CAPITOLO 11 BORDISMO

19 Bordismo di pseudovarietà non orientate

NOTA

La forma delle dimostrazioni dei risultati dei due precedenti paragrafi suggerisce che vi sia un metodo sistematico per descrivere l'omologia di uno spazio X usando applicazioni di pseudovarietà in X. Questo è quello che faremo adesso, cominciando, come al solito e per semplicità di esposizione, dal caso non orientato. Salvo avviso contrario, "pseudovarietà" starà ad indicare "pseudovarietà" non orientata con singolarità in codimensione ≥ 2, cioè $\mathcal{P}$-varietà nel linguaggio generale delle classi di link.

19.1 Bordismo di pseudovarietà. Denotiamo con $\mathcal{M}_n$ la classe delle n-pseudovarietà chiuse e consideriamo l'insieme vuoto come un elemento di $\mathcal{M}_n$ per ogni n. Introduciamo una relazione di equivalenza in $\mathcal{M}_n$ nel modo seguente. Se $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n$, un bordismo tra P_1 e P_2 è una $(n+1)$- pseudovarietà Q, insieme con PL isomorfismi $\phi_i : P_i \to P_i'$ $(i = 1, 2)$, tali che:

(a) $\partial Q = P_1' \cup P_2'$
(b) $P_1' \cap P_2' = \emptyset$

P_1, P_2 si dicono bordanti, scritto $P_1 \sim P_2$, se esiste un bordismo tra di essi. Spesso identificheremo P_i con P_i' tramite ϕ_i e diremo imprecisamente che un bordismo tra P_1 e P_2 è una pseudovarietà Q con $\partial Q = P_1 \coprod P_2$, dove $\coprod$ indica unione disgiunta (**figura**). In particolare, $P \sim \emptyset$ significa che esiste una $(n+1)$-pseudovarietà Q con $P = \partial Q$, cosa che si esprime dicendo che P è un bordo o che P circonda. La notazione $P_1 \overset{Q}{\sim} P_2$ starà ad indicare che Q è un bordismo tra P_1 e P_2. La relazione $\sim$ viene anch'essa detta relazione di bordismo.

PROPOSIZIONE. *La relazione di bordismo è una relazione di equivalenza.*

DIM.

(a) $P \overset{P\times I}{\sim} P$
(b) $P_1 \overset{Q}{\sim} P_2 \Rightarrow P_2 \overset{Q}{\sim} P_1$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(c) $P_1 \overset{Q}{\sim} P_2$; $P_2 \overset{Q'}{\sim} P_3 \Rightarrow$ (per **??**) $P_1 \sim P_3$ tramite $Q \cup_{P_2} Q'$.
□

La classe di equivalenza di P si chiama classe di bordismo di P e si scriverà $[P]$, da non confondersi con la classe fondamentale. L'insieme delle classi di bordismo in $\mathcal{M}_n$ si indicherà con T_n.
Introduciamo in T_n un'operazione di gruppo abeliano $+$, ponendo:

$$[P_1] + [P_2] := [P_1 \sqcup P_2].$$

E' un piacevole esercizio dimostrare che tale operazione è indipendente dalla scelta dei rappresentanti. L'associatività e la commutatività sono banali. l'elemento neutro è dato dalla classe $[\emptyset]$, composta da tutte quelle n-pseudovarietà che sono bordi o, come si suol dire, bordanti a zero. Infatti, se $P = \partial Q$ e $P' \in \mathcal{M}_n$, allora

$$P \sqcup P' \overset{Q'}{\sim} P'$$

con $Q' = Q \sqcup P' \times I$ (**figura**).
Rimane cos´ì stabilito anche che, per ogni $[P] \in T_n$:

$$[P] + [P] = 0.$$

Pertanto T_n non è solo un gruppo, ma addirittura uno $\mathbb{Z}/2$-modulo.

19.2 Il punto La proposizione seguente può lasciare perplessi sul senso di quanto finora introdotto in questo paragrafo. Tuttavia, una volta inquadrata nel giusto contesto, essa svolgerà un ruolo importante, poiché costituisce il motivo geometrico del fatto che l'omologia di un punto è sempre nulla, eccetto in dimensione zero, caso in cui essa vale $\mathbb{Z}/2$.

Proposizione.
(a) $T_n = 0$ *per* $n > 0$
(b) $T_0 \approx \mathbb{Z}/2$.

Dim. Sia $P \in \mathcal{M}_n$, con $n > 0$. Se $C(P)$ è il cono su P, allora $P = \partial C(P)$. Questo prova (a). Se $P \in \mathcal{M}_0$, allora P è uno spazio discreto

$$P = P_0 \sqcup \cdots P_l.$$

Definiamo un omomorfismo $\epsilon \colon \to \mathbb{Z}/2$, ponendo

$$\epsilon[P] = l \text{ modulo2}.$$

ϵ è ben posto. Infatti, un bordismo tra P e P' dovrà essere costituito da dischi unidimensionali disgiunti, ciascuno congiungente una componente di P con una di P'. Pertanto, la parità delle componenti di P e di P' è la medesima. la verifica del fatto che ϵ è un isomorfismo è banale e ne risulta che il generatore di T_0 è la classe di bordismo individuata da un qualsiasi spazio costituito da un singolo punto.

19.3 Bordismo Generalizziamo ora le costruzioni precedenti, considerando, in luogo delle pseudovarietà di per sé, loro applicazioni in uno spazio topologico arbitrario X.

Denotiamo con $\mathcal{M}_n(X)$ la classe costituita da tutte le coppie (P, f), con $P \in \mathcal{M}_n$ ed $f\colon P \to X$ applicazione continua. Un bordismo tra (P_1, f_1) e (P_2, f_2) è un bordismo Q tra P_1 e P_2, insieme con un'applicazione $F\colon Q \to X$, tale che, con le notazioni usate all'inizio:

$$(F|P_i') \circ \phi_i = f_i \qquad i = 1, 2.$$

Anche ora, quando non vi sia possibilità di equivoco, taceremo gli isomorfismi $\phi_i\colon P_i \to P_i'$.
Chiamiamo (P_1, f_1) e (P_2, f_2) bordanti, scritto $(P_1, f_1) \sim (P_2, f_2)$, se esiste un bordismo tra di essi e, se (Q, F) è un tale bordismo, scriveremo anche $(P_1, f_1) \sim (P_2, f_2)$.
Le applicazioni continue in X non presentando alcun problema, si verifica come prima che la relazione di bordismo è una relazione di equivalenza in $\mathcal{M}_n(X)$. Denotiamo la classe di bordismo di (P, f) con $[P, f]$ e l'insieme delle classi di bordismo in $\mathcal{M}_n(X)$ con $T_n(X)$.
Diamo a $T_n(X)$ una struttura di gruppo abeliano, anzi di $Z/2$-modulo, ponendo

$$[P_1, f_1] + [P_2, F_2] := [P_1 \sqcup P_2, f_1 \cup f_2],$$

dove $f_1 \cup f_2$ è la funzione che coincide con f_1 su P_1 e con f_2 su P_2.
L'elemento neutro di $T_n(X)$ è la classe di bordismo costituita dalla totalità delle coppie $(P, f) \in \mathcal{M}_n(X)$, per ciascuna delle quali esiste una $(n+1)$-pseudovarietà Q e un'applicazione continua $F\colon \to X$, tale che $P = \partial Q$ e $f = F|\partial Q$.
Il gruppo $T_n(X)$ si chiama il *gruppo di bordismo n- dimensionale non orientato delle* pseudovarietà in X. Esso costituisce una generalizzazione del gruppo T_n precedentemente introdotto. Infatti:

Proposizione. *Vi è un isomorfismo canonico*

$$T_n(\text{punto})\colon \to T_n,$$

dato da

$$[P, \text{costante}]\colon [P].$$

La dimostrazione è banale. ♣

19.4 Coppie Abbiamo bisogno di un'ulteriore generalizzazione, che si ottiene considerando, in luogo di pseudovarietà chiuse, pseudovarietà con bordo e applicazioni di queste in una coppia di spazi.

Sia (X, A) una coppia di spazi topologici, nella quale A può ben essere vuoto. Denotiamo con $\mathcal{M}_n(X, A)$ la classe formata da tutte le coppie (P, f), con P una n-pseudovarietà con bordo ed $f: P, \partial P \rightarrow X, A$ un'applicazione continua. Un bordismo tra due tali coppie (P_1, f_1) e $P_2, f_2)$ è una coppia (Q, F), insieme con PL isomorfismi $\phi_i: P_i \rightarrow P_i'$, tali che:

(a) P_i' sia una pseudovarietà regolare in ∂Q e $P_1' \cap P_2' = \emptyset$
(b) $(F|P_i') \circ \phi_i = f_i$
(c) $F(\partial Q - \overset{\circ}{P}{}_1' \cup \overset{\circ}{P}{}_2') \subset A$ (**figura**) .

Tutta la terminologia, il simbolismo e le proprietà stabilite nelle situazioni precedenti si trasportano, con le ovvie modifiche, a questo caso più generale.
Abbiamo cos´ì lo $Z/2$-modulo $T_n(X, A)$, costruito in modo completamente analogo a $T_n(X)$. Esso prende il nome di *gruppo di bordismo non orientato, di dimensione n, delle pseudovarietà* di (X, A).
Naturalmente $\mathcal{M}_n(X, \emptyset) \equiv \mathcal{M}_n(X)$ e $T_n(X, \emptyset) \equiv T_n(X)$.
A volte ci si riferisce a $T_n(X, A)$ come al gruppo di bordismo relativo e ai suoi rappresentanti come alle pseudovarietà relative di X, A.

