ESERCIZI DI RIPASSO SU FUNZIONI ED EQUIVALENZE

Esercizio 1. Si consideri $\phi : \{0,1,2,3,4\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ così definita

$$(\phi(f))(n) := \begin{cases} 0 & \text{if } f(n) \in \{0,2,4\}, \\ 1 & \text{if } f(n) \in \{1,3\}. \end{cases}$$

1. Dire se ϕ è iniettiva/suriettiva.
2. Determinare $\mathrm{Im}(\phi)$.
3. Determinare $\phi^{-1}(g)$ dove $g \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ è tale che $g(i) = 1$ per ogni intero i.

Esercizio 2. Siano $B \subseteq A$ insiemi. Provare che $\mathcal{P}(A)$ è equipotente a $\mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(A \setminus B)$.

Esercizio 3. Sia X un insieme finito, $H := \{0,1\}^X$. Provare che esiste una biezione da $\mathcal{P}(X)$ in H.

Esercizio 4. Sia X un insieme non vuoto con n elementi e $f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{1,\dots,n\}$.

1. Si dimostri che esistono $A, B \in \mathcal{P}(X)$ con $A \neq B$ tali che
$$f(A) = f(B) = f(A \cup B) = f(A \cap B).$$
2. Discutere il caso in cui $X = \emptyset$.

Esercizio 5. Sia A l'insieme dei numeri pari e B quello dei numeri dispari in $\mathbb{Z}$. Sia

$$f : A \times B \longrightarrow B, \qquad (a,b) \longmapsto a - b,$$
$$g : A \times B \longrightarrow A \times B, \qquad (a,b) \longmapsto (ab, a+b).$$

1. Dire se f è iniettiva e/o suriettiva (su B).
2. Dire se g è iniettiva e/o suriettiva (su $A \times B$).

Esercizio 6. Si costruiscano esempi di insiemi con una relazione che gode di due delle tre proprietà definenti una relazione di equivalenza.

Esercizio 7. Sia $k \in \mathbb{N}$. Si consideri su $\mathbb{Z}$ la relazione $\sim$ così definita:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \qquad a \sim b \iff 2k \mid a + 3b.$$

Dire per quali valori di k

1. $\sim$ è riflessiva;

2. $\sim$ è una relazione di equivalenza.

Esercizio 8. Consideriamo su $X := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relazione $\approx$ così definita:

$$\forall x, y, z, w \in \mathbb{R} \quad (x, y) \approx (z, w) \iff \exists a \in \mathbb{R} \ y = x^3 + a \text{ e } w = z^3 + a.$$

1. Provare che $\approx$ è una relazione di equivalenza su X.

2. Determinare un sistema di rappresentanti per $X/\approx$.

Esercizio 9. Consideriamo su $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relazione $\approx$ così definita:

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \quad (x_1, y_1) \approx (x_2, y_2) \iff 2(x_1 - x_2) = 3(y_2 - y_1).$$

Dimostrare che

1. $\approx$ è un'equivalenza su X;

2. $X/\approx$ è equipotente a $\mathbb{Z}$.

Esercizio 10. Consideriamo su $P := \{(a, b, c) |\ a, b, c \in \mathbb{Z} \ \ a, c > 0 \ \ a^2 + b^2 = c^2\}$ la relazione $\approx$ così definita:

$$\forall (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) \in P \quad (a, b, c) \approx (a_1, b_1, c_1) \iff a_1(b + c) = a(b_1 + c_1).$$

Dimostrare che

1. $\approx$ è un'equivalenza su P;

2. $P/\approx$ è equipotente a $\mathbb{Q}^+ := \{x |\ x \in \mathbb{Q} \ \ x > 0\}$.

Esercizio 11. Definiamo la seguente relazione $\sim$ su $\mathbb{Q}$ ponendo

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Si dimostri che

1. $\sim$ è una relazione d'equivalenza su $\mathbb{Q}$;

2. se $x := \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $[x]_\sim = \{y |\ y \in \mathbb{Q} \quad \exists c \in [a]_{\equiv_b} \quad y = \frac{c}{b}\}$.

Esercizio 12. Sia $X := \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$. Definiamo una relazione di equivalenza su X ponendo

$$\forall A, B \in X \quad A \sim B \iff \min(A) = \min(B).$$

Si dimostri che

1. $\sim$ è una relazione d'equivalenza su X;

2. $X/\sim$ è equipotente a $\mathbb{N}$.