faccia di qualche* n*-simplesso.* ♣

In particolare, M è una PL pseudovarietà chiusa se e solo se una sua qualsiasi triangolazione è una pseudovarietà combinatoria.

Sussistono analoghe proposizioni per pseudovarietà con bordo e per le $\mathbb{Z}/m$-pseudovarietà, che lasciamo come esercizio al lettore.

§36 Complessi collarizzati

36.1 È utile introdurre una generalizzazione del concetto di complesso di dischi in cui i blocchi siano oggetti più generali, la diamo come segue:

Definizione. Un *complesso collarizzato*, in breve *c-complesso* è una coppia (X, F), dove:

X è un poliedro ed $F = \{F_\alpha\}$ è una collezione finita di sottopoliedri di X, tale che:
(a) per ogni F_α è dato un sottopoliedro ∂F_α, collarizzato in F_α;
(b) X è l'unione disgiunta degli insiemi $Int\ F_\alpha := F_\alpha - \partial F_\alpha$;
(c) ∂F_α è unione di elementi di F.

I poliedri F_α si chiamano i *blocchi* del complesso.

Se $\mathbb{L}$ è un tipo di singolarità, ogni F_α è un $\mathbb{L}$-varietà e richiediamo che ∂F_α sia il bordo della varietà, chiameremo (X, F) un *complesso di* $\mathbb{L}$*-varietà*, o, brevemente $\mathbb{L}$*-complesso.*

Esempi. Un complesso simpliciale, un complesso di celle, un complesso di PL dischi sono esempi di complessi collarizzati, aventi come blocchi rispettivamente simplessi, celle convesse, PL dischi.

Se K è una triangolazione di un poliedro X, allora il complesso duale $(X, K^\star)$ (cf. §33) è un complesso collarizzato in cui ogni blocco è un cono.

Lemma. *1) Se P è una $\mathbb{L}$ varietà di dimensione n e B è un i-simplesso di una qualsiasi triangolazione K di P, allora $|L(B,K)| \in C\mathbb{L}_{n-i-2}$ se $B \in \partial P$ e $|L(B,K)| \in \mathbb{L}_{n-i-1}$ altrimenti.*

2) Se X è una $\mathbb{L}$ varietà, il complesso duale è un $\mathbb{L}$ complesso.

DIM. 1) Induzione sulla dimensione di B applicando la formula combinatoria **(C1)**: $L(b, P) = S^{i-1} * |L(B, K)|$ per b un punto interno a B.
2) Segue dalla prima parte.

♣

Se $F_\beta \subset \partial F_\alpha$, diciamo che F_β è una *faccia propria* di F_α e scriviamo, come al solito, $F_\beta \prec F_\alpha$.

(X_0, F_0) è un *sottocomplesso* di (X, F), se $X_0 \subset X$ e $F_0 \subset F$. Ad esempio, un blocco F_α, con tutte le sue facce, determina un sottocomplesso, spesso denotato ancora con F_α. Cosí pure, ∂F_α è naturalmente un sottocomplesso di F.

Un complesso collarizzato (X, F') è una *suddivisione* di (X, F) se ogni elemento di F è unione di elementi di F'.

Sia (X, F) un complesso collarizzato. Ad esso è associato l'insieme parzialmente ordinato delle sue facce e quindi, come ad ogni poset, il suo nervo.

Viceversa ad un insieme parzialmente ordinato S possiamo associare un complesso collarizzato $C_S := (X_S, \{F_x,\ x \in S\})$ in modo banale. Prendiamo il cubo I^S e, dato un punto $p := (a_x)_{x \in S} \in I^S$ definiamo il supporto di p come l'insieme

$$supp(p) := \{x \in S | a_x \neq 0\}.$$

Ricordiamo che, in un insieme parzialmente ordinato una catena è un sottoinsieme totalmente ordinato, poniamo allora, per $x \in S$,

$$F_x := \{p \in I^S | supp(p) \text{è una catena di elementi} \leq x\}$$
$$\partial F_x := \{p \in I^S | supp(p) \text{ è una catena di elementi} < x\}$$

e quindi $X_S := \{p \in I^S | supp(p) \text{ è una catena}\}$.

