Calcolo Differenziale — *Test 5*

Corsi di Laurea in Informatica, a.a. 2013/14

Mettere una croce su vero o falso, lasciare in bianco se non si conosce la risposta.

Esercizio 1. Sia $f(x) = 2x + \arctan(x) + \frac{1}{x} + \cos(x)$

i) f è crescente in $[1, \infty)$ ☒V ☐F DERIVATA POSITIVA

ii) f è crescente in $(0, \infty)$ ☐V ☒F $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$

iii) esiste $c \in (0, \infty)$ tale che $f'(c) = 0$ ☒V ☐F LA DERIVATA CAMBIA SEGNO

Esercizio 2. Sia f derivabile in (a, b) e continua in $[a, b]$

i) f^2 derivabile in (a, b) ☒V ☐F

ii) se $f(x) \geq 0$ in (a, b) $\sqrt{f}$ derivabile in (a, b) ☐V ☒F ESEMPIO $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

iii) se $f^2(a) = f^2(b)$ esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$ ☐V ☒F ESEMPIO $a = -1$ $b = 1$ $f(x) = x$

iv) se $f(x) > 0$ in (a, b) e $\sqrt{f(a)} = \sqrt{f(b)}$ esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$ ☒V ☐F SE $f(x) > 0$ $f(a) = f(b)$

Esercizio 3. Sia $f(x)$ definita in (a, b) e derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Sia $h(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $x_0 \in (a, b)$ con $h'(x_0) = 0$.

i) La funzione $|f|$ è derivabile in x_0 ☐V ☒F $f(x) = x$

ii) Se $f(x_0) \neq 0$ si ha $(|f|)'(x_0) = sgn(f(x_0))f'(x_0)$ ☒V ☐F BASTA FARE LA PROVA NEL CASO $f(x_0) > 0$ E $f(x_0) < 0$ USANDO IL TH DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

iii) fh è derivabile in x_0 ☒V ☐F

COSI' E' BANALE PROVATE CON $f|h|$

Domande aperte

Esercizio 4. Dopo aver determinato l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità si calcolino le derivate delle seguenti funzioni $\frac{x\sin(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}$ $[-1,1]$, ATTENZIONE GLI ESTREMI DOPO I CALCOLI VANNO INCLUSI INFATTI $\exists \lim_{x\to 1^-} f'(x)$ e $\lim_{x\to -1^+} f'(x)$

$$\cos(\sqrt{1-x^2}), \quad \frac{x+\cos(x)}{1-\sin(x)}, \quad \sqrt{\sin(x)}, \quad e^{\tan(x)}, \quad \frac{x^2-6}{\log(x)}, \quad \log(x^2-x)$$

Esercizio 5. Sia $f(x) = 3x + 2\sin(x) + x^3 + 1$. Dimostrare che la funzione f è invertibile in $\mathbb{R}$. Calcolare $(f^{-1})'(1)$.

Esercizio 6. Sia $f(x) = \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$. Dimostrare che f è costante nell'intervallo $(0, \infty)$. Dimostrare che f è costante nell'intervallo $(-\infty, 0)$. La funzione è costante in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$? BASTA FARE LA DERIVATA E VEDERE CHE E' NULLA. QUESTO SIGNIFICA CHE f E' COSTANTE NEI 2 INTERVALLI PERO' $f(1) = 2\mathrm{arctg}(1) \neq f(-1) = 2\mathrm{arctg}(-1)$ QUINDI f NON E' COSTANTE IN $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Esercizio 7. Sia $f(x) = e^x - 2x + 1$. Determinare massimo e minimo di f nell'intervallo $[0, 2]$

$f'(x) = e^x - 2 = 0 \iff x = \ln 2$, CANDIDATI $x = 0, 2, \ln(2)$

$m = f(\ln(2)) = 2 - 2\ln(2) + 1 = 3 - \ln(2)$

$M = f(2) = e^2 - 4 + 1 = e^2 - 3$