20 Gli assiomi di Eilenberg e Steenrod per il bordismo di pseudovarietà non orientate

20.1 . Data un'applicazione di coppie $\phi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, resta associato ad essa, per ogni $n \geq 0$, un omomorfismo

$$\phi_*: T_n(X, A) \rightarrow T_n(Y, B),$$

definito da

$$\phi_*[P, f] = [P, \phi \circ f].$$

Brevemente, ϕ_*è "composizione con ϕ" la notazione $\phi_{*,n}$ sarebbe piú appropriata.
Dalla definizione discende subito che:

Assioma 1. *Se $Id: (X, A) \rightarrow (X, A)$ è la funzione identica, allora Id_* è l'identità di $T_n(X, A)$.*

Assioma 2. *Data $\psi: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$, risulta*

$$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*.$$

I primi due assiomi si riassumono dicendo che $T_*(X, A), \phi_*$ è un funtore covariante definito sulla categoria delle coppie di spazi topologici e a valori nella categoria degli $Z/2$- moduli

graduati e morfismi di grado zero. Qui $T_*(X,A)$ sta ad indicare la successione (o la somma diretta) dei gruppi $T_n(X,A)$.
Per ogni n esiste un omomorfismo

$$\partial_*: T_n(X,A) \to T_{n-1}(A,\emptyset),$$

detto <u>morfismo di connessione</u> o <u>morfismo di bordo</u> e definito dalla formula:

$$\partial_*[P,f] = [\partial P, f|\partial P].$$

Anche qui $\partial_*(X,A)_n$ sarebbe una notazione piú appropriata.
L'applicazione ∂_* è ben posta. Infatti, se $(P,f) \overset{(Q,F)}{\sim} (P',F')$, allora $(\partial P, f|\partial P) \sim (\partial P', f'|\partial P')$ mediante $(M, F|M)$, dove $M = (\partial Q - \overset{\circ}{P} \cup \overset{\circ}{P'})$.
Inoltre ∂_* è un omomorfismo, perché

$$\partial[P \sqcup P'] = [\partial P \sqcup \partial P'].$$

Infine ∂_* è effettivamente a valori in $T_{n-1}(A,\emptyset)$, dal momento che ∂P è certamente una $(n-1)$-pseudovarietà priva di bordo.

Assioma 3. *Data $\phi:(X,A) \to (Y,B)$, il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} T_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_*} & T_{n-1}(A,\emptyset) \\ \downarrow \phi_* & & \downarrow \phi'_* \\ T_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial_*} & T_{n-1}(B,\emptyset) \end{array}$$

è commutativo, dove $\phi' = \phi|(A,\emptyset)$.
Infatti, se $[P,f] \in T_n(X,A)$, allora:

$$\partial_* \circ \phi_*[P,f] = \partial_*[P, \phi \circ f] = [\partial P, (\phi \circ f)|_{\partial P}]$$

e

$$\phi'_*\partial_*[P,f] = \phi'_*[\partial P, f|_{\partial P}] = [\partial P, (\phi' \circ f)|_{\partial P}] = [\partial P, (\phi \circ f)|_{\partial P}].$$

L'assioma 3 si può riformulare in termini funtoriali: sia R il funtore *restrizione*, dato da $R(X,A) = (A,\emptyset)$ e $R(\phi) = \phi|(A,\emptyset)$. Allora $\partial_{*,n}$ è una trasformazione naturale tra i funtori $T_n(-,-)$ e $(T_{n-1} \circ R)$.
Da ora in poi scriveremo X in luogo di $(X,\emptyset)$.

Assioma 4 o Assioma dell'esattezza. *Per ogni coppia (X,A), la successione dei gruppi di bordismo*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} T_n(A) \xrightarrow{i_*} T_n(X) \xrightarrow{j_*} T_n(X,A) \xrightarrow{\partial_*} T_{n-1}(A) \to$$

è esatta, dove $i: (A, \emptyset) \subset (X, \emptyset)$ *e* $j: (X, \emptyset) \subset (X, A)$ *sono le inclusioni.*

Dimostrazione.

(a) $i_* \circ \partial_* = 0$. Infatti, se $[P, f] \in T_n(X, A)$, ne segue $(\partial P, f|_{\partial P}) \sim 0$, mediante (P, f) stesso.

(b) $\ker i_* \subset Im\partial_*$. Da $[P, f] \in \ker i_*$ segue l'esistenza di una pseudovarietà relativa $F: Q \to X$, tale che

$$(P, f) = (\partial Q, F|_{\partial Q}).$$

Inoltre $[Q, F] \in T_n(X, A)$, pertanto $\partial(Q, F) = (P, f)$ e dunque $[P, f] \in Im\partial_*$

(c) $\partial_* \circ j_* = 0$. Da $[P, f] \in T_n(X)$ segue $\partial P = \emptyset$, perché $A = \emptyset$.

(d) $\ker \partial_* \subset Im j_*$. Sia $[P, f] \in \ker \partial_*$. Allora $(\partial P, f|_{\partial P})$ deve essere bordo di un (Q, F), pertanto $\partial P = \partial Q$, $F: Q \to A$ e $F|\partial Q = f|\partial P$. Ne segue che $[P \cup_{\partial P} Q, F \cup f] \in T_n(X)$. Affermiamo che $J_*[P \cup_{\partial P} Q, F \cup f] = [P, f]$. Infatti $(P \cup_{\partial P} Q, F \cup f) \sim (P, f)$, per mezzo del bordismo

$$((P \cup_{\partial P} Q) \times I, (f \cup F) \circ \pi_1)$$

dove π_1 è la proiezione sul primo fattore.

(e) $j_* \circ i_* = 0$. Sia $[P, f] \in T_n(A)$. In (X, A) si ha

$$(P, f) = \partial(P \times I, f \circ \pi_1).$$

(f) $\ker j_* \subset Im i_*$. Se $[P, f] \in \ker j_*$, esiste una $(n + 1)$-pseudovarietà Q e una $F: Q \to X$, tali che

$$\partial Q = P \cup P_0 \qquad F|P = f \qquad F(P_0) \subset A.$$

Si ha,quindi $[P_0, F|P_0] \in T_n(A)$ e $i_*[P_0, F|P_0] = [P, f]$.

La dimostrazione è conclusa. ♣

Assioma 5 o Assioma dell'omotopia. *Se* $\phi_0, \phi_1: (X, A) \to (Y, B)$ *sono funzioni omotope tra coppie, allora*

$$\phi_{0*} = \phi_{1*}.$$

Dimostrazione. Sia $\Phi: (X, A) \times I \to (Y, B)$ l'omotopia tro ϕ_0 e ϕ_1. Se $[P, f] \in T_n(X, A)$, sia $F: P \times I \to X \times I$ data dalla formula $F(x, t) = (f(x), t)$. Allora $(P \times I, \Phi \circ F)$ è un bordismo tra $(P, \phi_0 \circ f)$ e $(P, \phi_1 \circ f)$. Poiché $[P, \phi_i \circ f] = \phi_{i*}[P, F]$, il risultato è provato. ♣

Assioma 6 o Assioma dell'escissione . *Dati una coppia* (X, A) *e un aperto* U *di* X, *con* $\overline{U} \subset \operatorname{Int} A$, *l'inclusione* $i: (X - U, A - U) \subset (X, A)$ *induce l'isomorfismo* $i_*: T_n(X - U, A - U) \to T_n(X, A)$, *per ogni* $n \geq 0$.

Dimostrazione.

(a) i_* è un epimorfismo. Sia $[P, f] \in T_n(X, A)$ e applichiamo la **proposizione ??**, con P in luogo di M, $f^{-1}(X - \operatorname{Int} A)$ in luogo di S_0, $f^{-1}(\overline{U})$ in luogo di S_1. Ne ricaviamo l'esistenza di una pseudovarietà $P_0 \subset P$, che verifica le condizioni elencate nella citata proposizione. In particolare

$$[P_0, f|_{P_0}] \in T_n(X-U, A-U)$$

e

$$i_*[P_0, f|_{P_0}] = [P, f]$$

tramite il solito bordismo prodotto $f \circ \pi_1 \colon P \times I \to X$.

(b) i_* è un monomorfismo. Sia (P, f) una n-pseudovarietà di $(X-U, A-U)$, che diventi bordante a zero in (X, A) e sia (Q, F) un bordismo a zero, cioè $(P, f) = \partial(Q, F)$. Applicando la **proposizione ??** come in (a), si ottiene una pseudovarietà $\overline{Q}$, tale che $F(\overline{Q}) \subset X - U$. Allora $(\overline{Q}, F|_{\overline{Q}})$ fornisce un bordismo a zero di (P, f) in $(X-U, A-U)$. ♣

Assioma 7 o Assioma della dimensione. *Se S è uno spazio costituito da un solo punto, allora $T_n(S) = 0$ per $n > 0$, mentre $T_0(S) \approx \mathbb{Z}/2$.*

Dimostrazione. Poiché, per **??**, $T_n(S)$ è canonicamente isomorfo a T_n, l'assioma 7 non è altro che la **proposizione ??**. ♣

17.2 Osservazione. Il lettore attento avrà notato che gli assiomi di Eilenberg e Steenrod per $\{T_*(X, A), \partial_*\}$ si sono rivelati conseguenza formale delle seguenti proprietà geometriche, che chiameremo assiomi geometrici, valide per la classe delle pseudovarietà non orientate.

(C) (Cilindro). *Se P è una pseudovarietà , $P \times I$ è una pseudovarietà con*

$$\partial(P \times I) = P \times 0 \cup P \times 1$$

(I) (Incollamento) *Se V è una pseudovarietà regolare in ∂P e in $\partial P'$ e $V = P \cap P'$, allora $P \cup P'$ è una pseudovarietà , con*

$$\partial(P \cup P') = \partial P \cup \partial P' - \operatorname{Int} V.$$

(E) (Escissione). *Se S_0, S_1 sono sottoinsiemi chiusi disgiunti della n-pseudovarietà P, esiste una n-pseudovarietà $P_0 \subset P$, tale che $\overline{P - P_0}$ sia anch'essa una n-pseudovarietà e, inoltre:*

(a) $S_0 \subset P_0$
(b) $S_1 \cap P_0$.