È chiaro che la costruzione soddisfa la proprietà:

$$x \in S,\ F_x := (\cup_{y<x} F_y) \times [0,1],\ X_S := \cup_{x \in S} F_x, \partial F_x := (\cup_{y<x} F_y) \times 0$$

avendo identificato $F_y, y < x$ con $F_y \times 0$.

In X_S abbiamo l'aperto denso $\mathring{X}_S$ definito per induzione con $\mathring{F}_x := (\cup_{y<x} \mathring{F}_y) \times [0,1)$ ovvero i punti in I^S con coordinate strettamente minori di 1.

Vogliamo provare come questa costruzione combinatoria è legata al caso generale.

Dato un blocco F_α di un complesso collarizzato (X, F) consideriamo l'insieme parzialmente ordinato $S(F_\alpha) := \{F_\beta \in F : F_\alpha \preceq F_\beta\}$, ad esso associamo come prima il complesso collarizzato banale $C_{S(F_\alpha)} \subset I^{S(F_\alpha)}$ prima costruito e i cui blocchi denotiamo con F_{F_β}.

Con una semplice induzione, utilizzando i collari dati, si prova che questo complesso da una struttura *normale* al blocco F_α:

LEMMA. *Esiste un intorno poliedrale $\mathcal{U}$ di F_α in X, PL–omeomorfo a $F_\alpha \times X_{S(F_\alpha)}$ il cui interno è $F_\alpha \times \mathring{X}_{S(F_\alpha)}$ e tale che*

$$\mathcal{U} \cap F_\beta = \begin{cases} \emptyset & se \quad F_\alpha \subsetneq F_\beta \\ F_\alpha \times F_{F_\beta} & se \quad F_\alpha \subset F_\beta \end{cases}.$$

Ora possiamo completare lo studio locale di un complesso collarizzato. Definiamo *stella trasversa* di F_α il complesso simpliciale:

$$D(F_\alpha, F) = \eta\{F_\beta \in F : F_\alpha \preceq F_\beta\} \tag{36.1.1}$$

nervo del poset formato da tutti i blocchi di cui F_α è una faccia; e *link trasverso*:

$$\dot{D}(F_\alpha, F) = \eta\{F_\beta \in F : F_\alpha \prec F_\beta\}. \tag{36.1.2}$$

Spesso F verrà omesso dalle notazioni.

Chiaramente $D(F_\alpha) = C(\dot{D}(F_\alpha))$ e, se F è un complesso simpliciale, la nozione di stella trasversa coincide con quella simpliciale. Il vertice di $C\dot{D}(F_\alpha)$ corrisponde al blocco F_α.

Il prossimo Teorema mostra come, in un complesso collarizzato, la struttura locale in un punto x, ovvero il Link, dipende solo dalla combinatoria dei blocchi, ovvero dal poset associato e dalla struttura locale del blocco al cui interno è x.

TEOREMA. *Se $x \in Int\ F_\alpha$, vi è la seguente formula per il link di x in X:*

$$L(x, X) \approx |\dot{D}(F_\alpha)| \star L(x, F_\alpha) \tag{36.1.3}$$

DIM. Sia $S(x, F_\alpha)$ un intorno conico di x in F_α con bordo $L(x, F_\alpha)$.

Dalla analisi precedente sappiamo che x ha un intorno PL isomorfo a $S(x, F_\alpha) \times X_{S(F_\alpha)}$.

Dalla 32.6.2 segue che il link di x in X è isomorfo al join $L(x, X_{S(F_\alpha)}) \star L(x, F_\alpha)$.

Basta provare dunque che $L(x, X_{S(F_\alpha)}) \approx |\dot{D}(F_\alpha)|$.

Denotiamo per semplicità $S = S(F_\alpha)$. Dalla costruzione induttiva di X_S segue che il link di x in X_S è descrivibile in modo induttivo. Se S è formato solo da F_α ed elementi minimi X_S è una unione di segmenti dal punto x ed il link è un insieme finito di punti. In generale preso un elemento massimale $u \in S$ posto $S_u := \{x \in S | x < u\}$ si osserva che

$$L(x, X_S) = C(L(x, X_{S_u}) \amalg_{L(x, X_{S_u})} L(x, X_{S-\{u\}})$$

dove $C(L(x, X_{S_u}))$ indica il cono sul link $L(x, X_{S_u})$.

