Calcolo Differenziale — *Test 6*

Corsi di Laurea in Informatica, a.a. 2013/14

Mettere una croce su vero o falso, lasciare in bianco se non si conosce la risposta.

Esercizio 1. i) Esistono funzioni convesse definite in $(0, +\infty)$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ☒ ☐F ES $f(x) = \frac{1}{x}$

ii) Esistono funzioni convesse definite in $(0, +\infty)$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ☒ ☐F ES $f(x) = -\ln(x)$

iii) Il prodotto di 2 funzioni convesse definite in $(0, +\infty)$ è convesso ☐V ☒ ES. $f(x) = x^2$ $g(x) = -\ln(x)$

Esercizio 2. Sia f derivabile 2 volte in (a, b) e continua in $[a, b]$. Se esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(a) = f(c) = f(b)$.
Allora esiste un punto $d \in (a, b)$ tale che $f''(d) = 0$ ☒ ☐F 2 VOLTE ROLLE IN (a, c) IN (c, b) E POI ANCORA UNA VOLTA SULLA FUNZ. f'

Esercizio 3. Sia $f(x)$ continua definita in $\mathbb{R}$. Supponiamo che esistano $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

i) La funzione f ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}$ ☒ ☐F (VEDI LIBRO)

ii) La funzione f non può ammettere punti di massimo relativo in $\mathbb{R}$ ☐V ☒ CI SONO TANTI ESEMPI

Esercizio 4. La funzione $f(x) = \ln(x) + e^x$ ammette almeno un punto di flesso in $(0, +\infty)$ ☒ ☐F

$f' = \frac{1}{x} + e^x$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + e^x \rightarrow$ CAMBIA SEGNO ALMENO 1 VOLTA

BASTA CHE ABBIA UN GRAFICO $\rightarrow$

Domande aperte

Esercizio 5. Dimostrare che la funzione $x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si può estendere in modo continuo in $x = 0$. Dimostrare usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale che la funzione così estesa è anche derivabile in $x = 0$.

$\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases}$ È UN ESTENSIONE CONTINUA

$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin(\frac{1}{h}) = 0$

Esercizio 6. Sia $f(x) = \sin^2(x) - \cos(x)$. Determinare i punti di massimo e minimo relativo di f in $[0, 2\pi]$.

Esercizio 7. Sia $f(x) = \sqrt{|x|} + x^2$. Determinare massimo e minimo assoluto di f in $[-1, 1]$.

Esercizio 8. Data la funzione $f(x) = |\log(x)| + \frac{1}{x^2}$
determinare l'insieme di definizione, studiare il segno, calcolare i limiti agli estremi dell'insieme di definizione, dire se ci sono asintoti, determinare l'insieme di derivabilità della funzione, studiare la monotonia, determinare massimi e minimi relativi, studiare convessità e concavità della funzione e dire se ci sono punti di flesso. Utilizzando le informazioni ottenute, disegnare il grafico della funzione.

NB $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$!

ES 6 $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = \sin(x)[2\cos(x) + 1] \doteq 0 \Leftrightarrow$

$\sin(2x) + \sin(x)$

$x = 0, \pi, 2\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ | $f''(x) = 2\cos(2x) + \cos(x)$

$f''(0) = 3$ PUNTO DI MIN RELATIVO [ANCHE SE PUNTO DI FRONTIERA]

$f''(2\pi) = 3$ - - - - - - - - -

$f''(\pi) = 1$ PUNTO DI MIN RELATIVO | $f''(\frac{2}{3}\pi) = -1 - \frac{1}{2} < 0$ PUNTO DI MAX REL.

$f''(\frac{4}{3}\pi) = -1 - \frac{1}{2} < 0$ - - - - - - -

ES 7 f NON DERIVABILE IN $x = 0$

$f'(x) = 2x + \frac{\mathrm{sgn}(x)}{2\sqrt{|x|}}$ $x \neq 0$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x\sqrt{|x|} = -\mathrm{sgn}(x)$ $\begin{cases} x > 0 & 16x^3 = -1 \rightarrow x = -\frac{\sqrt[3]{4}}{4} \rightarrow \nexists \\ x < 0 & -16x^3 = 1 \quad x = +\frac{\sqrt[3]{4}}{4} \end{cases}$ $\rightarrow$ SEGUE