

## Calcolo Differenziale — Test 4

Corsi di Laurea in Informatica, a.a. 2013/14

*Mettere una croce su vero o falso, lasciare in bianco se non si conosce la risposta.*

Per rispondere ad alcune domande dovete attendere gli argomenti che verranno svolti nella lezione di lunedì 4-11, provate intanto quelle che sapete fare ed eventualmente iniziate a guardarvi le funzioni  $\arcsin(x)$ ,  $\arccos(x)$  e  $\arctan(x)$ .

Notazione: dato  $I$  sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ . Con il simbolo  $\max_I f$ , rispettivamente  $\min_I f$ ,  $\sup_I f$ ,  $\inf_I f$  si intende  $\max$ , rispettivamente  $\min$ ,  $\sup$  ed  $\inf$  dell'insieme immagine  $f(I)$ .

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = \sin(x) + x$  definita in  $I := [0, \frac{\pi}{2}]$ .

- i) Esiste l'inversa di  $f$  in  $I$  e questa risulta continua  V  F
- ii) L'insieme  $f(I)$  è illimitato  V  F
- iii) L'insieme  $f(I)$  è un intervallo  V  F
- iv)  $\sup_I f > 1$   V  F
- v)  $f(x) \geq \frac{1}{2}$  per ogni  $x \in I$   V  F

**Esercizio 2.** Sia  $f(x) = \sin(x) + 4 \cos(x) + x$  definita in  $I := [0, \frac{\pi}{2}]$ .

- i) L'equazione  $f(x) = 0$  ammette almeno una soluzione nell'intervallo  $[0, \pi]$   V  F
- ii) L'equazione  $f(x) = 0$  ammette almeno una soluzione nell'intervallo  $[0, \frac{\pi}{2}]$   V  F
- iii) L'insieme  $f([0, \frac{\pi}{2}])$  è limitato  V  F
- iii) L'insieme  $f([0, \frac{\pi}{2}])$  è un intervallo  V  F
- iv) L'insieme  $f(\mathbb{R})$  è un intervallo  V  F
- v) L'insieme  $f(\mathbb{R})$  è limitato  V  F
- vi) La funzione  $f$  definita su  $\mathbb{R}$  è invertibile  V  F

**Esercizio 3.** Sia  $f(x) = \sqrt{x} + x^3 + \tan(x)$  definita in  $I := [0, \frac{\pi}{2}]$ .

- i) Esiste  $\max_{[0,1]} f$   V  F
- ii) Esiste  $\min_{[0, \frac{\pi}{2})} f$   V  F
- iii)  $f([0, \frac{\pi}{2}))$  è limitato  V  F

### Domande aperte

**Esercizio 4.** Sia  $f(x) = \sin(x) + \tan^3(x)$

- i) Determinare l'insieme  $J := f([0, 1])$ ;
- ii) dimostrare che  $f$  definita su  $[0, 1]$  ammette inversa continua  $f^{-1}$  definita su  $J$ .

**Esercizio 5.** Siano  $A = [0, 2) \cup (3, +\infty)$ ,  $B = (-\infty, 4) \cup [5, 9)$ . Determinare  $\sup$  ed  $\inf$  degli insiemi  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ . In tutti questi casi dire se questi sono anche  $\max$  e  $\min$  per tali insiemi.

Esercizio 6. Sia  $f(x) = x - \arcsin(x) + \frac{1}{2}$ . Dimostrare che l'equazione  $f(x) = 0$  ammette almeno una soluzione in  $[0, 1]$

Esercizio 7. Sia  $f(x) = x + \arctan x$ . Determinare  $f((-\infty, 0])$ .

Esercizio 8. Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2\alpha x)}{x} - 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{x-1} + \alpha^2 & \text{se } x \geq 0, x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Determinare al variare di  $\alpha$  i punti di continuità di  $f$ . Nei punti di discontinuità specificare di quale discontinuità si tratta.

Esercizio 9. Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3 + x)}{\tan(x^2 - x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \arctan(x^3 + 3x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x^3 + x) \frac{x+2}{1-x}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \arccos(x) \frac{\sqrt{7+3x}-2}{x+1}.$$