(B) (Bordo). *Se P è una pseudovarietà di dimensione > 0, esiste una pseudovarietà Q, tale che*

$$P = \partial Q.$$

Quest'ultimo assioma è intervenuto unicamente per stabilire il settimo assioma di Eilenberg e Steenrod, cioè quello della dimensione.

§ 18. EQUIVALENZA TRA L'OMOLOGIA MODULO DUE E IL BORDISMO DI PSEUDOVARIETA NON ORIENTATE

18.1. Cominciamo col ricordare che, se $\{H, \partial\}$, $\{H', \partial'\}$ sono due teorie omologiche, un omomorfismo tra di esse è una trasformazione naturale θ da H ad H', che commuta con ∂, ∂', cioè tale che, per ogni (X, A), il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H(X,A) & \overset{\theta(X,A)}{\rightarrow} & H'(X,A) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial' \\ H(A) & \overset{\theta(A)}{\rightarrow} & H'(A) \end{array}$$

è commutativo.
Inoltre, un omomorfismo θ, che sia un isomorfismo per gli spazi costituiti da un sol punto, è un isomorfismo per ogni coppia di poliedri compatti, addirittura per ogni coppia di CW complessi finiti.

18.2 . Ciò premesso, se $f\colon P, \partial P \to X, A$ è una pseudovarietà relativa, indicheremo imprecisamente con z_P il ciclo fondamentale, a coefficienti in $\mathbb{Z}/2$, preso rispetto a qualche triangolazione K, K_0 di $P, \partial P$. Dunque z_P non è altro che la somma dei simplessi di K e la sua classe di omologia $[z_P]$ è, per definizione, la classe fondamentale di P in $H_n(K, K_0) = H_n(P, \partial P; \mathbb{Z}/2)$.
Notiamo che $\partial z_P = z_{\partial P} \in C_{n-1}(K_0)$ e questo implica che, se $i\colon \partial P \subset P$ è l'inclusione e

$$\partial_*\colon H_n(P, \partial P) \to H_{n-1}(\partial P)$$

è l'omomorfismo di connessione:
(a) $i_*[z_{\partial P}] = 0$
(b) $\partial_*[z_P] = [z_{\partial P}]$.
Ora, sia P una n-pseudovarietà chiusa, K una triangolazione di P, X un poliedro con una triangolazione L, $f\colon K \to L$ un'applicazione simpliciale e supponiamo che f sia iniettiva. Allora, se con $z_{f(P)} \in C_n(X)$ denotiamo il ciclo n-dimensionale costituito dalla somma degli n-simplessi di $f(K) \subset L$, è ragionevole chiamare $[z_{f(P)}] \in H_n(X)$ la classe di omologia di X "rappresentata" da (P, f). Si noti che

$$[z_{f(P)}] = f_*[z_P].$$

Se $f\colon \to X$ non è iniettiva e X non è necessariamente un poliedro, non vi è, in generale, alcun modo plausibile di interpretare $f(P)$ come ciclo di X. Tuttavia $f_*[z_P]$ continua ad

avere senso, pertanto è lecito dire che (P,f) "rappresenta" la classe di omologia $f_*[z_P]$ in $H_n(X)$. Questo giustifica la seguente definizione generale.
Se $\alpha \in H_n(X,A)$, diciamo che α è rappresentata da $f\colon P, \partial P \to X, A$, se

$$\alpha = f_*[z_P].$$

Notiamo che, secondo questa definizione, se (X,A) è essa stessa una n-pseudovarietà relativa $P, \partial P$, allora la classe fondamentale $[z_P] \in H_n(P, \partial P; \mathbb{Z}/2)$ è rappresentata dalla funzione identità!

Proposizione. *L'applicazione, che ad ogni* $(P,f) \in \mathcal{M}_n(X,A)$ *associa* $f_*[z_P] \in H_n(X,A)$, *induce un omomorfismo*

$$\theta = \theta(X,A)\colon T_n(X,A) \to H_n(X,A).$$

Dimostrazione. Facciamo vedere che θ è ben posto, cioè compatibile con la relazione di bordismo.
Se $(P_1,f_1) \overset{(Q,F)}{\sim} (P_2,f_2)$, si triangoli Q, con P_1, P_2 sottocomplessi, cosicché anche $Q' = \partial Q - \mathring{P}_1 \cup \mathring{P}_2$ è un sottocomplesso. Allora:

$$z_{P_1} + z_{P_2} + z_{Q'} = z_{\partial Q} = \partial z_Q \ . \qquad (1)$$

Se $l_i\colon (P_i, \partial P_i) \subset (Q, Q')$ sono le inclusioni, la (1) ci dice che

$$l_{1*}[z_{P_1}] = l_{2*}[z_{P_2}].$$

Ora: $f_1 = F \circ l_1$ e $f_2 = F \circ l_2$ ed $F\colon (Q,Q') \to (X,A)$. Ne ricaviamo

$$f_{1*}[z_{P_1}] = (F \circ l_1)_*[z_{P_1}] = (F \circ l_2)_*[z_{P_2}] = f_{2*}[z_{P_2}]$$

in $H_n(X,A)$. Questo dimostra che l'applicazione

$$\theta\colon T_n(X,A) \to H_n(X,A),$$

data da

$$\theta[P,f] = f_*[z_P]$$

è ben posta.
Inoltre, se $(P_i,f_i) \in \mathcal{M}_n(X,A)$ $(i = 1,2)$ ed $l_i\colon P_i \subset P_1 \sqcup P_2$ sono le inclusioni, si ha, chiaramente:

$$[z_{P_1 \sqcup P_2}] = l_{1*}[z_{P_1}] + l_{2*}[z_{P_2}]$$

e questo prova che θ è un omomorfismo. ♣

18.3. Stabiliamo ora l'equivalenza cercata.

Proposizione. *$\theta: T_n(X,A) \to H_n(X,A)$ è un isomorfismo di teorie omologiche sulla categoria delle coppie di CW complessi finiti.*

Dimostrazione. θ è una trasformazione naturale di teorie omologiche. Infatti, si verifica facilmente che, per ogni applicazione continua $f:(X,A) \to (Y,B)$, i seguenti diagrammi sono commutativi:

$$\begin{array}{ccc} T_n(X,A) & \stackrel{\theta(X,A)}{\to} & H_n(X,A) \\ \downarrow f_* & & \downarrow F_* \\ T_n(Y,B) & \stackrel{\theta(Y,B)}{\to} & H_n(Y,B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T_n(X,A) & \stackrel{\theta(X,A)}{\to} & H_n(X,A) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ T_{n-1}(A) & \stackrel{\theta(A)}{\to} & H_{n-1}(A) \end{array}$$

Inoltre, θ(punto) è un isomorfismo per le **proposizioni ?? e ??**. Pertanto, θ è un isomorfismo per ogni coppia di CW complessi finiti. ♣

Un'analisi ancora piú accurata stabilirebbe che θ è un isomorfismo sull'intera categoria delle coppie di spazi topologici, ma noi non ci addentreremo in questo.

Corollario. *Se X è un CW complesso finito, ogni classe di omologia modulo due di X è rappresentata da (un'applicazione di) una pseudovarietà chiusa in X.*

Dimostrazione. $\theta(X)$ è un epimorfismo. ♣

Il corollario si estende naturalmente alle coppie (X,A). Inoltre, il fatto che $\theta(X)$ sia anche un monomorfismo ci dice che *se due pseudovarietà rappresentano la medesima classe di omologia in X, allora esse sono bordanti in X.*

§ 19. IL BORDISMO DI PSEUDOVARIETA ORIENTATE

19.1. Da ora in poi, fino ad avviso contrario, il termine "n-pseudovarietà orientata", o semplicemente "n-pseudovarietà", sarà sinonimo di "n-pseudovarietà normale orientata".
Un tale oggetto è una coppia $(P,[z_P])$, dove P è una n-pseudovarietà normale e $[z_P] \in H_n(P,\partial P;\mathbb{Z})$ è una sua classe fondamentale, che di solito verrà omessa dalle notazioni.
Un *isomorfismo* di pseudovarietà (orientate) è un PL isomorfismo $f: P \to P'$, tale che $f_*[z_P] = [z_{P'}]$. Tutta l'omologia sarà a coefficienti in $\mathbb{Z}$.
Nel trattare il bordismo orientato di pseudovarietà ci discosteremo raramente dalla linea seguita nel caso non orientato, limitandoci a segnalare i cambiamenti dovuti alla presenza delle orientazioni.
Se P è una pseudovarietà , indicheremo con $-P$ la coppia $(P,-[z_P])$.

Le pseudovarietà orientate soddisfano assiomi geometrici analoghi a quelli stabiliti in **??** per il caso non orientato. Li elenchiamo.

$(C)_+$ *Se P è una pseudovarietà (orientata) chiusa, esiste un'orientazione su $P \times I$, tale che*

$$\partial(P \times I) = P \times 1 \cup -(P \times 0)$$

$(I)_+$ *Se V è una pseudovarietà regolare in ∂P e in $\partial P'$, con $[P : V] = -[P' : V]$ e $V = P \cap P'$, allora $P \cup P'$ è una pseudovarietà orientata, con*

$$\partial(P \cup P') = \partial P \cup \partial P' - \overset{\circ}{V} \ .$$

$(E)_+$ *Se S_0, S_1 sono sottoinsiemi chiusi disgiunti della n-pseudovarietà orientata P, esiste una n- pseudovarietà $P_0 \subset P$ (con orientazione indotta da P), tale che $\overline{P - P_0}$ sia anch'essa una n-pseudovarietà orientata (con orientazione indotta da P) e, inoltre:*

(a) $S_0 \subset P_0$

(b) $S_1 \cap P_0 = \emptyset$.