Per terminare basta provare che il nervo di un poset $\eta(S)$ ha la stessa proprietà, infatti preso u massimale in S i simplessi di S sono le catene crescenti di elementi e quindi tutte le catene che non contengono u ovvero i simplessi di $S - \{u\}$ e le catene che terminano in u che sono proprio i simplessi di $S_u \cup \{u\}$ che formano il cono su $\eta(S_u)$.

Ritroviamo come caso particolare l'esempio-esercizio **32.1**, cioè:

Corollario. *Sia K un complesso simpliciale e $A \in K$. Per ogni punto $a \in Int A$:*

$$L(a, |K|) \approx |\dot{D}(A, K)| \star \dot{A} \approx |L(A, K)| \star \dot{A}.$$

Dim. Il secondo isomorfismo deriva dal fatto che, come già dimostrato, in un complesso simpliciale:

$$|\dot{D}(A, K)| \approx |L(A, K)^{(1)}| \approx |L(A, K)|.$$

Per il primo isomorfismo, si applichi il teorema precedente con $X = |K|$, $F = K$, $F_\alpha = A$, tenendo presente che $L(a, A) = \dot{A}$, se $a \in Int\ A$.

36.2 *c-funzioni* Nello spirito categorico della topologia algebrica consideriamo ora funzioni fra complessi collarizzati.

Definizione. Siano (X, F), (Y, G) due c-complessi indicizzati dal medesimo insieme. Una funzione PL, $f: X \to Y$ si dice una *funzione di c-complessi* o, brevemente, una *c-funzione* se, per ogni α, si ha:

(a) $F_\alpha = f^{-1} G_\alpha$
(b) $\partial F_\alpha = f^{-1} \partial G_\alpha$
(c) $\dim G_\alpha - \dim F_\alpha = q$, dove q è un intero positivo, negativo o nullo, detto *codimensione*, indipendente dall'indice α.

In generale non assumiamo che la f sia suriettiva, pertanto alcuni dei blocchi F_α possono essere vuoti, l'insieme vuoto essendo qui considerato come poliedro di qualsiasi dimensione.

Notazione: $f: (X, F) \to (Y, G)$ oppure $f: F \to G$.

Teorema. *Sia $f: (X, F) \to (Y, G)$ una c-applicazione.*

(1) *Si ha, per ogni $F_\alpha \neq \emptyset$:*

$$|\dot{D}(F_\alpha, F)| \approx |\dot{D}(G_\alpha, G)|.$$

(2) *Se $f: (X, F) \to (Y, G)$ è una c-applicazione tra $\mathbb{L}$-complessi ed Y è una $\mathbb{L}$-varietà, allora*
   (a) X è una $\mathbb{L}$-varietà
   (b) $f^{-1}(\partial Y) = \partial X$.
   (c) Infine $\dim X = \dim Y - q$.

Dim. 1) Se $F_\alpha \neq \emptyset$ e G_α è una faccia di G_β necessariamente $F_\beta = f^{-1} G_\beta$ è non vuoto, pertanto entrambe le stelle sono nervi di posets isomorfi.

2) Sia $x \in X$ un punto, per un opportuno indice α abbiamo

$$x \in Int\ F_\alpha,\ \ y := f(x) \in Int\ G_\alpha.$$

Per 36.1.3

$$L(x,X) \approx |\dot{D}(F_\alpha)| \star L(x,F_\alpha),\ \ L(y,Y) \approx |\dot{D}(G_\alpha)| \star L(y,G_\alpha).$$

Per ipotesi, $L(x,F_\alpha) \in \mathbb{L},\ L(y,G_\alpha) \in \mathbb{L}$ mentre, per la prima parte

$$|\dot{D}(F_\alpha)| \approx |\dot{D}(G_\alpha)|.$$

Ora distinguiamo i due casi:

(a) $y = f(x) \notin \partial Y,\ L(y,Y) = |\dot{D}(G_\alpha)| \star L(y,G_\alpha) \in \mathbb{L}$

(b) $y = f(x) \in \partial Y,\ L(y,Y) = |\dot{D}(G_\alpha)| \star L(y,G_\alpha) \in C\mathbb{L}$.

