

Calcolo Differenziale — Test 5

Corsi di Laurea in Informatica, a.a. 2013/14

Mettere una croce su vero o falso, lasciare in bianco se non si conosce la risposta.

Esercizio 1. Sia $f(x) = 2x + \arctan(x) + \frac{1}{x} + \cos(x)$

- i) f è crescente in $[1, \infty)$ ☒ V ☐ F
- ii) f è crescente in $(0, \infty)$ ☒ V ☐ F
- iii) esiste $c \in (0, \infty)$ tale che $f'(c) = 0$ ☐ V ☒ F

Esercizio 2. Sia f derivabile in (a, b) e continua in $[a, b]$

- i) f^2 derivabile in (a, b) ☒ V ☐ F
- ii) se $f(x) \geq 0$ in (a, b) $\sqrt{f}$ derivabile in (a, b) ☐ V ☒ F
- iii) se $f^2(a) = f^2(b)$ esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$ ☐ V ☒ F
- iv) se $f(x) > 0$ in (a, b) e $\sqrt{f(a)} = \sqrt{f(b)}$ esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$ ☐ V ☒ F

Esercizio 3. Sia $f(x)$ definita in (a, b) e derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Sia $h(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $x_0 \in (a, b)$ con $h'(x_0) = 0$.

- i) La funzione $|f|$ è derivabile in x_0 ☐ V ☒ F
- ii) Se $f(x_0) \neq 0$ si ha $(|f|)'(x_0) = \text{sgn}(f(x_0))f'(x_0)$ ☐ V ☒ F
- iii) fh è derivabile in x_0 ☐ V ☒ F

Domande aperte

Esercizio 4. Dopo aver determinato l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità si calcolino le derivate delle seguenti funzioni

$$\frac{x \sin(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \cos(\sqrt{1-x^2}), \quad \frac{x + \cos(x)}{1 - \sin(x)}, \quad \sqrt{\sin(x)}, \quad e^{\tan(x)}, \quad \frac{x^2 - 6}{\log(x)}, \quad \log(x^2 - x)$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $f'(x) = \frac{2+x[\cos(x)-2\sin(x)]}{[1-\sin(x)]^2}$

Esercizio 5. Sia $f(x) = 3x + 2\sin(x) + x^3 + 1$. Dimostrare che la funzione f è invertibile in $\mathbb{R}$. Calcolare $(f^{-1})'(1)$.

$f'(x) = 3 + 2\cos(x) + 3x^2 \geq 3 - 2 \quad \forall x^2 \geq 0 \Rightarrow f \text{ CRESCENTE}$
 $f^{-1}(1) = 0 \quad \vee \quad f(0) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}$

Esercizio 6. Sia $f(x) = \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$. Dimostrare che f è costante nell'intervallo $(0, \infty)$. Dimostrare che f è costante nell'intervallo $(-\infty, 0)$. La funzione è costante in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

Esercizio 7. Sia $f(x) = e^x - 2x + 1$. Determinare massimo e minimo di f nell'intervallo $[0, 2]$

$$\sin(x) > 0 \Rightarrow 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad f'(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} e^{\tan(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$$

$$x > 0, x \neq 1 \quad f'(x) = \frac{2x \ln(x) - \frac{1}{x} [x^2 - 6]}{\ln^2(x)}$$

$$x < 0, x > 1 \quad f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$