$(B)_+$ *Se P è una qualsiasi pseudovarietà di dimensione > 0, esiste una pseudovarietà orientata Q, tale che*

$$P = \partial Q.$$

Dimostriamo solo quest'ultimo assioma. Il cono $C(P)$ non è una pseudovarietà normale, ameno che P non sia connessa. Allora, sia $\tilde{C}(P)$ l'unione disgiunta dei coni sulle componenti connesse di P; $\tilde{C}(P)$ è una $(n+1)$-pseudovarietà normale ed inoltre ammette un'unica orientazione tale che

$$P = \partial \tilde{C}(P).$$

♣

19.2. Adesso, sia $\mathcal{M}_n^+$ la classe delle n-pseudovarietà (normali) orientate chiuse e consideriamo l'insieme vuoto come un elemento di $\mathcal{M}_n^+$ per ogni n.
Se $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n^+$, un *bordismo* tra P_1 e P_2 è una $(n+1)$-pseudovarietà orientata Q, insieme con PL isomorfismi $\phi_1 \colon P_1 \to P_1'$ e $\phi_2 \colon (-P_2) \to P_2'$, tali che $\partial Q = P_1' \cup P_2'$ e $P_1' \cap P_2' = \emptyset$. Gli isomorfismi ϕ_i verranno, in genere, taciuti, per cui diremo imprecisamente che un bordismo tra P_1 e P_2 è una pseudovarietà Q, tale che:

$$\partial Q = P_1 \sqcup (-P_2) \ .$$

La relazione di bordismo è una relazione di equivalenza $\sim$. Infatti $(C)_+$ assicura la riflessività, $(I)_+$ la transitività e, per la simmetria, si noti che:

$$P_1 \overset{Q}{\sim} P_2 \Rightarrow P_2 \overset{-Q}{\sim} P_1 \ .$$

La classe di bordismo di P si scrive $[P]$ e l'insieme quoziente $\mathcal{M}_n^+/\sim$ si denota T_n^+. Esso ha una struttura di gruppo abeliano rispetto all'unione disgiunta dei rappresentanti, cioè:

$$[P_1] + [P_2] := [P_1 \sqcup P_2] \ .$$

L'elemento neutro è la classe dell'insieme vuoto, mentre l'opposto di $[P]$ è $[-P]$.
A differenza di T_n, il gruppo T_n^+ non è uno $\mathbb{Z}/2$-modulo. Infatti:

Proposizione. (a) $T_n^+ = (0)$ *per* $n > 0$, *mentre* (b) $T_0^+ \approx \mathbb{Z}/2$.

Dimostrazione. La (a) segue dall'assioma $(B)_+$. sia, poi, $P \in \mathcal{M}_0^+$, cosicché P è un insieme finito di punti, ciascuno con un'orientazione $\pm$. Definiamo un morfismo

$$\epsilon: T_0^+ \to \mathbb{Z} \ ,$$

ponendo $\epsilon[P] :=$ somma algebrica delle orientazioni dei punti che compongono P.
Si verifica subito che ϵ è ben posto ed è un isomorfismo di gruppi. Ne risulta che un generatore di T_0^+ è rappresentato dallo spazio costituito da un singolo punto, munito di una qualsiasi delle due orientazioni $\pm$. ♣

Se X è uno spazio topologico, denotiamo con $\mathcal{M}_n^+(X)$ la classe costituita da tutte le coppie (P, f), con $P \in \mathcal{M}_n^+$ ed $f: \to X$ applicazione continua.
Un *bordismo* tra (P_1, f_1) e (P_2, f_2) è un bordismo Q tra P_1 e P_2, insieme con un'applicazione continua $F: Q \to X$, tale che

$$(F|P_i') \circ \phi_i = f_i \qquad i = 1, 2 \ .$$

La relazione di bordismo è una relazione di equivalenza in $\mathcal{M}_n^+(X)$, la classe di bordismo di (P, f) si scriverà $[P, f]$ e l'insieme delle classi di bordismo si denoterà $T_n^+(X)$. Quest'ultimo ha una struttura di gruppo abeliano (ma non di $\mathbb{Z}/2$-modulo in generale), mediante l'operazione:

$$[P_1, f_1] + [P_2, f_2] := [P_1 \sqcup P_2, f_1 \cup f_2] \ .$$

L'elemento neutro è la classe dell'insieme vuoto, costituita dalla totalità delle coppie $(P, f) \in \mathcal{M}_n^+(X)$, per ciascuna delle quali esiste una $(n+1)$-pseudovarietà orientata Q e una $F: Q \to X$, tale che $P = \partial Q$ e $f = F|\partial Q$. Il gruppo $T_n^+(X)$ si chiama *gruppo di bordismo n-dimensionale orientato delle pseudovarietà in* X. E' chiaro che $-[P, f] = [-P, f]$ e, visibilmente:

$$T_n^+(\text{punto}) \approx T_n^+ \ .$$

Sia ora (X, A) una coppia di spazi topologici e denotiamo con $\mathcal{M}_n^+(X, A)$ la classe formata da tutte le coppie (P, f), con P n-pseudovarietà con bordo ed $f: P, \partial P \to X, A$ applicazione continua. Un *bordismo* tra due tali coppie (P_1, f_1) e (P_2, f_2) è una coppia (Q, F), con Q una $(n+1)$-pseudovarietà , insieme con PL isomorfismi $\phi_1: P_1 \to P_1'$ e $\phi_2: -P_2 \to P_2'$, tali che:

(a) P'_i sia una pseudovarietà regolare in ∂Q e $P'_1 \cap P'_2 = \emptyset$

(b) $(F|P'_i) \circ \phi_i = f_i$

(c) $F(\partial Q - \mathring{P}'_1 \cup \mathring{P}'_2) \subset A$.

$T_n^+(X,A) := \mathcal{M}_n^+(X,A)/\sim$ è un gruppo abeliano rispetto all'unione disgiunta dei rappresentanti, che prende il nome di *gruppo di bordismo orientato n-dimensionale delle pseudovarietà in X, A* o *gruppo di bordismo relativo di X, A*.

19.3. Data un'applicazione di coppie $\phi: (X,A) \to (Y,B)$, resta ad essa associato, per ogni $n \geq 0$, un omomorfismo di gruppi abeliani $\phi_*: T_n^+(X,A) \to T_n^+(Y,B)$, definito da $\phi_*[P,f] = [P, \phi \circ f]$.
$T_*^+(X,A)$ è, pertanto, un funtore covariante dalla categoria delle coppie di spazi topologici alla categoria dei gruppi abeliani graduati e morfismi di grado zero. Inoltre, come nel caso non orientato, esiste un *omomorfismo di connessione* (o *di bordo*)

$$\partial_*: T_n^+(X,A) \to T_{n-1}^+(A) \ ,$$

dato da

$$\partial_*[P,f] := [\partial P, f|_{\partial P}]$$

e ∂_* è una trasformazione naturale di funtori.

Teorema. *$\{T_*^+(X,A), \partial_*\}$ è una teoria omologica ordinaria, cioè verifica tutti gli assiomi di Eilenberg e Steenrod.*

Dimostrazione. E' del tutto analoga al caso non orientato, con qualche ovvia modifica che tenga conto delle orientazioni. $(C)_+$ assicura l'assioma di omotopia; $(C)_+$ e $(I)_+$ assicurano l'assioma di esattezza; $(E)_+$ quello di escissione, $(B)_+$ quello della dimensione. I semplici dettagli sono lasciati al lettore. ♣

Se $\alpha \in H_n(X,A;\mathbb{Z})$, diciamo che α è *rappresentata* da $f: P, \partial P \to X, A$, se $\alpha = f_*[z_P]$.

Proposizione. *L'applicazione, che ad ogni $(P,f) \in \mathcal{M}_n^+(X)$ associa $f_*[z_P] \in H_n(X,A);\mathbb{Z})$, induce un omomorfismo*

$$\theta^+: T_n^+(X,A) \to H_n(X,A;\mathbb{Z})$$

che risulta un'equivalenza di teorie omologiche sulla categoria delle coppie di CW complessi finiti ♣

La dimostrazione è, con le ovvie modifiche, quella prodotta nel caso modulo due.

Corollario. *Se X è un CW complesso, ogni sua classe di omologia intera è rappresentata da un'applicazione di una pseudovarietà orientata chiusa in X.* ♣

Inoltre, se due pseudovarietà orientate rappresentano la medesima classe di omologia, esse sono bordanti mediante una pseudovarietà orientata.

19.4. I risultati stabiliti negli ultimi due paragrafi si possono compendiare in un diagramma commutativo di teorie omologiche:

$$\begin{array}{ccc} T_n^+(X,A) & \stackrel{\mu^T}{\to} & T_n(X,A) \\ \downarrow \theta^+ & & \downarrow \theta \\ H_n(X,A;\mathbb{Z}) & \stackrel{\mu^H}{\to} & H_n(X,A;\mathbb{Z}/2) \end{array}$$

dove μ^H è la riduzione modulo due $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$ e μ^T è la trasformazione naturale che dimentica le orientazioni.

19.5. (a) Sia $m > 1$. Una $\mathbb{Z}/m$-pseudovarietà n-dimensionale P si dice *orientabile*, se è possibile attribuire un'orientazione ad ogni n-simplesso di una (qualsiasi) sua triangolazione, in modo tale che la somma degli n-simplessi cos\`ı orientati sia un n-ciclo simpliciale con coefficienti in $\mathbb{Z}/m$.
Ciò premesso, si consideri la classe delle $\mathbb{Z}/m$-pseudovarietà orientate e si definisca una teoria di bordismo $T_*^+(X,A;\mathbb{Z}/m)$ di tali pseudovarietà . Si dimostri che

$$T_*^+(X,A;\mathbb{Z}/m) \approx H_*(X,A;\mathbb{Z}/m)$$

sulla categoria dei CW complessi.
In particolare, *ogni classe di omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}/m$ è rappresentata da una $\mathbb{Z}/m$-pseudovarietà .*

(b) Si dimentichino le orientazioni e si costruisca la teoria di bordismo $T_*(X,A;\mathbb{Z}/m)$ delle $\mathbb{Z}/m$-pseudovarietà non orientate. Si dimostri:

(1) se m è dispari, $T_n(X,A;\mathbb{Z}/m) = (0)$ per *ogni* n e *ogni* X, A. In altri termini, $T_*(X,A;\mathbb{Z}/2k+1)$ è la teoria nulla.