Per ipotesi, $L(y,G_\alpha) \in \mathbb{L}$, applichiamo la Prop **35.2** e deduciamo che, nel caso (a) $|\dot{D}(G_\alpha)| \in \mathbb{L}$ mentre nel caso (b) $|\dot{D}(G_\beta)| \in C\mathbb{L}$.

Dalle formule precedenti e dagli assiomi sulle classi di links l'enunciato segue immediatamente.

(c) segue dalla definizione di $c-$applicazione.

Osservazioni È opportuno notare alcuni casi speciali di questa nozione generale.

1) L'applicazione f è iniettiva e $q > 0$, in questo caso dobbiamo pensare ad X come ad una sottovarietà di Y di codimensione q con i blocchi di X in posizione trasversa a quelli di Y.

2) L'applicazione f è suriettiva e $q = -k < 0$, in questo caso dobbiamo pensare ad X come ad una fibrazione su Y con fibre di dimensione k. I blocchi di X si fibrano sui blocchi di Y.

36.3 Inclusioni rigide

Definizione. Siano $N \subset M$ due $\mathbb{L}$-varietà. L'inclusione si dice *rigida* se la coppia $(\partial M, \partial M \cap N)$ è collarizzata in (M,N).

Sia $(X,F) \subset (Y,G)$ un'inclusione di $\mathbb{L}$-complessi, cioè una $c-$applicazione iniettiva.

$$X \subset Y, \quad F_\alpha = G_\alpha \cap X, \quad \partial F_\alpha = (\partial G_\alpha) \cap X, \quad \dim F_\alpha = \dim G_\alpha - q.$$

Essa si dice *rigida*, se per ogni α, $F_\alpha \subset G_\alpha$ è rigida.

Vale l'analogo del teorema della sezione precedente per inclusioni rigide. Cioè:

TEOREMA. *Se $(X, F) \subset (Y, G)$ è un'inclusione rigida tra $\mathbb{L}$-complessi e Y è una $\mathbb{L}$-varietà, allora $X \subset Y$ è un'inclusione rigida di $\mathbb{L}$-varietà.*

DIM. Il teorema **36.2**, applicato con $f: (X, F) \subset (Y, G)$ ci dà tutto eccetto la rigidezza di $X \subset Y$.

Dobbiamo mostrare che $(\partial Y, X \cap \partial Y)$ è localmente collarizzato in (Y, X), pertanto collarizzato, cioè l'inclusione $X \subset Y$ è rigida.

Osserviamo prima di tutto che, se $F_\alpha \neq \emptyset$ e G_α è una faccia di G_β, dalle ipotesi di rigidità segue che anche $F_\beta \neq \emptyset$ ovvero i due poset dei blocchi F_β (risp. G_β) di cui F_α (risp. G_α) è una faccia sono identici, indichiamo con S_α tale poset, ad esso associamo il complesso collarizzato con spazio totale X_{S_α} come in 36.1.

Riprendendo la struttura locale descritta in 36.1, e sfruttando i collari delle coppie $(\partial G_\beta, \partial F_\beta)$ in (G_β, F_β) vediamo che abbiamo un intorno poliedrale di G_α del tipo $U = G_\alpha \times X_{S_\alpha}$ con $U \cap X = F_\alpha \times X_{S_\alpha}$.

In particolare abbiamo, per $x \in \partial X \cap Int\ F_\alpha$:

$$L(x, X) \approx |\dot{D}(F_\alpha)| \star L(x, F_\alpha)$$

e anche

$$L(x, Y) \approx |\dot{D}(G_\alpha)| \star L(x, G_\alpha)$$

e sappiamo che $L(x, X)$, $|\dot{D}(F_\alpha)|$, $L(x, Y)$, $|\dot{D}(G_\alpha)|$ sono coni.

Dobbiamo vedere che $L(x, X)$ ed $L(x, Y)$ possono essere scelti in modo da avere il medesimo vertice, atale scopo basta far vedere che $|\dot{D}(F_\alpha)|$ e $|\dot{D}(G_\alpha)|$ sono coni con il medesimo vertice. Questo è ovvio avendoli identificati con il link di x in X_{S_α}.

