Geometria
Prova autovalutativa di metà semestre
Corso di laurea in fisica — A.A 2018/2019
Canale A – C

DURATA: 1 ORA E 30 MINUTI

Simone Diverio

23 novembre 2018

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare a tre equazioni e tre incognite, a coefficienti reali e con parametro reale k:

$$\begin{cases} kx + z = -k \\ x + (k-1)y + z = k \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Scriverne la matrice dei coefficienti A_k e la matrice completa $A_k|b_k$. Calcolare il rango di queste due matrici al variare di k, e dedurne per quali valori di k il sistema risulta essere compatibile.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Dire, giustificando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali o affini.

(i) Il sottoinsieme $U \subset V$ dei polinomi divisibili per $x - 1$.

(ii) Il sottoinsieme $L \subset V$ dei polinomi con termine noto uguale a 2018.

(iii) Il sottoinsieme $Z \subset V$ dei polinomi $p(x)$ tali che $p(0)^2 = 2$ (*suggerimento: usare la convessità*).

Esercizio 3. Siano V, W due spazi vettoriali sui reali, e siano rispettivamente

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad \mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$$

basi per V e W. Si considerino i due operatori lineari $T, S \colon V \to W$ definiti da

$$T(v_1) = 0, \quad T(v_2) = w_1, \quad T(v_3) = 0,$$

e

$$S(v_1) = 0, \quad S(v_2) = 0, \quad S(v_3) = w_2.$$

(i) Determinare la dimensione di $\ker T$ e $\ker S$ e una base per $\ker T \cap \ker S$.

(ii) Determinare tutti e soli i vettori $v \in V$ tali che $T(v) = S(v)$.

(iii) Dire, giustificando la risposta, se l'operatore $T + S \colon V \to W$ è suriettivo.

Soluzioni

Esercizio 1. La matrice dei coefficienti è

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

mentre la matrice completa è data da

$$A_k|b_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 & -k \\ 1 & k-1 & 1 & k \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Procediamo con un'eliminazione di Gauss sulla matrice completa, iniziando con lo scambio di prima e seconda riga. Si ottiene alla fine

$$\begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 & k \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & -k(1+k) \end{pmatrix}.$$

Da questa eliminazione di Gauss si ottiene immediatamente che $\operatorname{rk} A_k = 3$ se $k \neq \pm 1$ mentre $\operatorname{rk} A_k = 2$ se $k = \pm 1$. Siccome si ha sempre $\operatorname{rk} A_k \leq \operatorname{rk} A_k|b_k \leq 3$, abbiamo che anche il rango della matrice completa è 3 se $k \neq \pm 1$. Se invece $k = 1$, abbiamo che $2 = \operatorname{rk} A_k < \operatorname{rk} A_k|b_k = 3$, mentre se $k = -1$ allora $2 = \operatorname{rk} A_k = \operatorname{rk} A_k|b_k$.

In definitiva, per il Teorema di Rouché–Capelli, il sistema è compatibile se e solo se $k \neq 1$.

Esercizio 2. Per il punto (i), un polinomio $p(x)$ è divisibile per $x-1$ se e solo se esiste un polinomio $q(x)$ tale che $p(x) = (x-1)q(x)$. Siano $p_1(x), p_2(x) \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dunque esistono $q_1(x), q_2(x)$ polinomi tali che $p_i(x) = (x-1)q_i(x)$, $i = 1, 2$. Ma allora

$$\begin{aligned} \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) &= \alpha(x-1)q_1(x) + \beta(x-1)q_2(x) \\ &= (x-1)\big(\alpha q_1(x) + \beta q_2(x)\big). \end{aligned}$$

Dunque $\alpha p_1(x) + \beta p_2(x)$ è divisibile per $(x-1)$ e quindi $\alpha p_1(x) + \beta p_2(x) \in U$. Questo vuol dire che U è un sottospazio vettoriale.