(2) se m è pari, $T_*(X,A;\mathbb{Z}/m) \approx T_*(X,A) \approx H_*(X,A;\mathbb{Z}/2)$.

Dunque il bordismo di $\mathbb{Z}/m$-pseudovarietà non orientate non è interessante.

§ 20. TEOREMA DI HUREWICZ

In questo paragrafo applicheremo la descrizione geometrica dell'omologia in termini di pseudovarietà per dare una dimostrazione del teorema di Hurewicz.

20.1. Cominciamo col richiamare alcuni risultati di teoria dell'omotopia stabiliti in altra parte del testo.
Sia X uno spazio topologico con un punto base $*$. Per $n \geq 1$ il *gruppo di omotopia n-dimensionale* $\pi_n(X,*)$ è definito come:

$$\pi_n(X,*) := [S^n,*;X,*] = [I^n,\dot{I}^n;X,*] \ ,$$

dove il punto base di S^n è $(1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. L'operazione di gruppo in $\pi_n(X,*)$ si costruisce nel modo seguente. Se $[f]$, $[g]$ in $\pi_n(X,*)$, con $f,g\colon I^n, \dot{I}^n \to X,*$, allora $[f][g] \in \pi_n(X,*)$ è la classe di omotopia definita dall'applicazione $\gamma\colon I^n \to X$, tale che:

$$\gamma(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \ldots x_n), & \text{se } 0 \le x_1 \le 1/2 \\ g(2x_1 - 1, x_2, \ldots, x_n) & \text{se } 1/2 \le x_1 \le 1 \end{cases}$$

(**figura**).
$\pi_n(X,*)$ risulta abeliano se $n > 1$ ed in tal caso $[f][g]$ si scrive piú comunemente $[f] + [g]$. Uno spazio X si dice *n- connesso* se $\pi_i(X,*) = 0$ per $i \le n$, o, equivalentemente, se ogni applicazione $(P,Q)\colon \to (X,*)$, dove P, Q sono poliedri e $\dim(P - Q) \le n$, è omotopa all'applicazione costante per mezzo di un'omotopia di coppie.
Un'inclusione $A \subset B$ di spazi topologici si dice avere la *proprietà di estensione delle omotopie*, o essere *una cofibrazione* se, per ogni applicazione continua $f\colon B \to C$ e per ogni omotopia $G\colon A \times I \to C$ di $f|A$, esiste un'omotopia $F\colon B \times I \to C$ di f, che estenda G. Un'inclusione di poliedri è sempre una cofibrazione.
Se A è un n-simplesso orientato in uno spazio euclideo, un'applicazione $f\colon A, \dot{A} \to X,*$ individua un elemento $\alpha \in \pi_n(X,*)$, il cui opposto è rappresentato dalla medesima applicazione e dall'orientazione opposta di A. L'elemento α si può ottenere, ad esempio, prendendo un qualsiasi PL isomorfismo

$$\lambda_A\colon I^n \to A$$

che conservi l'orientazione e ponendo

$$\alpha = [f \circ \lambda_A] \ .$$

20.2. Rivediamo alcune *proprietà di addizione dell'omotopia*, nella forma in cui esse verranno poi applicate.
Se A è un $(n+1)$-simplesso orientato, un'applicazione continua $f\colon (\dot{A},*) \to (X,*)$ individua un elemento di $\pi_n(X,*)$ ($*$ indica un vertice di A).
Inoltre, sia A_v la faccia di A opposta al vertice v, con l'orientazione indotta da A e supponiamo $f(\dot{A}_v) = *$ per ogni v. Allora

$$[f] = \sum_v [f_{A_v}] \ . \qquad (1)$$

dove $[f_{A_v}]$ denota l'elemento di $\pi_n(X,*)$ individuato dalla restrizione $f|A_v$ e dall'orientazione di A_v. in particolare, se $f\colon \dot{A} \to X$ si estende a tutto A, allora

$$\sum_v [f_{A_v}] = 0 \qquad (2)$$

in $\pi_n(X,*)$.
Piú generalmente, sia K un complesso simpliciale con $|K| = I^n$ e prendiamo su ogni n-simplesso di K l'orientazione indotta da I^n. Sia $f: I^n, \dot{I}^n \to X, *$, tale che $f(\dot{A}) = *$ per ogni n-simplesso di K. Allora

$$[f] = \sum_A [f_A] \tag{3}$$

dove A varia tra gli n-simplessi e $[f_A]$ è l'elemento di $\pi_n(X,*)$ individuato da $f|A$ e dall'orientazione di A.
Parallelamente, sussiste la seguente *proprietà di addizione per l'omologia.*
Sia $f: P, \partial P \to X, *$ un rappresentante di un elemento di $T_n^+(X,*)$ e supponiamo:

(a) $P = \bigcup_{i=1}^m P_i$, dove P_i è una n-pseudovarietà e $\mathring{P}_i \cap \mathring{P}_j = \emptyset$ per ogni i, j;
(b) $f(\partial P_i) = *$, per ogni i.

Allora:

$$[P, f] = \sum_{i=1}^m [P_i, f|_{P_i}] \tag{4}$$

in $T_n^+(X,*)$, avendo assunto su P_i l'orientazione indotta da P.

Dimostrazione della formula (4).

Basta far vedere che entrambi i membri dell'uguaglianza vanno nello stesso elemento attraverso l'isomorfismo

$$\theta: T_n^+(X,*) \to H_n(X,*;\mathbb{Z}) \ .$$

Ricordiamo che

$$\theta[P,f] = f_*[z_P] \ .$$

Sia $Q = \bigcup_{i=1}^m \partial P_i$ e consideriamo il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} (P,\partial P) & \overset{j}{\hookrightarrow} & (P,Q) \\ & f \searrow & \downarrow \phi \\ & & (X,*) \end{array}$$

dove $\phi|P = f|P$.
Triangoliamo P in modo che ciascun P_i sia un sottocomplesso. Ne ricaviamo l'esistenza di un ciclo fondamentale z_P, tale che

$$z_P = \sum_1^m z_{P_i} \ .$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\theta[P,f] &= f_*[z_P] = \phi_* \circ j_*[z_P] = \\
&= \phi_*[j_\# z_P] = \phi_* \sum_i [j_\# z_{P_i}] = \\
&= \sum_i [\phi_\# \circ j_\#(z_{P_i})] = \sum_i [f_\#(z_{P_i})] = \\
&= \sum_i [(f|P_i)_\#(z_{P_i})] = \sum_i (f|P_i)_*[z_{P_i}] = \\
&= \sum_i \theta[P_i, f|P_i] = \theta \sum_i [P_i, f|P_i]
\end{aligned}$$

♣

20.3. Cominciamo, adesso, a definire *l'applicazione di Hurewicz*:

$$h\colon \pi_n(X,*) \to H_n(X,*;\mathbb{Z}) \qquad n \geq 1$$

Identifichiamo $H_n(X,*;\mathbb{Z})$ con $T_n^+(X,*)$ e definiamo $h\colon \pi_n(X,*) \to T_n^+(X,*)$, mediante l'identità sui rappresentanti, cioè:

$$h[f] := [I^n, f]$$

dove le parentesi quadre al primo membro indicano classe di omotopia, al secondo membro classe di omologia o, piú precisamente, classe di bordismo di pseudovarietà ; h è ben posta perché un'omotopia è un particolare bordismo.

Proposizione. *h è un omomorfismo di gruppi per $n \geq 1$, di gruppi abeliani per $n \geq 2$.*

Dimostrazione. $h([f][g]) = [I^n, \gamma]$, dove γ è làpplicazione introdotta all'inizio del paragrafo. Applicando la formula di addizione omologica (4), con $P = I^n$, $f = \gamma$, $P_1 = I_1 \equiv \{0 \leq x_1 \leq 1/2\}$, $P_2 = I_2 \equiv \{\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1\}$, si ottiene:

$$[I^n, \gamma] = [I_1, \gamma|I_1] + [I_2, \gamma|I_2]$$

in $T_n^+(X,*)$. Ma, banalmente:

$$\begin{aligned} [I_1, \gamma|I_1] &= [I^n, f] \\ [I_2, \gamma|I_2] &= [I^n, g] \end{aligned} \; .$$

La proposizione è cos´ì dimostrata. ♣

Teorema di isomorfismo di Hurewicz. *sia X $(n-1)$-connesso.*

(a) *Se $n > 1$, h è un isomorfismo.*

(b) *Se $n = 1$, h è un epimorfismo con nucleo il sottogruppo generato dai commutatori di $\pi_1(X,*)$.*