§37 Trasversalità di $\mathbb{L}$-varietà

NOTA In questo paragrafo studiamo la nozione di trasversalità nel caso PL come fondamento per una teoria della intersezione geometrica. Nel caso di varietà differenziabili la trasversalità di due sottovarietà in un punto si riconduce alla trasversalità degli spazi tangenti, nel caso PL tale idea non è disponibile né è possibile introdurre idee di ortogonalità. Si sostituiscono a queste, idee che vengono dalla nozione di collare (che fornisce direzioni normali) con le nozioni di inclusioni rigide e trasversalità rispetto ad una triangolazione.

37.1 Trasversalità

Vorremmo introdurre la nozione di trasversalità fra $\mathbb{L}$-varietà chiuse X, Y in una PL varietà chiusa M e provare:

Teorema (di trasversalità).

(1) *In una PL varietà chiusa l'intersezione trasversa di due* $\mathbb{L}$*-varietà chiuse è una* $\mathbb{L}$*-varietà chiusa, la cui codimensione è uguale alla somma delle codimensioni delle* $\mathbb{L}$*-varietà date.*

(2) *Date due* $\mathbb{L}$*-varietà chiuse* X, Y *in una PL varietà chiusa* M *ed* $\epsilon > 0$, *esiste una* ϵ*-isotopia di* M *che muove* X *in posizione* $\mathbb{L}$*-trasversa ad* Y *in* M.

Una nozione ingenua di trasversalità potrebbe essere quella studiata nella dualità. Potremmo ad esempio richiedere che X sia un sottocomplesso simpliciale di una triangolazione data K e che invece Y sia costruito con dischi trasversi ai simplessi di X ma è una definizione troppo restrittiva. L'idea che perseguiremo è quella di definire prima di tutto la trasversalità di una pseudovarietà X rispetto ad una data triangolazione o, piú in generale, rispetto ad un $\mathbb{L}$ complesso:

Definizione. Sia (Y, G) un $\mathbb{L}$-complesso. Un sottopoliedro X di Y si dice $\mathbb{L}$-*trasverso* a G o a (Y, G), se $(X, G \cap X) \subset (Y, G)$ è un'inclusione rigida di $\mathbb{L}$-complessi, cioè, per ogni α, $X \cap G_\alpha$ è una $\mathbb{L}$- varietà e l'inclusione $X \cap G_\alpha \subset G_\alpha$ è rigida.

Osservazione In particolare applicheremo la precedente definizione al caso delle triangolazioni.

Ora possiamo dare la nozione che ci interessa.

Definizione. Siano X e Y due $\mathbb{L}$- varietà chiuse in una PL varietà chiusa M. Diremo che X è $\mathbb{L}$-*trasversa* ad Y in M se esiste una triangolazione K di M, tale che:

(a) X sia $\mathbb{L}$-trasversa a (M, K)

(b) Y sia ricoperto da un sottocomplesso di K.

Osservazione La definizione data è purtroppo asimmetrica, va provato che, se X è $\mathbb{L}$-*trasversa* ad Y in M allora anche Y è $\mathbb{L}$-*trasversa* ad X in M.

Proviamo ora la prima parte del Teorema di trasversalità, lasciando la seconda che è più tecnica, al §37.5.

Dim. Siano X, Y due $\mathbb{L}$-varietà chiuse in posizione trasversa nella PL varietà chiusa M. Dobbiamo dimostrare che $X \cap Y$ è una $\mathbb{L}$-varietà chiusa.

Sia K una triangolazione di M tale che:

(a) X sia $\mathbb{L}$-trasversa a (M, K);

(b) $Y = |L|$, con $L \subset K$.

Allora $X \cap Y$ è un poliedro "$\mathbb{L}$-trasverso" a (Y, L), cioè:

$$(X \cap Y, X \cap L) \subset (Y, L)$$

è un'inclusione rigida di $\mathbb{L}$-complessi e Y è una $\mathbb{L}$-varietà. Basta, a questo punto, applicare il teorema **36.3** con:

L in luogo di G, $X \cap Y$ in luogo di X, $X \cap L$ in luogo di F, tenendo presente che $\partial X = \partial Y = \emptyset$.

L'asserzione sulle codimensioni è chiara.

Nei prossimi paragrafi sviluppiamo le tecniche necessarie sulle isotopie per completare la dimostrazione.

