Calcolo Differenziale — *Test 4*

Corsi di Laurea in Informatica, a.a. 2013/14

Mettere una croce su vero o falso, lasciare in bianco se non si conosce la risposta.

Per rispondere ad alcune domande dovete attendere gli argomenti che verranno svolti nella lezione di lunedi' 4-11, provate intanto quelle che sapete fare ed eventualmente iniziate a guardarvi le funzioni $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ e $\arctan(x)$.

Notazione: dato I sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Con il simbolo $\max_I f$, rispettivamente $\min_I f$, $\sup_I f$, $\inf_I f$ si intende max, rispettivamente min, sup ed inf dell'insieme immagine $f(I)$.

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sin(x) + x$ definita in $I := [0, \frac{\pi}{2}]$.

i) Esiste l'inversa di f in I e questa risulta continua V F

ii) L'insieme $f(I)$ è illimitato V F

iii) L'insieme $f(I)$ è un intervallo V F

iv) $\sup_I f > 1$ V F

v) $f(x) \geq \frac{1}{2}$ per ogni $x \in I$ V F

Esercizio 2. Sia $f(x) = \sin(x) + 4\cos(x) + x$. definita in $I := [0, \frac{\pi}{2}]$.

i) L'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0, \pi]$ V F

ii) L'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ V F → E' SEMPRE > 0

iii) L'insieme $f([0, \frac{\pi}{2}])$ è limitato V F

iii) L'insieme $f([0, \frac{\pi}{2}])$ è un intervallo V F

iv) L'insieme $f(\mathbb{R})$ è un intervallo V F

v) L'insieme $f(\mathbb{R})$ è limitato V F

vi) La funzione f definita su $\mathbb{R}$ è invertibile V F $\exists$ ALMENO 2 ZERI

Esercizio 3. Sia $f(x) = \sqrt{x} + x^3 + \tan(x)$ definita in $I := [0, \frac{\pi}{2})$.

i) Esiste $\max_{[0,1]} f$ V F

ii) Esiste $\min_{[0,\frac{\pi}{2})} f$ V F

iii) $f([0, \frac{\pi}{2}))$ è limitato V F $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

Domande aperte

Esercizio 4. Sia $f(x) = \sin(x) + \tan^3(x)$

i) Determinare l'insieme $J := f([0, 1])$; f E' CRES. $[m, M] = [f(0), f(1)]$

ii) dimostrare che f definita su $[0, 1]$ ammette inversa continua f^{-1} definita su J. f E' CRES. E CONTINUA

Esercizio 5. Siano $A = [0, 2) \cup (3, +\infty)$, $B = (-\infty, 4) \cup [5, 9)$. Determinare sup ed inf degli insiemi A, B, $A \cap B$, $A \cup B$. In tutti questi casi dire se questi sono anche max e min per tali insiemi.

$\sup A = +\infty$
$\inf A = \min A = 0$

$\inf B = -\infty$
$\sup B = 9$
NO MAX

$A \cap B = [0, 2] \cup (3, 4) \cup [5, 9)$ $\inf A \cap B = \min A \cap B = 0$
$\sup A \cap B = 9$ NO MAX

$A \cup B = \mathbb{R}$ $\inf = -\infty$ $\sup = +\infty$

Esercizio 6. Sia $f(x) = x - \arcsin(x) + \frac{1}{2}$. Dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione in $[0, 1]$ $f(0) = \frac{1}{2}$ $f(1) = \frac{3-\pi}{2} < 0$ $\exists$ DEGLI ZERI

Esercizio 7. Sia $f(x) = x + \arctan x$. Determinare $f((-\infty, 0])$. f E' CRES. E CONTINUA L'IMMAG E' UN INTERVALLO $(-\infty, 0]$ INFATTI $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$ $f(0) = 0$

Esercizio 8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2\alpha x)}{x} - 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{x-1} + \alpha^2 & \text{se } x \geq 0,\ x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Determinare al variare di α i punti di continuità di f. Nei punti di discontinuità specificare di quale discontinuità si tratta.

Esercizio 9. Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin(x^3 + x)}^{\to 0^-}}{\tan(x^2 - x)}, \quad \lim_{x\to 0} \underbrace{\cos(\frac{1}{x})}_{\text{limitato}} \underbrace{\arctan(x^3 + 3x)}_{\to 0}, \quad \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\arctan(x^3 + x)}_{\to \frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{x+2}{1-x}}_{\to -1}, \quad \lim_{x\to-1^+} \underbrace{\arccos(x)}_{\to \pi} \frac{\sqrt{7+3x} - 2}{x+1}.$$

$\to -\frac{\pi}{2}$ $\to 0$ $\frac{3\pi}{4}$

RAZIONALIZZ. $\frac{3(x+1)}{(x+1)(\sqrt{7+3x}+2)} \to \frac{3}{4}$

ES 8 IN $x \neq 0, 1$ LA FUNZIONE E' SEMPRE CONTINUA

IN $x = 1$ C'E' UNA DISC. DI II^a SPECIE INFATTI $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

IN $x = 0$ FACCIAMO IL LIMITE A SIN E DX $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x-1} + \alpha^2 = \alpha^2$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(2\alpha x)}{x} - 1 = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{\sin(2\alpha x)}{2\alpha x}}_{\to 1} \cdot 2\alpha - 1 = 2\alpha - 1$

SE $\alpha^2 = 2\alpha - 1 \Rightarrow \alpha = 1$ LA FUNZ E' CONTINUA, SE $\alpha \neq 1$ C'E' UNA DISCON. DI I^a SPECIE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3+x)}{tg(x^2-x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin(x^3+x)}{x^3+x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2-x}{tg(x^2-x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^3+x}{x^2-x}}_{\to -1} = -1$$