Dimostrazione. Cominciamo col provare (a). Sia $[P, f] \in T_n^+(X,*)$ e K una triangolazione di P, K_{n-1} lo scheletro $(n-1)$-dimensionale. Poiché X è $(n-1)$-connesso, esiste un'omotopia di coppie tra la restrizione di $f: (|K_{n-1}|, \partial P) \to (X,*)$ e l'applicazione costante nel punto base $*$. Ricordando che $|K_{n-1}| \subset P$ è una cofibrazione, si ha che tale omotopia si estende ad un'omotopia della intera funzione f definita su P. Sia f_1 l'applicazione finale di quest'ultima omotopia, cosicché

$$f_1(|K_{n-1}|) = *$$

Poiché f_1è omotopa ad f, risulta:

$$[P, f] = [P, f_1]$$

in $T_n^+(X,*)$.
Sia $\{A\}$ la collezione degli n-simplessi di K, ciascuno con l'orientazione indotta da P. Notiamo che

$$f_1(\dot{A}) = *$$

perché $\dot{A} \subset K_{n-1}$, pertanto siamo nella posizione di poter applicare la formula di addizione omologica (4), che dà, come risultato:

$$[P, f] = [P, f_1] = \sum_A [A, f|A]$$

in $T_n^+(X,*)$. Per finire, sia, per ogni A

$$\lambda_A: I^n \to A$$

un qualsiasi PL isomorfismo, che conservi l'orientazione. Si ha, allora, per la definizione stessa della relazione di bordismo:

$$[A, f|A] = [I^n, f|_A \circ \lambda_A]$$

e dunque

$$[P, f] = \sum_A [I^n, f|_A \circ \lambda_A] \ .$$

Ciascuno degli addendi al secondo membro è visibilmente nell'immagine dell'omomorfismo di Hurewicz. Pertanto $[P, f] \in Im(h)$ ed h è un epimorfismo.
Proviamo ora che h è un monomorfismo. Sia $f: I^n, \dot{I}^n \to X, *$, tale che $h[f] = 0$. Questo significa che esiste una $(n+1)$-pseudovarietà orientata Q e un'applicazione continua $F: Q \to X$,tale che:

$$(a) \quad I^n \subset \partial Q \quad \text{e} \quad f = F|I^n$$

$$(b) \quad F(\partial Q - \overset{\circ}{I^n}) = *$$

Dobbiamo dimostrare che f è omotopa ad una costante. Sia K, K_0 una triangolazione di Q, I^n e prendiamo su ogni $(n+1)$-simplesso di K l'orientazione indotta da Q e su ogni n-simplesso di K_0 l'orientazione indotta da I^n. Poiché X è $(n-1)$-connesso, possiamo assumere, per la proprietà di estensione delle omotopie:

$$F\left(|K_{n-1}| \cup (\partial Q - \overset{\circ}{I^n})\right) \ .$$

Per la formula di addizione (3), abbiamo:

$$[f] = [F|I^n] = \sum_{A_0} [f_{A_0}]$$

in $\pi_n(X,*)$, dove A_0 varia tra gli n-simplessi di K_0.
Sia, poi, B un $(n+1)$-simplesso di K. Al variare di v tra i vertici di B, si ha, per la formula di addizione (2):

$$\sum_v [F_{B_v}] = 0$$

in $\pi_n(X,*)$. Sommando su tutti i B:

$$\sum_{B,v} [F_{B_v}] = 0 \ .$$

Rileggiamo quest'ultima somma in un altro modo. Sia A un n-simplesso di $K - K_0$, faccia dei due $(n+1)$-simplessi B, B' e siano v, v' i vertici di B, B' rispettivamente, non contenuti in A. (**figura**)
Allora:

$$[F_{B_v}] + [F_{B'_{v'}}] = 0 \qquad (S)$$

in $\pi_n(X,*)$. Infatti, B, B' inducono su A orientazioni opposte e $F_{B_v} = F_{B'_{v'}} = F|A$, pertanto le classi di omotopia sono individuate dalle orientazioni indotte su A da B, B' risp. (le quali sono una opposta dell'altra).
Da questo si deduce che

$$0 = \sum_{B,v} [F_{B_v}] = \sum_{A_0} [f_{A_0}] = [f] \ ,$$

poiché i contributi di tutti i simplessi A di $K - K_0$ sono nulli, in virtú della (S). Pertanto h è un monomorfismo.
Veniamo adesso alla parte (b). Il fatto che $h: \pi_1(X,*) \to T_1^+(X,*)$ sia un epimorfismo si stabilisce come nel caso $n > 1$. Ci resta da provare che

$$Ker h \equiv [\pi, \pi]$$

dove $[\pi, \pi]$ è il sottogruppo generato dai commutatori di $\pi = \pi_1(X,*)$.

L'inclusione $[\pi,\pi] \subset Ker h$ è ovvia, poiché $T_1^+(X,*)$ è abeliano. Facciamo vedere l'altra inclusione.
Sia C un modello PL di S^1, per esempio $C = \dot{\Delta}^2$, oppure $C = \dot{I}^2$ ed $f\colon(C,*) \to (X,*)$, tale che $h[f] = 0$. Questo significa che esiste una 2-pseudovarietà normale orientata Q e un'applicazione $F\colon Q \to X$, tale che:

(a) $C \subset \partial Q$
(b) $F|C = f$
(c) $F(\partial Q - C) = *$. (**figura**)

Poiché C è priva di bordo, necessariamente $\partial Q - C$ è una 1-pseudovarietà chiusa e come tale una unione finita di PL circonferenze disgiunte $\{C_i\}$. Su ognuna $F(C_i) = *$, quindi possiamo "chiudere" C_i con un disco bidimensionale opportunamente orientato D_i ed estendere F su ciascun D_i mediante la funzione costante. Da questa osservazione discende che non si perde in generalità se si assume

$$C \equiv \partial Q\ .$$

Ora, Q ha singolarità in codimensione ≥ 2, pertanto esso può avere al piú punti isolati come singolarità. Sia, a priori, x uno di tali punti. Il link $L(x,Q)$ è una 1-pseudovarietà chiusa che deve essere connessa, perché Q è normale. Pertanto necessariamente $L(x,Q)$ è una PL circonferenza. Questo significa che x è non singolare per Q, cioè che Q è, a posteriori, priva di singolarità. Dunque Q è una superficie orientabile di bordo C. (**figura**) Dimentichiamo, per il momento, X ed F e consideriamo C come laccio di Q, la cui classe di omotopia individua un elemento di $\pi_1(Q,*)$. Per il teorema di classificazione delle superfici, Q è PL omeomorfa ad una superficie standard orientabile di genere p, avente una circonferenza di bordo. Allora, tagliando Q lungo un sistema di meridiani e paralleli aventi il punto base $*$ come unico punto in comune, si ottiene una "regione fondamentale" per Q (**figura**), la quale mette in luce che il laccio C è omotopo al prodotto dei commutatori

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}\ .$$

Tutto ciò avviene in $\pi_1(Q,*)$. Componendo con F si ha il risultato voluto per $(X,*)$, cioè Ker $h \subset [\pi,\pi]$. Questo conclude la dimostrazione del teorema di Hurewicz. ♣

§ 21 BORDISMO NON ORIENTATO DI PL VARIETA

La classe delle varità PL soddisfa gli assiomi geometrici (C),(I), (E) opportunamente riformulati sostituendo il termine pseudovarietà con quello di varietà PL. Notiamo, però, che l'ultimo assioma (B) non sussiste per tale classe. Infatti, come semplice conseguenza della dualità di Poicaré, abbiamo che una qualsiasi PL varietà chiusa, la cui caratteristica di Eulero sia dispari (per esempio, una triangolazione del piano proiettivo reale) non può essere bordo di alcuna PL varietà. Questo non impedisce di definire il bordismo di varietà PL, che risulta anzi un oggetto complesso e interessante.

21.1 Sia $\mathcal{M}_n^{PL}$ la classe delle n-varietà chiuse PL (non orientate), di cui fa parte, per convenzione, anche l'insieme vuoto. Se $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n^{PL}$, un *bordismo* tra M_1 ed M_2 è (detto nella forma imprecisa) una PL varietà Q, tale che

$$\partial Q = M_1 \sqcup M_2 \ .$$

La relazione di bordismo tra PL varietà, scritta $\sim$, è una relazione di equivalenza in virtú degli assiomi (C) e (I). La classe di bordismo di M si scrive, come al solito, $[M]$ e,per l'insieme quoziente $\mathcal{M}_n^{PL}/\sim$ si usa, nella letteratura, la notazione Ω_n^{PL}. Quest'ultimo ha una struttura di $\mathbb{Z}/2$-modulo rispetto all'unione disgiunta dei rappresentanti:

$$[M_1] + [M_2] := [M_1 \sqcup M_2] \ ,$$

l'elemento neutro essendo fornito dalla classe dell'insieme vuoto, ovvero dalla classe di tutte le PL varietà chiuse n-dimensionali che costituiscono il bordo di qualche PL varietà. Poiché una pseudovarietà zero o unidimensionale è necessariamente una PL varietà, si ha anche in questo caso:

$$\Omega_0^{PL} \approx \mathbb{Z}/2 \ .$$

Tuttavia, a causa della non validità dell'assioma (B), in generale risulta $\Omega_n^{PL} \neq 0$. Se Ω_*^{PL} indica, come al solito, la successione o la somma diretta di tutti gli Ω_n^{PL}, possiamo arricchire la struttura algebrica introducendo in Ω_*^{PL} una moltiplicazione nel modo seguente:

$$[M_1]\dot{[}M_2] := [M_1 \times M_2] \ .$$

Si vede facilmente che tale operazione è ben definita, associativa, distributiva, strettamente commutativa e dà a Ω_*^{PL} una struttura di algebra graduata su $\mathbb{Z}/2$, con elemento unità la classe di un singolo punto in Ω_0^{PL}. tale anello prende il nome di *anello di PL bordismo non orientato*. La sua struttura è stata calcolata mediante l'uso di potenti mezzi di topologia PL e algebrica. Essa è talmete complicata che enunciare sia pure solo il risultato finale sarebbe arduo e, a questo stadio, poco illuminante.
Costruiamo, invece, la teoria omologica associata a Ω_*^{PL}, passando direttamente alla definizione di $\Omega_*^{PL}(X, A)$ per una qualsiasi coppia (X, A). Sia $\mathcal{M}_n^{PL}(X, A)$ la classe formata da tutte le coppie (M, f), con M PL varietà di dimensione n ed $f\colon (M, \partial M) \to (X, A)$ un'applicazione continua. Un *bordismo* tra due tali coppie (M_1, f_1), (M_2, f_2) è (detto in modo impreciso) una coppia (Q, F), dove Q è una $(n+1)$-varietà, tale che:

(a) $M_1 \sqcup M_2 \subset \partial Q$
(b) $F|M_i = f_i \qquad i = 1, 2$
(c) $F(\partial Q - \mathring{M}_1 \sqcup \mathring{M}_2) \subset A$.