37.2 Località

Nella prossima proposizione vogliamo far vedere che la nozione data di trasversalità è in un certo senso *locale*. Prendiamo dunque un poliedro Y decomposto da un complesso di blocchi G che a sua volta sia suddiviso da un complesso di blocchi G'.

PROPOSIZIONE. *Se X è $\mathbb{L}$- trasverso a (Y, G') e $G' \lhd G$ allora X è $\mathbb{L}$-trasverso a (Y, G).*

DIM. Consideriamo un blocco G_α e la restrizione $G'|G_\alpha$. Per ipotesi G_α è una $\mathbb{L}$ varietà e poiché G' suddivide G abbiamo che i blocchi di G' contenuti in G_α, che possiamo denotare con $G'|G_\alpha$, presentano G_α come un $\mathbb{L}$ complesso.

Possiamo ora applicare il teorema 36.3 con:

$G'|G_\alpha$ in luogo di G, G_α in luogo di Y, $X \cap G_\alpha$ in luogo di X , $X \cap (G'|G_\alpha)$ in luogo di F.

Ne ricaviamo che $X \cap G_\alpha \subset G_\alpha$ è un'inclusione rigida di $\mathbb{L}$-varietà. Questo è vero per ogni α e quindi, per definizione, X è trasverso a G.

Nota che in questa proposizione non si assume, né accade che X e Y siano $\mathbb{L}$-varietà.

37.3 Naturalità

Notiamo innanzitutto che un complesso simpliciale o un complesso di dischi sono $\mathbb{L}$-complessi per ogni scelta di $\mathbb{L}$.

Fissiamo un tipo di singolarità $\mathbb{L}$.

LEMMA (naturalità della trasversalità). *Siano (X, K) e (Y, L) complessi simpliciali ed $f: X \to Y$ simpliciale rispetto a K ed L. Se $Z \subset Y$ è $\mathbb{L}$-trasverso ad L, allora $f^{-1}(Z)$ è $\mathbb{L}$-trasverso a K.*

DIM. (a) Supponiamo prima di tutto che f sia un'applicazione simpliciale elementare da un simplesso Δ^n, di vertici $v_0, \dots, v_n$ ad un simplesso Δ^{n-1} di vertici $v'_0, \dots, v'_{n-1}$, cioè $f(v_i) = v'_i$, per $i = 1, \dots, n-1$ e $f(v_n) = v'_{n-1}$.

Preso comunque un intorno poliedrale della faccia $(v_0, \dots, v_{n-1})$ consideriamone il complementare Q in Δ^{n-1}, per esempio in coordinnate baricentriche a_i i punti con $a_n \geq \epsilon$, $\epsilon > 0$. Se triangoliamo Q osserviamo che le preimmagini $f^{-1}(A)$ dei simplessi di tale triangolazione sono celle ed il complesso delle facce di tali celle è combinatoriamente equivalente al complesso dei celle dedotto da $Q \times I$.

Ne segue una equivalenza PL $(f^{-1}(Q), f^{-1}(Z \cap Q)) \approx (Q \times I, (Z \cap Q) \times I)$, da cui il risultato segue per i punti di $.f^{-1}(Z)$ che non si proiettano in $v_0, \ldots, v_{n-1}$.

Invece per i punti di $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ si ha che $f : f^{-1}(v_0, \ldots, v_{n-1}) \to (v_0, \ldots, v_{n-1})$ è un omeomorfismo e che, se $p \in f^{-1}(v_0, \ldots, v_{n-1})$ allora

$$f^{-1}L(f(p), Z) = L(p, f^{-1}(Z))$$

pertanto si può procedere per induzione.

Le medesime considerazioni per i collari (?? spiegare meglio).

(b) Nel caso generale, se $A \in K$, $f(A) \in L$. Se $f|A$ è iniettiva, il risultato è ovvio. Altrimenti $f|A$ si fattorizzza attraverso una composizione di applicazioni simpliciali elementari, per cui il risultato segue da un'applicazione ripetuta di (a).

37.4 Suddivisione

Definizione. Sia (X, F) un $\mathbb{L}$-complesso. Una *F-isotopia* di X è una isotopia h_t di X, tale che $h_t(F_\alpha) = F_\alpha$ per ogni α e ogni t.