Per il punto (ii), sia $p_0(x)$ un qualunque polinomio di grado minore o uguale a due con termine noto 2018, ad esempio il polinomio costante $p_0(x) = 2018$. Sia W il sottoinsieme dei polinomi di grado minore o uguale a due con termine noto nullo. Allora W è un sottospazio vettoriale (coincide ad esempio con il sottoinsieme dei polinomi che si annullano in zero) e $L = p_0(x) + W$. Dunque L è un sottospazio affine. Si osservi che L non è un sottospazio vettoriale in quanto non contiene il polinomio identicamente nullo.

Per il punto (iii), Z non è né un sottospazio vettoriale né affine. È sufficiente verificare che non è un insieme convesso. Se lo fosse, per ogni $p_0(x), p_1(x) \in Z$

ed ogni $t \in [0,1]$, si dovrebbe avere che $p_t(x) := tp_1(x) + (1-t)p_0(x) \in Z$. Per un controesempio, si scelga come $p_i(x) = (-1)^i\sqrt{2}$, $i = 1,2$: in questo caso $p_{\frac{1}{2}}(x)$ è il polinomio identicamente nullo, il quale valutato in zero ed elevato al quadrato dà $0 \neq 2$.

Esercizio 3. Per (i), la dimensione dell'immagine di entrambi gli operatori è 1, come si vede immediatamente da come sono definiti (essendo $w_1, w_2 \neq 0$). Dunque per entrambi la dimensione del nucleo è 2. Dalla definizione di T ed S segue immediatamente che $\operatorname{Span}\{v_1, v_3\} \subseteq \ker T$ e $\operatorname{Span}\{v_1, v_2\} \subseteq \ker S$. Ma $\{v_1, v_3\}$ e $\{v_1, v_2\}$ sono insieme linearmente indipendenti, e quindi $\operatorname{Span}\{v_1, v_3\} = \ker T$ e $\operatorname{Span}\{v_1, v_2\} = \ker S$. Dunque $v_1 \in \ker T \cap \ker S$. Siccome $\ker T + \ker S$ è generato da $\{v_1, v_2, v_3\}$, e questo insieme è linearmente indipendente essendo una base di V, abbiamo $\dim\big(\ker T + \ker S\big) = 3$ e quindi, per la formula di Grassmann $\dim\big(\ker T \cap \ker S\big) = 1$. Ma allora necessariamente $\ker T \cap \ker S = \operatorname{Span}\{v_1\}$, ed essendo $0 \neq v_1$, $\{v_1\}$ è una base per $\ker T \cap \ker S$.

Per (ii), come già osservato $\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\{w_1\}$, e $\operatorname{Im} S = \operatorname{Span}\{w_2\}$. Essendo $\{w_1, w_2\}$ una base per W, si ha che $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Im} S = \{0\}$. Se un tale v esiste, allora necessariamente $T(v) = S(v) = 0$. Quindi i vettori v che soddisfano $T(v) = S(v)$ sono tutti e soli quelli che appartengono a $\ker T \cap \ker S$, cioè tutti e soli i multipli di v_1.

Infine, per (iii), l'immagine di $T+S$ è il sottospazio di W dato da $\operatorname{Span}\{T(v_1)+S(v_1), T(v_2)+S(v_2), T(v_3)+S(v_3)\} = \operatorname{Span}\{w_1, w_2\} = W$. Dunque $T+S$ è suriettivo.

Autovalutazione. Ogni esercizio vale 7 punti. Il voto finale è dato dalla somma dei punti ottenuti moltiplicati per il fattore 5/3 (se il risultato finale eccede il 30, si consideri come 30 e lode).

Per quanto riguarda il primo esercizio, la scrittura delle matrici vale in totale 1 punto, il calcolo del rango vale in totale 4 punti, la compatibilità vale 2 punti. Per il secondo ed il terzo esercizio, bisogna rispondere per ognuno a tre domande, ognuna delle quali vale 7/3 di punto.

Risposte non argomentate non danno punti. Se l'argomentazione è valida ma il risultato errato a causa di errori di calcolo, il punteggio deve essere considerato "quasi" pieno. Viceversa, se l'argomentazione è errata ma il risultato è esatto, il punteggio è da considerarsi nullo.

Un compito ordinato e ben redatto può guadagnare qualche punto. Viceversa, un compito disordinato può perdere qualche punto (anche molti...).