Il bordismo è una relazione di equivalenza in $\mathcal{M}_n^{PL}(X, A)$, la classe di (M, f) si denota $[M, f]$ e l'insieme quoziente $\mathcal{M}_n^{PL}(X, A)/\sim$ si scive comunemente $\Omega_n^{PL}(X, A)$. Quest'ultimo ha una struttura di $\mathbb{Z}/2$- modulo mediante la solita operazione di unione disgiunta:

$$[M_1, f_1] + [M_2, f_2] := [M_1 \sqcup M_2, f_1 \cup f_2]$$

con elemento neutro la classe $[\emptyset]$. $\Omega_n^{PL}(X, A)$ prende il nome di *gruppo di PL bordismo n-dimensionale non orientato di* (X, A). La struttura di anello in Ω_*^{PL} si estende ad una struttura di Ω_*^{PL}-modulo su $\Omega_*^{PL}(X, A)$, ponendo:

$$[N] \cdot [M, f] := [N \times M, f \circ \pi]$$

dove $\pi: N \times M \to M$ è la proiezione. Ad ogni $\phi: (X, A) \to (Y, B)$ resta associato un omomorfismo di gruppi abeliani

$$\phi_*: \Omega_n^{PL}(X, A) \to \Omega_n^{PL}(Y, B)$$

definito, come al solito, per composizione con ϕ. Inoltre la somma diretta dei $\phi_* = \phi_{*,n}$, al variare di n, è un morfismo di Ω_*^{PL}-moduli. Dunque, $\Omega_*^{PL}(X, A)$ è un funtore dalla categoria delle coppie di spazi topologici alla categoria dei $\mathbb{Z}/2$- moduli graduati e, piú in generale, alla categoria degli Ω_*^{PL}-moduli. Abbiamo un *morfismo di connessione*:

$$\partial_*: \Omega_n^{PL}(X, A) \to \Omega_{n-1}^{PL}(A)$$

dato dalla restrizione al bordo e ∂_* è una trasformazione naturale di funtori, che si estende addirittura ad un morfismo di Ω_*^{PL}-moduli.

Teorema. *$\Omega_*^{PL}(X, A)$, ∂_* è una teoria omologica generalizzata, cioè verifica tutti gli assiomi di Eilenberg e Steenrod eccetto l'assioma di dimensione.*

Dimostrazione . Sappiamo che i primi sei assiomi di Eilenberg e Steenrod sono conseguenze formali degli assiomi geometrici (C), (I), (E), i quali valgono per la classe delle PL varietà. L'assioma (B) serve solo a stabilire quello della dimensione, pertanto l'enunciato del teorema è vero. ♣

21.2. Come teoria omologica, il bordismo P è completamente determinato dal teorema seguente, che si stabilisce con un argomento di successioni spettrali.

Teorema *Sulla categoria dei CW complessi, $\Omega_*^{PL}(X, A)$ è naturalmente isomorfo, come Ω_*^{PL}-modulo, a $H_*(X, A) \bigotimes_{\mathbb{Z}/2} \Omega_*^{PL}$.* ♣

In particolare, il PL bordismo non orientato è completamente determinato dal suo valore sul punto, cioè da $\Omega_*^{PL}(\text{punto}) \approx \Omega_*^{PL}$.
Non diamo la dimostrazione del teorema, limitandoci qui a dire che esiste una successione spettrale che converge a $\Omega_*^{PL}(X, A)$, il cui termine E^2 è dato da

$$E_{p,q}^2 = H_p(X, A) \bigotimes \Omega_q^{PL}$$

e che, in tale successione, i differenziali sono tutti nulli. Da questo il risultato segue immediatamente.

§ 22 BORDISMO DI PL VARIETA ORIENTATE

22.1 Una PL varietà si dice *orientata*, se essa è orientata come pseudovarietà . La classe delle PL varietà orientate soddisfa gli assiomi geometrici $(C)_+$, $(I)_+$, $(E)_+$, riformulati sostituendo il termine “pseudovarietà orientata” con quello di “PL varietà orientata”. Anche ora l'ultimo assioma $(B)_+$ non sussiste, poiché una qualsiasi PL varietà orientata chiusa con caratteristica di Eulero dispari non è bordo di alcuna PL varietà orientata. Un esempio è fornito da una qualsiasi triangolazione del piano proiettivo complesso $\mathbb{C}P^2$. Seguendo le notazioni piú comunemente usate nella letteratura, indichiamo con $\mathcal{M}_n^{SPL}$ la classe delle PL varietà chiuse orientate, di dimensione n. E' chiaro, ormai, come introdurre la relazione di bordismo $\sim$ in $\mathcal{M}_n^{SPL}$: $M_1 \sim M_2$ se esiste una PL varietà orientata Q, con

$$\partial Q = M_1 \sqcup (-M_2) \ .$$

L'insieme quoziente Ω_n^{SPL} ha una struttura di gruppo abeliano attraverso l'unione disgiunta dei rappresentanti:

$$[M_1] + [M_2] := [M_1 \sqcup M_2] \ .$$

Inoltre, $\Omega_0^{SPL} \approx \mathbb{Z}$, cosicché Ω_n^{SPL} non è in generale uno $\mathbb{Z}/2$-modulo. In $\Omega_*^{SPL} = \bigoplus_n \Omega_n^{SPL}$ vi è una ben definita moltiplicazione, ottenuta mediante prodotto cartesiano sui rappresentanti:

$$[M_1][M_2]; = [M_1 \times M_2] \ ,$$

che è associativa, distributiva e anticommutativa, nel senso che, come facilmente si verifica:

$$[M_1^p][M_2^q] = (-1)^{pq}[M_2^q][M_1^p] \ .$$

Cos`ì Ω_*^{SPL} diventa un anello graduato anticommutativo, con elemento unità la classe di un singolo punto. Esso si chiama *anello di PL bordismo orientato*. La sua struttura è, anche in questo caso, nota, ma oltremodo complicata. La costruzione del *gruppo di PL bordismo orientato n- dimensionale* $\Omega_n^{SPL}(X, A)$ della coppia (X, A) non presenta ormai alcun mistero e, cos´ì come nel caso non orientato, la somma diretta

$$\Omega_*^{SPL}(X, A) := \bigoplus_{n \geq 0} \Omega_n^{SPL}(X, A)$$

ha una naturale struttura di Ω_*^{SPL}-modulo. Ogni $\phi\colon (X, A) \to (Y, B)$ induce, in modo funtoriale, una successione di morfismi

$$\phi_*\colon \Omega_n^{SPL}(X, A) \to \Omega_n^{SPL}(Y, B) \ ,$$

la cui somma diretta è un morfismo di Ω_*^{SPL}-moduli. Infine, vi è una trasformazione naturale

$$\partial_*: \Omega_n^{SPL}(X, A) \to \Omega_{n-1}^{SPL}(A) ,$$

definita mediante restrizione al bordo, la quale si estende ad un morfismo di Ω_*^{SPL}- moduli. La dimostrazione del teorema seguente segue le solite vicende.

Teorema. $\Omega_*^{SPL}(X, A)$, ∂_* è una teoria omologica generalizzata. ♣

Differentemente dal caso non orientato, si può provare che un teorema del tipo **21.2** non sussiste per $\Omega_*^{SPL}(X, A)$ e che, in generale, pur conoscendo il valore della teoria sul punto, è assai arduo determinare i gruppi $\Omega_n^{SPL}(X, A)$. Per CW complessi, esiste una successione spettrale, che converge a $\Omega_*^{SPL}(X, A)$ e il cui termine E^2 è dato da

$$E^2_{p,q} = H_p(X, A; \Omega_q^{SPL}) ,$$

ma i differenziali di tale successione, lungi dall'essere nulli, sono assai complicati.

22.2. Quanto fatto finora si riassume in un diagramma commutativo di teorie omologiche:

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega_n^{SPL}(X, A) & \overset{\rho^{SPL}}{\to} & T_n^+(X, A) & \overset{\theta^+}{\to} & H_n(X, A; \mathbb{Z}) \\
\downarrow \mu^{PL} & & \downarrow \mu^T & & \downarrow \mu^H \\
\Omega_n^{PL}(X, A) & \overset{\rho^{PL}}{\to} & T_n(X, A) & \overset{\theta}{\to} & H_n(X, A; \mathbb{Z}/2)
\end{array}$$

dove ρ^{PL}, ρ^{SPL}, μ^{PL} sono indotte dall'identità sui rappresentanti. Precisamente, μ^{PL} dimentica le orientazioni, ρ^{PL} (risp. ρ^{SPL}) considera una PL varietà (risp. orientata) come una pseudovarietà (risp. orientata). Le trasformazioni naturali ρ^{PL} e ρ^{SPL} sono di grande interesse e saranno discusse nel prossimo paragrafo.

22.3 **Esercizi**. Si dimostri:

(a) $\Omega_1^{SPL} = \Omega_2^{SPL} = 0$
(b) $\Omega_1^{PL} = 0$, mentre $\Omega_2^{PL} \approx \mathbb{Z}/2$ e l'elemento non nullo è la classe del piano proiettivo reale $[\mathbb{R}P^2]$.

