Calcolo Differenziale — *Test 3*

Corsi di Laurea in Informatica, a.a. 2013/14

Mettere una croce su vero o falso, lasciare in bianco se non si conosce la risposta.

Esercizio 1.

$$\lim_{x\to+\infty} cos^2(x) + \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}+2} = +\infty \quad \boxed{\cancel{\text{V}}} \quad \boxed{\text{F}}$$

Esercizio 2.

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(x) + \frac{x}{x+1} = 1 \quad \boxed{\text{V}} \quad \boxed{\cancel{\text{F}}}$$

Esercizio 3.

$$\lim_{x\to+\infty} cos(x)\sin(\frac{1}{x}) = 0 \quad \boxed{\cancel{\text{V}}} \quad \boxed{\text{F}}$$

Esercizio 4. Siano $f(x)$ una funzione definita su $\mathbb{R}$ e limitata e $g(x)$ tale che esiste $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

i) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$

ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 5. Siano

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{2x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

sia $l := \lim_{x\to 0} f(x)$

i) $\lim_{x\to 0} g\circ f(x) = \lim_{y\to l} g(y)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$

ii) $\lim_{x\to 0} g\circ f(x) = g(f(0))$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$

iii) g ammette una discontinuità eliminabile nel punto $x = 0$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$

iv) la funzione $f\circ g$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 6. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sia

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) + \beta & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\alpha x + \beta}{|x|+1} & \text{se } x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

i) Per ogni coppia $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta continua in $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$

ii) Per ogni coppia $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta continua in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$

iii) Esiste almeno una coppia $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tale che la funzione f risulta continua in $\mathbb{R}$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$

iv) Se $\beta = 0$ esiste un unico valore $\alpha \in \mathbb{R}$ tale la funzione f risulta continua in $\mathbb{R}$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$

v) Esiste un'unica coppia $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tale che la funzione f risulta continua in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$

Domande aperte

Esercizio 7. Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x}{x^2-1} \to -\infty, \quad \lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})\tan(x^2+x) \to 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \cos(x^2)\frac{x^2-3x}{x^3+1} \to 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+3x)}{x}, \to 3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan(x)}{x-\frac{\pi}{2}} \to -\infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{3x^4} \to \frac{1}{6}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{x-1} \to \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x}}.$$

DOPO LA RAZIONALIZ

$= +\infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2}x - \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}(x-1)\right) \qquad y = x-1$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}y)}{y} = \frac{\pi}{2}$$