Teorema (suddivisione). *Sia (Y, J) un complesso di dischi PL, $X \subset Y$ ed $\mathbb{L}$-trasverso a J e $J' \triangleleft J$. Allora esiste una J-isotopia di Y che porta X in posizione $\mathbb{L}$-trasversa a J'.*

Dim. Questa è la parte più tecnica della dimostrazione e la faremo per induzione sulla dimensione di Y. L'induzione comincia banalmente in dimensione zero. Supponiamo $\dim Y = m$, e, per comodità di notazioni, assumiamo dapprima che vi sia un solo m-disco $A \in J$. Pertanto detto Y^{m-1} lo scheletro $m-1$ dimensionale abbiamo che

$$Y = Y^{m-1} \amalg_{\partial A} A.$$

1) Come primo passo scegliamo un PL isomorfismo $g: I^m \to A$ e un piccolo cubo parallelo $I_1^m \subset I^m$, tale che $B := g(I_1)$ sia contenuto nell'interno di qualche m-disco della suddivisione indotta $J'|A$ **(figura)**.

$I^m - Int\ I_1^m \approx \partial I^m \times [0,1]$ implica che g induce un PL isomorfismo $\alpha: \partial A \times [0,1] \approx A - IntB$, ovvero un collare di ∂A in A il cui complemento è l'interno del cubo B.

2) Ora ci scegliamo un collare $\beta: \partial B \times [0,1] \to B$ di ∂B in B.

Mettiamo insieme i due collari α, β, chiaramente le formule

$$\lambda(x,t)) := \begin{cases} \alpha(x, 2t), & \text{per} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(\alpha(x,1), 2t-1), & \text{per} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

definiscono un nuovo collare di ∂A in A.

3) Torniamo ora al poliedro X. Per ipotesi esiste un collare:

$$\gamma: (\partial A, X \cap \partial A) \times I \to (A, X \cap A).$$

Per l'unicità dei collari, esiste una isotopia h_t di A modulo ∂A, tale che:

$h_1(\gamma(x,t)) = \lambda(t)$.

Estendendo h_t con l'identità su Y^{m-1} possiamo sostituire X con $h_1(X)$.

Identifichiamo l'immagine di γ con $\partial A \times [0,1]$ ed osserviamo che:

(1) A è l'unione del collare $\partial A \times [0,1/2]$ con B mentre $\partial A \times [1/2,1]$ è un collare di ∂B in B.

(2) L'intersezione di X con il collare $\partial A \times [0,1]$ coincide con il prodotto $(X \cap \partial A) \times [0,1]$.

(3) La coppia $(\partial B, X \cap \partial B)$ è collarizzata in $(B, X \cap B)$ e $X \cap B$ è sicuramente una $\mathbb{L}$-varietà perché uguaglia la $\mathbb{L}$-varietà $X \cap A$, privata del collare $(X \cap \partial A) \times [0,1/2)$.
Pertanto la inclusione di $X \cap B$ in B è rigida.

Denotiamo con (Y^{m-1}, J^{m-1}) lo scheletro $(m-1)$-dimensionale di (Y,J), con π la proiezione $A - Int\ B = \partial A \times I \to \partial A$ sul primo fattore.

Possiamo estendere questa proiezione a $\pi: Y - Int B \to Y^{m-1}$ ponendola uguale all'identità per $y \in Y^{m-1}$.

Sia K una triangolazione di $Y - Int\ B$, tale che:

(a) ogni disco di J' non contenente $Int\ B$, e anche ∂B, sia ricoperto da un sottocomplesso di K

(b) π sia simpliciale rispetto a K.

Si noti che in particolare K induce una triangolazione L su Y^{m-1} e che $K \cup B$ forma un complesso di dischi che copre Y.

Per l'ipotesi di induzione esiste una J^{m-1}-isotopia di Y^{m-1}, che pone $X \cap Y^{m-1}$ in posizione $\mathbb{L}$-trasversa ad L.

Estendiamo tale isotopia ad una J-isotopia μ_t di (Y,J) usando il collare γ di ∂A in A.

