

Calcolo Differenziale — Test 6

Corsi di Laurea in Informatica, a.a. 2013/14

Mettere una croce su vero o falso, lasciare in bianco se non si conosce la risposta.

Esercizio 1. Sia $f(x) = e^x - \sin(2x)$. Indichiamo con $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$ rispettivamente i polinomi di grado 1, 2 e 3 della funzione f di centro $x_0 = 0$

i) $P_1(x) = 1 - x$ V F

ii) $P_1(x) = 1 + x$ V F

iii) $P_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$ V F

iv) $P_2(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2}$ V F

v) $P_3(x) - P_2(x) = \frac{x^3}{6}$ V F

Esercizio 2. Sia f derivabile 2 volte in \mathbb{R} tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f''(x) \leq 2$ in \mathbb{R} . Allora si ha $f(x) \leq x^2$.

V F

Esercizio 3. Ricordiamo la definizione di infinitesimo di ordine superiore. Ovvero $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$ quando x tende ad x_0 , se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Questo si scrive $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$.

i) $\sin^2(x) = o(e^x - 1)$ per $x \rightarrow 0$ V F

ii) $1 - \cos(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$ V F

iii) $\sqrt{x} - 1 = o(x - 1)$ per $x \rightarrow 1$ V F

Esercizio 4. i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{e^n} = 0$ V F

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$ V F

iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = 0$ V F

Domande aperte

Esercizio 5. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 e centro $x_0 = 1$ della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$.

Esercizio 6. Dimostrare che la successione $a_n = \frac{n+5}{n^2+11}$ è decrescente per $n \geq 1$.

Esercizio 7. Usando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))x^2}{(e^x - 1)^4}.$$

Esercizio 8. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{5 - x}}{\sin(2\pi x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{e^x - e}.$$

Esercizio 9. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n) + 5}{\sqrt{n} + 2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sin(n), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(e^{\frac{1}{2n}} - 1 \right).$$