§ 23 STEENROD–RAPPRESENTABILITÀ

23.1. Nel 1946 Steenrod pose il seguente problema: dato uno spazio topologico X e una (qualsiasi) classe di omologia $\alpha \in H_n(X, \mathbb{Z})$, esiste una PL varietà orientata M e un'applicazione $f: M \to X$, tale che

$$\alpha = f_*[z_M] \ ?$$

Tale questione appare come *Problema 25* in [S.Eilenberg, On the problems of Topology, Ann. of Math. (2) 50(1949), 247-263] ed è, in verità, formulata per varietà differenziabili, anziché per varietà PL.
Se, per $\alpha \in H_n(X, \mathbb{Z})$, esiste una tale coppia (M, f), diremo che α è *Steenrod-rappresentabile* o *rappresentabile medianta una varietà PL orientata.*
E' ovvio come formulare l'analogo problema modulo due: $\alpha \in H_n(X, \mathbb{Z}/2)$ si dirà *Steenrod-rappresentabile* se esiste una coppia $(M, f) \in \mathcal{M}_n^{PL}(X)$, tale che $\alpha = f_*[z_M]$.
Si noti che, se non insistiamo che M sia una PL varietà, ma solo una pseudovarietà , allora il corrispondente problema di Steenrod è già stato da noi considerato ed il risultato è che esso ha sempre risposta affermativa, come stabilito in **18.3** e **19.3**. Ispezionando il diagramma **22.2**, è chiaro che il problema di Steenrod si può riformulare nel modo seguente: è ρ^{SPL} (risp. ρ^{PL}) un epimorfismo? In questa forma, è facile metterne in evidenza il profondo contenuto geometrico. Sia, infatti, $[P, f]$ un elemento di $T_n(X)$. Allora

$$[P, f] = \rho^{PL}[M, g]$$

significa che esiste una pseudovarietà Q e un'applicazione $F: Q \to X$, tali che

(a) $\partial Q = P \sqcup M$
(b) $F|P = f$ e $F|M = g$

La pseudovarietà P avrà, in generale, un sottopoliedro di singolarità SP, che può essere quasi del tutto arbitrario, mentre M è una pseudovarietà priva di singolarità. Possiamo, allora, dire che il bordismo (Q, f) *risolve* le singolarità di (P, f). Pertanto la Steenrod-rappresentabilità è un problema di risoluzione di singolarità a meno di bordismo.
Analoghe considerazioni valgono nel caso orientato per la trasformazione naturale ρ^{PL}.
Thom [Comm. Math. Helv. 28(1954), 17-18] ha risolto completamente il problema di Steenrod, giungendo al sorprendente risultato, che qui sotto riassumiamo.

Teorema (Thom).
(a) *Ogni classe di omologia modulo due è rappresentabile mediante una PL varietà.*
(b) *In corrispondenza ad ogni $n \geq 0$, esiste un intero $N > 0$, tale che, se α è una qualsiasi classe di omologia intera n-dimensionale, il multiplo $N\alpha$è rappresentabile mediante una PL varietà orientata.*
(c) *Per $n < 7$, ogni classe di omologia intera n-dimensionale è Steenrod-rappresentabile, cioè si può prendere $N = 1$ in (b), mentre ,per <u>ogni</u> $n \geq 7$, esistono classi di omologia intera n-dimensionali, che non sono rappresentabili mediante varietà differenziabili.*

♣

Dimostreremo piú avanti questo notevolissimo teorema, inquadrandolo nell'approccio alla teoria del bordismo dovuto a Thom et al, per il quale saranno necessari strumenti molto piú potenti di quelli che abbiamo per il momento a disposizione.

Esercizio. Si dimostri che, per $n = 1$, le trasformazioni naturali $\rho^{PL}: \Omega_1^{PL}(X) \to T_1(X)$ e $\rho^{SPL}: \Omega_1^{SPL}(X) \to T_1^+(X)$ sono isomorfismi.

Suggerimento: una pseudovarietà unidimensionale è anche una PL varietà e questo prova che ρ^{PL} è un epimorfismo; una pseudovarietà normale bidimensionale è necessariamente una PL varietà e questo prova che ρ^{PL} è un monomorfismo. Analogamente per ρ^{SPL}. ♣

23.2. Quest'ultimo esercizio fornisce una descrizione geometrica molto semplice ed elegante dell'omologia unidimensionale. Un 1-ciclo in X non è altro che una curva PL chiusa in X ed esso è omologo a zero se è bordo di una superficie in X, dove "in X" sta a significare "con un'applicazione in X".
Si può dimostrare, in modo non banale, che ρ^{SPL} continua ad essere un isomorfismo anche per $n = 2, 3$, mentre, forse sorprendentemente, ρ^{PL} non è piú un isomorfismo già per $n = 2$. In ogni caso, quest'immagine dell'omologia come bordismo di PL varietà, che è valida nelle prime dimensioni, cessa poi di essere vera ed è necessario, come abbiamo visto, introdurre singolarità per avere un'esatta rappresentazione geometrica dei cicli e delle omologie tra di essi. I teoremi di Thom sulla suriettività di ρ^{PL} e ρ^{SPL} si rivelano cos´ì in tutta la loro importanza. Il lettore molto interessato può provare a svolgere il seguente esercizio, che copre un "segmento infinitesimale" del teorema **23.1**.

Esercizio. Dimostrare che i morfismi ρ^{PL} e ρ^{SPL} sono suriettivi per $n \leq 3$.

§ 24 BORDISMO DI $\mathcal{L}$ VARIETÀ. CENNI

Sia $\mathcal{L}$ un qualsiasi tipo di singolarità. La classe delle $\mathcal{L}$- varietà soddisfa gli assiomi (C), (I), (E), riformulati nel modo ovvio. Pertanto si definisce, nella solita maniera, un *anello di $\mathcal{L}$-bordismo (non orientato)*

$$\Omega_*^{\mathcal{L}} = \bigoplus_n \Omega_n^{\mathcal{L}}$$

che è addirittura una $\mathbb{Z}/2$-algebra graduata, con unità in grado zero. Vi è anche una teoria omologica generalizzata $\Omega_*^{\mathcal{L}}(X, A)$, che si costruisce come nei due casi speciali, che abbiamo trattato per esteso, i quali sono:

(a) $\mathcal{L} = \mathcal{P}$, che dà $\Omega_*^{\mathcal{L}}(X, A) = T_*(X, A)$
(b) $\mathcal{L}_n = \{S^n\}$, che dà $\Omega_*^{\mathcal{L}}(X, A) = \Omega_*^{PL}(X, A)$

Anche in questo caso generale il valore sul punto determina la teoria, perché

$$\Omega_*^{\mathcal{L}}(X, A) \approx H_*(X, A) \bigotimes \Omega_*^{\mathcal{L}}$$

come $\Omega_*^{\mathcal{L}}$-moduli.
I gruppi $\Omega_n^{\mathcal{L}}$ sono, come si può immaginare, difficili da calcolare e, in generale, non sono noti. Qui ci limitiamo a citare brevemente qualche esempio in cui il calcolo ha avuto successo.

24.1. Se $\mathcal{L}$ è il tipo di singolarità che definisce le varietà di Eulero mod 2 e $\chi_{(2)}$ la caratteristica di Eulero- Poicaré ridotta modulo due, è un semplice esercizio verificare che $\chi_{(2)}$ è compatibile con la relazione di $\mathcal{L}$-bordismo, cosicché resta definito un omomorfismo

$$\chi_{(2)}: \Omega_n^{\mathcal{L}} \to \mathbb{Z}/2$$

Teoorema (F.Latour). *Per $n > 0$ l'omomorfismo $\chi_{(2)}$ è iniettivo. Se n è pari, esso è un isomorfismo; se n è dispari, $\Omega_n^{\mathcal{L}} = (0)$* ♣

24.2 Consideriamo un tipo di singolarità finora non menzionato:

$$\mathcal{L}_0 = \{S^0\} \qquad \mathcal{L}_n = \{P : L(x,P) \in \mathcal{L}_{n-1}; H_{n-1}(L(x,P), \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}\} .$$

Queste $\mathcal{L}$-varietà si chiamano, per chiari motivi, *pseudovarietà localmente orientabili.*

Teorema. (Goresky-Pardon)

$$\Omega_n^{\mathcal{L}} = \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & \text{se } n \text{ è pari} \\ (0), & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

♣

Qui l'invariante che classifica non è la caratteristica di Eulero-Poincaré mod 2, bens´ì la n-esima potenza cup della prima classe di Stiefel Whitney. Tale classe si può definire proprio in virtú della locale orientabilità e rappresenta l'unica ostruzione ad una globale orientabilità.
Il terzo ed ultimo esempio è un esercizio, che segue subito dalle definizioni.

24.3 Sia $\mathcal{P}^{(r)}$ la classe dei link che definiscono le pseudovarietà con singolarità in codimensione $\geq r$. Allora:

$$\Omega_n^{\mathcal{P}^{(r)}} = \begin{cases} \Omega_n^{PL}, & \text{per } n < r-1 \\ (0), & \text{per } n \geq r-1 \end{cases}$$

20.2 Singolarità E' possibile definire il bordismo orientato per un qualsiasi tipo di singolarità? In generale la risposta è negativa, perché non è detto che una $\mathcal{L}$- varità ammetta una buona nozione di classe fondamentale su $\mathbb{Z}$. Tuttavia, questo inconveniente non si presenta se $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$, cioè se consideriamo una sottoclasse della classe delle pseudovarietà . In tal caso vi è, in corrispondenza, una ben definita teoria omologica generalizzata $\Omega_*^{S\mathcal{L}}(X,A)$, di cui un caso speciale è $\Omega_*^{SPL}(X,A)$. Abbiamo un poset di funtori e trasformazioni naturali:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_*^{S\mathcal{L}}(X,A) & \to & H_*(X,A;\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_*^{\mathcal{L}}(X,A) & \to & H_*(X,A;\mathbb{Z}/2) \end{array}$$

24.5 A questo punto, concludiamo con un commento importante. Il bordismo di pseudovarietà , di varietà PL e di varietà generalizzate da unlato si inserisce, in modo naturale, nel contesto della topologia PL, dall'altro è a noi servito principalmente a tre scopi:

(a) dare un'interpretazione geometrica dell'omologia singolare mediante pseudovarietà , precisando in tal modo, idee che risalgono a Lefschetz, Brower et al.

(b) dare una dimostrazione del teorema di Hurewicz, che metta in luce il contenuto geometrico della relazione tra omotopia e omologia;

(c) apprezzare il significato e la profondità geometrica dei teoremi di Thom sulla rappresentabilità delle classi di omologia.

E' però, doveroso sottolineare che non è secondo la nostra linea espositiva che si è sviluppato storicamente il bordismo ad opera di autori come Rohlin, Pontryagin e principalmente Thom negli anni '40-'50. Inoltre, le teorie di bordismo che si sono dimostrate piú feconde in topologia algebrica nascono nel contesto delle varietà differenziabili, principalmente in quello delle varietà quasi complesse. Di questo ci occuperemo estesamente nei prossimi capitoli.