Sul collare $\partial A \times [0,1/2] = A - Int\ B$ usiamo la formula:

$$\mu_t(x,s) = (\mu_t(x), s),\ \ 0 \le s \le \frac{1}{2}$$

Su $\partial A \times [1/2,1]$ usiamo invece le formule di estensione dell'isotopia date da 32.10 e quindi estendiamo l'isotopia a tutto lo spazio ponendola uguale all'identità su $B - \partial A \times [1/2,1]$.

Il punto cruciale è che, sul collare $\partial A \times [0,1/2]$ l'estensione scelta per l'isotopia conserva la coordinata del collare, cioè commuta con π. In particolare sul poliedro $A - Int\ B$ si ha:

$$\pi^{-1}(\mu_1(X) \cap \partial A) = \mu_1(X) \cap (A - Int\ B)$$

Poiché π è simpliciale, il Lemma di Naturalità **37.3** ci assicura che $\mu_1(X) \cap (A - Int\ B)$ è $\mathbb{L}$-trasverso a $K|(A - Int\ B)$. In particolare $\mu_1(X) \cap \partial B$ è trasverso a $K|\partial B$.

In definitiva, $\mu_1(X)$ è $\mathbb{L}$-trasversa all'intero complesso di dischi $(Y, K \cup B)$.

Per costruzione, $K \cup B$ è una suddivisione di J', la Località (**Prop 37.2**), applicata a:

$\mu_1(X)$, in luogo di X; $K \cup B$, in luogo di G'; J', in luogo di G,
dà che $\mu_1(X)$ è $\mathbb{L}$-trasverso a (Y, J').

Questo dimostra il teorema nel caso di un solo m-disco. Ma l'intero argomento è stato formulato in modo da valere anche quando vi siano diversi m-dischi $A_1, \ldots, A_p$. Basta privarli di m- dischetti paralleli $Int\ B_1, \ldots, Int\ B_p$ e applicare la costruzione di sopra simultaneamente a tutti i dischi.

37.5 Fine della dimostrazione del Teorema di trasversalità

TEOREMA (di trasversalità). *Date due $\mathbb{L}$-varietà chiuse X, Y in una PL varietà chiusa M ed $\epsilon > 0$, esiste una ϵ-isotopia di M che muove X in posizione $\mathbb{L}$-trasversa ad Y in M.*

DIM. Sia $\overline{K}$ una triangolazione di M nella quale X, Y siano sostegni di sottocomplessi L, L_0 rispettivamente. Consideriamo il primo derivato baricentrico $\overline{K}^{(1)}$ di $\overline{K}$, ovviamente Y è ancora sostegno di un sottocomplesso di $\overline{K}^{(1)}$.

Prendiamo adesso il complesso dei dischi duali $(M, \overline{K}^*)$, dove:

$$\overline{K}^* = \{D(A, \overline{K}) : A \in \overline{K}\}$$

Per costruzione $\overline{K}^{(1)} \lhd \overline{K}^*$ ovvero $\overline{K}^{(1)}$ è una suddivisione di $\overline{K}^*$.

Per la prop **33.1** X è $\mathbb{L}$-trasverso a (M, K^*).

Applichiamo il teorema di suddivisione ad M, X con:

(M, K^*), in luogo di (Y, J);
$\overline{K}^{(1)}$, in luogo di J'.

Otteniamo l'esistenza di una K^*-isotopia di M, che muove X $\mathbb{L}$-trasverso a $\overline{K}^{(1)}$.

In particolare X si troverà $\mathbb{L}$-trasverso a Y e $K = \overline{K}^{(1)}$ è la triangolazione cercata.

Prendendo i simplessi della triangolazione $\overline{K}$ di diametro sufficientemente piccolo, certamente si può fare in modo che la K^*-isotopia sia una ϵ-isotopia per ogni ϵ.

Questo conclude la dimostrazione del teorema di trasversalità.

Esempi. In una PL varietà chiusa M, tramite una ϵ-isotopia, si possono mettere trasverse e la loro intersezione sarà una varietà del medesimo tipo:

(a) due PL varietà;
(b) due Λ-varietà omologiche;
(c) due Λ-varietà omotopiche;
(d) due varietà di Eulero;
(e) due pseudovarietà;
(f) due $\mathbb{Z}/m$-pseudovarietà.